



Title	Boole 空間ニツイテ
Author(s)	小笠原, 藤次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 230, p. 742-752
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74929
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

999. Boole 空間 = ツイテ

小笠原 藤次郎 (廣島文理大)

vector lattice / “表現論”⁽¹⁾ への補足ト並ビニ、ソノ作用素論等への應用ヲ可能ニスル足場ヲ作ルコトが目的デアール。“表現論”が Archimedean / 場合ニ於テモ complete / 場合ト本質的ニ大差ナク成立スル根據ハ何か。コレヲ前田先生ノ表現法ヲモトニシテ明確ニスルタメ §1, §3 デ Stone ノ着想⁽²⁾ ヲ補ツテ Boole 空間トソノ上ノ

(1) 前田文友, 小笠原藤次郎, vector lattice / 表現。以後コノ論文ヲ“表現論”ト呼ブ。

(2) Stone, Proc. Nat. Acad. Sci. 26 (1940), 280-283.

連続函数, *vector lattice* ト, 関係ヲ調べ §2 デハ 上記問題ノ解答トシテ Archimedean vector lattice ハ無制限 = join, meet ヲ保存シテ complete vector lattice = 埋藏サレル.⁽³⁾ コトヲ示ス. §4 デハ 前田先生ノ *measure* ノ補足 §5 デハ "表現論" ハノ 簡單 + 補足ヲ加ヘタ. 應用 = ツイテハ 本誌ヲ開キ + ク論ズルコト = スル.

§1. 定理 1.1. Ω ヲ Boole 代数 A , 表現 Boole 空間トスルトキ次ノ 諸条件ハ 互ニ 對等デアル.

(1°) A ハ complete デアル.

(2°) Ω , 任意ノ Borel 集合ハ 第一種集合ヲ法トシテ Ω , basic open set⁽⁴⁾ ト一致スル.

(3°) Ω 上ノ 任意ノ B-可測 (Borel 可測, コト) 有界函数ハ 第一種集合上ヲ除イテ 連続函数ト一致スル.

(4°) 第一種集合ヲ除イテ 有限値ヲトル Ω 上ノ 任意ノ B-可測函数ハ 非稠密集合ヲ除イテ 有限値ヲトル 連続函数ト 第一種集合ヲ除イテ一致スル.

(証) *basis open set* ハ O 或ハ O_α , 開集合ハ G , Borel 集合ハ B 或ハ B_α , 第一種集合ハ P 或ハ P_α 等ヲ表ス.

(1°) \rightarrow (2°) ノ 証. \mathcal{M} ヲ $O \triangle P$ (O ト P ノ 對稱差) ノ 形ヲモツ 集合ノ 族トシテ (i), (ii), (iii) ガ 成立スルコトヲ示セバ可ナリ.

(i) $E \in \mathcal{M}$ ノ トキ $E^c \in \mathcal{M}$ (ii) $E_n \in \mathcal{M}, n=1, 2, \dots$ /

(3) 中野秀五郎, 紙上談話會. 1941, 915

(4) 開且開集合ノコト.

トキ $\sum E_n \in \mathcal{M}$ (iii) $G \in \mathcal{M}$. コノ \rightarrow (i), (iii) ハ
 自明 (ii) ハ $E_n = O_n \Delta P_n$ ヨリ $\sum E_n \Delta \sum P_n \subseteq \sum P_n$ カラ明.

(2°) \rightarrow (3°) ノ 証. $f(P)$ \rightarrow 有界-B-可測 トシ $E_\alpha = [f(P) < \alpha]$
 (α ハ 有理数) ト置ク. 假定ヨリ $E_\alpha = O_\alpha \Delta P_\alpha$ が成立, コ
 レヨリ $\alpha < \beta$ ノトキ $O_\alpha \subset O_\beta$ が成立スル. 連続函数 $h(P)$ \rightarrow
 次ノ如ク定メル.

$$h(P) = g.l.b. \{ \alpha; P \in O_\alpha \} = l.u.b. \{ \alpha; P \notin O_\alpha \}$$

コノ $h(P)$ が問題ノ連続函数ナルコトが容易ニ示サレル.

(2°) \rightarrow (4°) ノ 証 (2°) \rightarrow (3°) ノ 証 = 薄ナル.

(4°) \rightarrow (3°) ノ 証 自明.

(3°) \rightarrow (1°) ノ 証 α \rightarrow 任意ノ index ノ 集合ノ 要素ト
 スル. $f_\alpha(P)$ \rightarrow O_α ノ 特性函数トシ $f(P) = l.u.b. f_\alpha(P)$
 ト置イテ (3°) = ヨツテ $f(P) =$ 對應スル連続函数ヲ $h(P)$ ト
 スレバ $h(P)$ ハ $\overline{\sum O_\alpha}$ ノ 特性函数トナルコトが示サレル. コ
 レカラ (1°) ノ 成立が明トナル.

定義 定理 1.1 ノ 証明中ノ \mathcal{M} ノ 集合ヲ 單 = 可測集合,
 \mathcal{M} = 關シテ可測ノ 函数ヲ 單 = 可測函数ト呼ブ.

定義 第一種集合上ヲ除イテ一致スル函数ハ 對等トシト
 イフ.

以下 Ω 上ノ 函数ハ 第一種集合ヲ除イテ有限値ヲトルモ
 ノトスル.

定理 1.2 Ω \rightarrow Boole 代数 A ノ 表現 Boole 空間トス
 ル. A \rightarrow complete トスルトキ次ノ 條件ハ 互ニ對等ナル.

(1°) $f(P)$ ハ Ω 上ノ 可測函数ナル.

(2°) $f(p)$ は Baire 1 性質ヲモツ。

(3°) $f(p)$ は連続函数ト對等デアル。

(証) 定理 1.1 の証明カラ自明。

定理 1.3 Ω は bicomact Hausdorff 空間トシ、 Ω 上ノ有界連続函数族ヲ \mathcal{L}_B 、非稠密集合ヲ除イテ有限値ヲトル連続函数族ヲ \mathcal{L}_Ω トスル。コノトキ次ノ諸條件ハ互ニ對等デアル。

(1°) Ω は complete Boolean algebra、表現 Boolean 空間デアル。

(2°) \mathcal{L}_B は complete vector lattice デアル。

(3°) \mathcal{L}_Ω は complete vector lattice デアル。

[注意] (3°) = 於テハ \mathcal{L}_Ω ノ函数ノ和ハ有限値ヲトル且、 \mathbb{R} 上ノ単独的ニ定ムルヤウ定義サレルモノトス。詳細ハ以下ノ証明カラ明瞭ナル。

(証) (2°) \rightarrow (1°)、証 Ω ノ開集合ノ basis トシテ $0 \leq f \leq 1, f \in \mathcal{L}_B = \exists \text{ル } [f > 0]$ 、全体ガ與ヘラレルコト自明。

今 $p_0 \in \Omega$ 等 $f(p_0) > \alpha > 0$ トスルニ $f_1 = (f - \alpha) \vee 0$ トオクト $[f > \alpha] = [f_1 > 0]$ が成立スル。 $f_n = n f_1 \wedge 1, n = 2, 3, \dots$ トオイト $\bigvee_n f_n$ ヲ考ヘルト、コレハ $\overline{[f_1 > 0]}$ ノ特性函数ヲ表ス連続函数トナル。従ツテ $\overline{[f_1 > 0]}$ ハ開且ツ閉即チ Ω ハ Boolean space トナル。此 = basic open set O_α ノ族ヲ與ヘ、特性函数 $f_\alpha(p)$ カラ $\bigvee_\alpha f_\alpha$ ヲ作ルトコレカラ $\overline{\sum O_\alpha}$ が開集合ヲ作ルコトヲ知ル。故ニ Ω ハ com-

plete Boolean algebra / 表現空間デアール。

(1°) \rightarrow (3°) の証. $f, g \in \mathcal{L}_\Omega$ / トキ $f+g$ / 定義 / 可能性及ビ $f_\alpha \geq 0$ / トキ $\bigwedge_\alpha f_\alpha$ / 存在証明ヲ行ハバ充分デアール. 有限値ヲトル点デ $f(p) + g(p) = \text{ヨツテ } f+g$ / 値ト定メコレト對等 + 連続函数 h ヲ以テ $f+g = h$ ト定ムル.

$f(p) = g$. \mathcal{L}_Ω 上 $f_\alpha(p)$ ト置クトキ $f(p)$ 上連続函数デアール. コレト對等 / 連続函数ヲ h トスルバ $h = \bigwedge_\alpha f_\alpha$ トナル.

(3°) \rightarrow (1°) ハ自明. 依ツテ定理ハ完全ニ証明サレタ.

(注意) 本定理ノ條件ガ成立スルトキ \mathcal{L} / Ω 上 \mathcal{L}_Ω / vector sub-lattice トスルトキ \mathcal{L} / 函数 = ヨリ區別シ得 + 1 点即チ \mathcal{L} / 函数ガ値 = 相等シイ値ヲトル点ヲ恒等視シテ Zerlegungsraum $\Omega_\mathcal{L}$ ヲ作ツテ \mathcal{L} ヲ $\Omega_\mathcal{L}$ 上ノ vector lattice ト考ヘルコトガ出来る. $\Omega_\mathcal{L}$ ハ $\mathcal{L} = \text{ヨリ}$ 單独的ニ定ムル bicomact Hausdorff space デ $\Omega_\mathcal{L}$ 上ノ有界連続函数ハ \mathcal{L} / 函数ガ一様ニ近似スルコトガ出来る. コノ恒相的手続ハ周知ノコトデアールカラ改メテ述ベルヲデモナシ. 以下 $\Omega_\mathcal{L}$ ヲ作ルコトヲ Ω ヲ $\mathcal{L} = \text{依ツテ reduce}$ スルト云フコトニスル.

§2. "表現論" / 第二節ノ記法及ビ結果ヲ利用スル. \mathcal{L} ヲ Archimedean vector lattice トシ, \mathcal{I} / normal ideal / 全体ヲ \mathcal{N} トスルバ \mathcal{N} / complete Boolean algebra ヲ作ル. \mathcal{I} / 表現空間 Ω 上 $\mathcal{L} = \text{對}$

應スル連続函数, vector lattice \mathcal{L} トシ \mathcal{L} / 函数
 =ヨリ majorize サレル⁽¹⁾ \mathcal{L}_0 / 函数族ヲ $\bar{\mathcal{L}}$ テ表ス. $\bar{\mathcal{L}}$
 ハ \mathcal{L}_0 / vector sub-lattice トシテ complete + コ
 トハ自明ナルガ次ノ定理が成立スル。

定理 2.1 無制限 = \mathcal{L} / join, meet ヲ保存スル \mathcal{L}
 ヲ含ム最小ノ complete vector lattice $\bar{\mathcal{L}}$ が存在ス
 ル.⁽²⁾ $\bar{\mathcal{L}}$ ハイザレ $\bar{\mathcal{L}} = \text{linear-lattice-isomorphic}$
 ナル。

(証) 任意, $h \in \bar{\mathcal{L}}$ ヲトル. $g = \wedge (f; f \geq h, f \in \mathcal{L})$
 トオイテ $h - g$ トナルコト及ビソノ dual が成立スルコトヲ
 示ス. $g \geq h$ ナルコト自明. ϵ シ $g > h$ トスレバ $\alpha \subset \alpha(e_\alpha)$
 ヲ適当ニトリ $\alpha \in \mathcal{P}^*$ / トキ $g(\mathcal{P}^*) > h(\mathcal{P}^*) + \lambda$, ($\lambda > 0$)
 ナラシメ得ル。

今 $x \in \alpha$, $0 < x < \lambda e_\alpha$ ナルヲトスレバ $f_x(\mathcal{P}^*)$ ハ $\alpha \in \mathcal{P}^*$,
 $\alpha' \in \mathcal{P}^* =$ 従ツテ $0 \leq f_{\alpha'}(\mathcal{P}^*) < \lambda$ 或ハ $f_x(\mathcal{P}^*) = 0$ トナ
 ル. 故ニ $g \geq h + f_x$.

コレカラ g / 定義ト矛盾スルコトが容易ニ分ル. dual
 ナ部分ノ証明モ同様ニ行ヘル. 次ニ M, N ヲ \mathcal{L} / 部分集合,
 且ツ $x \in M, y \in N$ カラ $x \leq y$ が成立スル maximal set
 トスル. コノトキ $\wedge (y - x; x \in M, y \in N) = 0$ が成立ス
 ル. コレハ表現空間デ $\vee (f_x; x \in M) = \wedge (f_y; y \in N) \in \bar{\mathcal{L}}$
 が成立スルコトカラ知ラレル. コレカラ証明ノ本筋ニ入ル。

(1) $|h| \leq f, f \in \mathcal{L}$ ナル如キ $h \in \mathcal{L}_0$ / 全体.

(2) 中野秀五郎, 紙上談話會 1941, 915.

L の *join, meet* を無制限 = 保存スル L を含ム *complete vector lattice* を考へタトキ L の要素ヲ *majorize* されル要素ノ全体ヲ \bar{L} トシ \bar{L} ト \bar{L} ト \bar{L} トガ $L \leftrightarrow \bar{L}$ ノ関係ヲ保存シテ *linear-lattice-isomorphic* ナルコトヲ示セバヨイ。コノ関係ハ $x \in \bar{L} =$ 對シテ $M = (x; x \leq z, z \in L)$ $N = (y; y \geq z, z \in L) =$ 依ツテ $z = \bigvee_{x \in M} x = \bigwedge_{y \in N} y$ が成立スルコトカラ \bar{L} ト \bar{L} トノ間ニ我々ノ欲スル對應が得ラレルコトが分ル。

以上ニヨッテ本定理ハ証明サレタコトニナル。コノ定理ノ証明カラ次ノコトが分ル。

定理 2.2. L ハ L ノ *linear-lattice-isomorphic* ナ表現デアアルガ L_0 ノ *sublattice* トシテ無制限 = L ノ *join, meet* を保存スル表現デアアル。

定理 2.3. 無制限 = L ノ *join, meet* を保存スル L を含ム唯一ノ最小ノ σ -*complete vector lattice* が存在スル。

§3. σ -*Boolean algebra* ノ表現 *Boole 空間* ニツイテモ §1 ノ所論ニ類スルモノが得ラレル。

定理 3.1. Ω を *Boole 代数* A ノ表現空間トスルトキ次ノ條件ハ互ニ對等デアアル。

(1°) A ハ σ -*Boole 代数* デアル。

(2°) \mathcal{O} ノ *basic open set* を含ム最小ノ *Borel 族* ノ任意ノ集合ハ第一種集合ヲ法トシテ *basic open set* ト一

致スル。

(3°) 任意、有界 Baire 函数ハ第一種集合上ヲ除イテ連続函数ト一致スル。

(4°) (3°)ノ函数ヲ第一種集合ヲ除イテ有限値ヲトル函数ヲ置キカヘテ得ラレル。

定理 3.2 Ω ハ Boole 代数 A ノ表現 Boole 空間デ A ハ σ -Boole 代数トキ第一種集合ヲ法トシテ basic open set ト一致スル集合ノ族ヲ \mathcal{M} トスル (\mathcal{M} ハ Borel 族ニナル)トキ次ノ條件ハ互ニ對等デアル。

(1°) $f(p)$ ハ第一種集合上ヲ除イテ連続函数ト一致スル。

(2°) $f(p)$ ハ \mathcal{M} ニ關シテ可測デアル。

定理 3.3. Ω ヲ bicomact Hausdorff 空間トスルトキ次ノ條件ハ互ニ對等デアル。

(1°) Ω ハ σ -Boole 代数ノ表現 Boole 空間デアル。

(2°) L ハ σ -complete vector lattice デアル。

(3°) L_{Ω} ハ σ -complete vector lattice デアル。

§4. Ω ヲ complete (或ハ σ -) Boole 代数 A ノ表現 Boole 空間トスル。 Ω ノ basic open set \mathcal{G} 含ム最小ノ Borel 族ヲ \mathcal{L} ノ第一種集合ヲ法トシテ basic open set ト一致スル集合ノ族ヲ \mathcal{M} トスルト \mathcal{M} ハ

Borel 族 \mathcal{A} 上 ν . 今 $\mu(a)$, $a \in A$ 値域 $V \neq$ Archimedean vector lattice L 上 ∞ countably additive vector 値函数トスル。即チ $a = \bigvee a_n$, $a_n \wedge a_m = 0$, $(m \neq n)$, トキ $\mu(a) = \mu(a_1) + \mu(a_2) + \dots$ が成立スル ∞ トス。 $\mathcal{O}_a =$ 対スル \mathcal{O}_b , basic open set \mathcal{O}_a トスルトキ $\mu(\mathcal{O}_a) = \mu(a)$ トオク \mathcal{O}_a basic open set 上ノ集合函数トスル。

定理 4.1. $\mu(\mathcal{O}_a)$ は L 上, countably additive + vector 値函数 = 拡大 $\#$ 可。尚 $\mathcal{O}_a \neq \mu(\mathcal{O}_a)$ ト一致スル L 上, countably additive + vector 値函数ハ唯一ツシカ存在シトイ。

(証) $E \in \mathcal{L}$, トキ $E = \mathcal{O}_a P$, 形 (P ハ第一種集合) ノ形 = カ $\#$ 可。 $\mu(E) = \mu(\mathcal{O})$ ト置クコト = $\exists \mu(E)$ ノ定義が確定スル。コレハ L 上 \neq countably additive + vector 値函数トスルコトカ容易 = 知ラ $\#$ 可。次 = $\nu(E) \neq \mathcal{O}_a \neq \mu(\mathcal{O}_a)$ ト一致スル countably additive + vector 値函数トスル。 $\mu(E) = \nu(E)$ が成立スル E ノ族ヲ \mathcal{N} トスルトキ \mathcal{N} ハ次ノ性質ヲ ∞

(i) $E \in \mathcal{N}$ ノトキ $E^c \in \mathcal{N}$ (ii) $\mathcal{O}_a \in \mathcal{N}$ (iii) $E_n \in \mathcal{N}$, $E_n E_m = 0$, $(n \neq m)$ ノトキ $\sum E_n \in \mathcal{N}$. コレカラ $\mathcal{N} = \mathcal{L}$ トルコトヲ知ル。

(注意) $\mu(a)$ が $a \neq 0$ ノトキ常 = 正トシバ $\mu(E) = 0$, ($E \in \mathcal{L}$) ト $E \in \mathcal{L}$ が第一種集合トハ對等ノ命題トイ。

定理 4.2 $\mu(\mathcal{O}_a)$ は \mathcal{N} 上 \neq countably additive

* vector 値函数 = 拡大サレル。

(証) 定理 4.1 の証カラ自明。

★ A が 単 = Boolean algebra, トキ $\mu(a)$ が additive トスル トキ L が regular complete 且 $\mu(a)$ が lattice 的 = 有界, トキ Ω , Borel 集合 族 上, countably additive + 集合函数 = 拡大サレル。コレハ連続函数空間, 作用素, 解析的表現ヲ得ル $\mathcal{M} =$ 重要 + モノデアアル。コレ = ツイテハ次, 機會 = ノベル。

§ 5. “表現論”へ 簡單 + 補足ヲ加へル。 L が Archimedean vector lattice トシ § 2 デ述ベタヌウ = \mathcal{L} , $\Omega_{\mathcal{L}}$ 等ヲ考へル。

(i) 角谷氏ノ定理

L が 單位 e ヲモツトキ $\Omega_{\mathcal{L}}$ 上 デ \mathcal{L} ヲ考へルコト = ヨツテ コノ定理, 拡張が得ラレル。

(ii) “表現論” デ σ -complete + $L =$ 於テ \mathfrak{I} ideal ノ全体 \mathcal{P} ヲ媒介 トシタ L ノ表現トノ關係。

L が 單位 e ヲモツトキ \mathcal{P} ノ表現 Boole 空間ハ $\Omega_{\mathcal{L}}$ ト一致スル。

(iii) Stone, 吉田氏ノ方法トノ關係。

L が 單位 = 関シテ有界性, 條件ヲ具ヘタトキ吉田氏ノ maximal normal subspace, 全体ト ($\mathfrak{I}; f_{\sigma}(\mathfrak{I}^*)$, \mathfrak{I}^* 係 fixed) ノ全体ガ一致スル。

(iv) “表現論” デ導入サレタ測度 = ツイテ。

角谷先生ノ可測集合ハ \mathcal{E}_4 ノ $\mathcal{M} =$ 係シタ

1. 測度ト一致スル。測度0ノ集合ハ第一種集合デアリ 測度0ノ集合ヲ無視シテ第一種集合ヲ無視シテ デ置キカヘタエ
ノカ ξ_1, ξ_3 ノ所論デアル。