



Title	Ring Lattice ノ公理系 及ビ 表現論
Author(s)	小笠原, 藤次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 230, p. 752-759
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74930
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1000. Ring Lattice / 公理系及^レ表現論

小笠原 藤次郎(廣島大理文)

vector lattice / 表現論⁽¹⁾ヨリシテ ring lattice / 公理系及^レ表現ニツイテ論ズ。如何ナル vector lattice ε meet 及^レ join τ 無制限ニ保存シテ complete vector lattice = 埋藏サレル。⁽²⁾コレヨリ complete vector lattice = 於テ成立スル事實ハ Archimedean case = 於テ必要ニ修正ヲ加ヘテ成立スベシトイフ考ヘ方ニヨツテ次ノ様ニ論ジタ。§1デ ring lattice / 定義ヲ與ヘタ後各要素ガ單位ニツイテ有界ノ可換環ニツイテ周知ノ表現論ヲ§2デハ有限次元ノ ring lattice = 於テ

(1) 前田文友, 小笠原藤次郎, vector lattice / 表現。以後コノ論文ヲ“表現論”ト呼ブ。

(2) 小笠原藤次郎, Boole 空間ニツイテ。

(3) 次頁ヘ。

"Archimedean" ハ「零元ノ非在ノ條件ト對等ナルコトヲ §3 デハ §1 中ノ條件可換ハ余分ナルコトヲ §4 デハコレヲ一般ノ ring lattice デ証明シタ。

§1. 定義 環單位 e , 實數ヨリナル作用團ヲモツ環 R が次ノ條件ヲ満足スルトキ ring lattice トイフ。

(1) R ハ vector lattice デアル。

(2) Archimedean ノ公理ヲ満足スル。

(3) e ハ vector lattice トシテノ單位デアル。

(4) $x > 0, y > 0, x, y \in R$ トキ $xy \geq 0$

(1), (2) ヨリ "表現論" = ヨリ normal ideal, 全体 N , 表現 Boole 空間 Ω 上ノ連続函数 = ヨツテ R ヲ vector lattice トシテ linear-lattice-isomorphic + 表現が得ラレル。 x ニ對應スル函数ハ $f_x(\beta^*)$ デ表ス。コノ § デハ R ノ各要素ガ e ニ關シテ有界 + 可換環ノ場合ノミヲ考ヘル。自明ナルモノノ証明ハ略スル。

補助定理 1. $x > 0, y > 0, x \wedge y = 0$ トキ $xy = 0$

補助定理 2. $a > 0$ トキ $(ax)_+ = ax_+, (ax)_- = ax_-$

(証) $ax = ax_+ - ax_-, ax_+ \wedge ax_- = 0$ ヲ

$$(ax)_+ = ax_+, (ax)_- = ax_-$$

補助定理 3. $x^2 = |x|^2$

(3) ハ次頁ノ脚註

(3) R が實數体上有限ノ order ヲモツ換言スレバ有限個 linear basis ヲモツ意。

(4) 各 $x \in R = |x| < \alpha e$ + α 正實數 α ノ存在スル意。

定理1. 各要素が $e = 1$ である有限可換 π -ring
 lattice R は単独的 = 定まる *bicomact Hausdorff*
 空間 / 稠密 + 連続函数族 / 環 = より *ring-lattice-isomorphism* = 表現される。

(証) $f_{xy}(p^*) = f_x(p^*) f_y(p^*)$ を証すれば他 / 部分
 の証明は "表現論" 及び "Zerlegungsraum" を作ルコ
 ト = より自明。

コノタメニハ $f_{x^2}(p^*) = \{f_x(p^*)\}^2$ を証すれば可。何者
 x / 代リ = $x + y$ と置イテ両辺ヲ比較スレバヨイ。補助定理
 3 = より $x > 0$ / トキ証スレバ可。"表現論" / 記法デ $x > 0$
 / トキ任意 / 正数 λ = ツイテ $\alpha_\lambda^{(x)} = \alpha_{\lambda^2}^{(x^2)}$ 換言スレバ
 $(x - \lambda e)_- \sim (x^2 - \lambda^2 e)_-$ とルコトヲ証スレバ可ナリ。然ル
 = 補助定理 2 = より $\lambda(x - \lambda e)_- \leq (x^2 - \lambda^2 e)_- \leq \alpha(x - \lambda e)_-$
 とル正数 α が存在スル。

従ツテ定理1ハ証明サレタコトニナル。

(2) / 假定ノナイトキハ $e = 1$ である無限小 / 全体⁽¹⁾ハ
ideal 且ツ *normal subspace* とナル。従ツテソレ =
 關スル剰余環が定理1 / 假定ヲ満スコトニナルカラ無限小 /
 全体ハ *radical* とモ考ヘラレル。有限次元ノトキハ丁度
radical と一致スル。

定理2. 単位 $e = 1$ である各要素が有限 π -Archimedean
 vector lattice L ハ必要 / 場合 L / 拡大 = より e を

(1) 任意 / 正数 α = ツイテ $|x| \leq \alpha e$ が成立スル x / 全体。

"表現論" §1 参照。

環單位トスル *ring lattice* = スルコトが可能デアル。且ツ積ハ $\mathbb{L}$ 上デハ單独的ニ定マル。⁽²⁾

§2. 茲デハ有限次元ノ R ノミニツイテ考ヘル。Archimedean, 公理ヲ代数的性質ニヨツテ究マルタメコノ公理ハコノデハ假定セズニオク。 e ニ關シテ有界ノ要素ノ全体ヲ R_e トスレバコレヲ *ring lattice* デアル。

補助定理1. R_e radical ハ e ニ關スル無限小ノ全体ト一致スル。

(証) x ガ e ニ關スル無限小ノトナルハ $\cap$ 零元ナルコト及ビソノ逆ガ容易ニ示サレル。コレカラ補助定理1ノ成立ガワカル。

定理1. R_e ニ於テ“Archimedean”ト“半單純”ハ對等ノ條件デアル。

補助定理2. R_e ガ Archimedean, 公理ヲ満足スルトキ $R = R_e$ 。

(証) R_e ハ實數全体ノ作ル *ring lattice*ノ有限個ノ direct union トナルコトが知ラレテキル。 e ヲ primitive idempotent $e_i, i=1, 2, \dots, n$ ニ分解スル。 R ガ Archimedean デナイトスレバ $x, y > 0$ ガ存在シテ任意ノ正數 α ニツイテ $x \geq \alpha y$ ガ成立スル。 $y \wedge e_i > 0$ ヲ満足スル i ヲトレバ $y \wedge e_i = \lambda e_i$ ノ形ニカクレル。コレカラ上ノ x, y ノ代リニ $x \geq \alpha e_i, x e_i = x$ トシテ差支ヘナイ。コレヨリ $x^2 \geq \alpha x, \dots$ トナリコノ無限大的性質ガ矛盾

(1) §3 定理1 参照

ヲ起スコトヲ示セバヨイ。 R が Archimedean / トキハ $R = R_e$ が容易 = 分ル。

定理2. R が Archimedean / 公理ヲ満足スルタメノ
條件ハ $\square$ 零元ノ非在 (或ハ $x \neq 0$ / トキ $x^2 > 0$) デアル。

(証) 補助定理1, 2ヨリ

定理3. 可換 + R デハ Archimedean / 公理ハ半單純ノ
條件ト對等デアル。

(証) 補助定理1及ビ2ヨリ

有限次元デナイ R デハ此ノ定理ハ成立セズ。スベラノ実
係数ノ $\square$ 級数ヲ辞書的 = 順序ヅケ Cauchy 積ヲ積ノ定義ト
シテ導入スルコトニヨリ例示サレル。

§3. 定理1 各要素ガ e = 關シテ有界 + ring lattice
ハ可換デアル。

(証) vector lattice トレテ R 7 complete
vector lattice = 埋藏シ後者 = R / 積ノ定義ヲ拡大
スルコトが可能。コレヨリ本定理ヲ complete + R デ証明
スレバ充分。“表現論”ノ記法ヲ $e(a)e(b) = e(b)e(a)$
ヲ証明スレバ充分デアル。何者任意ノ a ハ $e(a)$ / 一次的結
合ニヨリ e = 關シ一様ニ近似スルコトが出来ルカラ。

$e(a)e(b) \leq e(a) \wedge e(b)$ ヨリ $fe(a)e(b)(f^*) \leq$
 $fe(a)(f^*)fe(b)(f^*)$ が成立スル。 b / 代リ = b' ト
置イテ式ト近々相加ヘテ左右両辺トモ $fe(a)(f^*)$ 7 得ル。

コレカラ上ノ不等式デハ等号ガ常ニ成立スルコトヲ知ル。

$e(a), e(b)$ / 順序ヲ変更シテ $fe(a)e(b)(f^*) =$

$f \in e(\mathfrak{a})e(\mathfrak{a})(\mathfrak{f}^*)$. コレヨリ $e(\mathfrak{a})e(\mathfrak{b}) = e(\mathfrak{b})e(\mathfrak{a})$.

環単位が lattice 単位トヲイトキ一般ニ可換ナ
イ。非可換有限群ヨリ案係数, *group-ring* ヲ作り順
序ヲ適當ニ定ナルコトニ依テ分ル。

§4. §3ノ定理1ヲ一般ノ *Ring lattice* デ証明
スルタメ若干ノ補助定理カラ始メル。

補助定理1. $a > 0$, 且ツ e = 関シテ有界ノトキ

$$(ax)_+ = ax_+, (ax)_- = ax_-$$

補助定理2. $x > 0$ ノトキ $x = \bigvee_n (x \wedge ne)$

補助定理3. $x > 0$ 7 e = 関シテ有界, 任意ノ $y > 0$
ニ対シテ $y_n = x \wedge ne$ ト置クトキ $xy = \bigvee x \wedge y_n$

補助定理4. $x > 0, y > 0$ ノトキ $xy = 0$ トハ
 $x \wedge y = 0$

(証) $x_n = x \wedge ne, y_n = y \wedge ne$ トスレバ
 $x_n y_n = 0$ §1 定理1, 及ビ §3 定理1, “表現論”
ヨリ $x_n \wedge y_n = 0$. 補助定理2ヲ使ツテ $x \wedge y = 0$.

補助定理5. $x > 0$ が有界ノトキ任意ノ $y > 0$ = ツイ
テ $x \wedge y = 0$ ノトキ $xy = 0$ が成立スル。

(証) 補助定理3ヨリ。

補助定理6. $x > 0, y_n \downarrow 0$ ノトキ $xy_n \downarrow 0$

(証) 任意ノ自然数 m = 対シテ $x_m = x \wedge me$,
 $x'_m = x - x_m$ ト置ク. $f_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{f}^*) < m$ ノトキ *normal*
ideal $\mathfrak{a}$ が存在ス $\mathfrak{a} \in \mathfrak{f}^*$ ノトキ $f_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{f}^*) < m$. 従
ツテ $f_{x'_m}(\mathfrak{f}^*) = 0$. “表現論”ニヨリ任意ノ正数 λ = 対

$\lambda \in \mathbb{R} \wedge \lambda (x'_m - \lambda e)_+ = 0$. e = 閉区間上有界な $\mathbb{R}$ の任意の正要素 μ をとる. $\mu \wedge (x'_m - \lambda e)_+ = 0 = (\mu x'_m - \lambda \mu)_+$
 (補助定理 1, 5) 従って $\mu x'_m \leq \lambda \mu$. 然るに λ は任意の正数であるから $\mu x'_m = 0$. 故に $\mu (x'_m y_n - \lambda e)_+ =$
 $(\mu x'_m y_n - \lambda \mu)_+ = (-\lambda \mu)_+ = 0$ (補助定理 1). 従って
 $\mu \wedge (x'_m y_n - \lambda e)_+ = 0$ (補助定理 4).

これから $\sigma \wedge \sigma ((x'_m y_n - \lambda e)_+) = 0$ 即ち $f^* \in \sigma$ により
 $f_{x'_m y_n}(f^*) = 0$. 故に $f_{x y_n}(f^*) = f_{x_n y_n}(f^*)$.
 $x_m \wedge e$ = 閉区間上有界であるから $x_m y_n \downarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$).
 従って第一種集合を除いて $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{x y_n}(f^*) = 0$
 故に $x y_n \downarrow 0$ が成立する.

定理 1. R は可換である.

(証) $x > 0, y > 0$ のとき積は可換を証明すれば可. 先
 ず x が e に閉区間上有界なとき $y_n = y \wedge n e$ と置いと
 $x y = \vee x y_n = \vee y_n x = y x$ (§ 3 の定理)
 x が有界でないとき $\wedge (x y - x y_n) = \wedge x (y - y_n) = 0$
 (補助定理 6) より $x y = \vee x y_n$ が得る.

上と同様、論法で $x y = y x$ を証明される.

補助定理 7. 第一種集合を除いて

$$f_{xy}(f^*) = f_x(f^*) f_y(f^*).$$

(証) $x > 0, y > 0$ のとき証明すれば充分. x が有界な
 とき $y_n = y \wedge n e$ と置いと第一種集合を除いて次の等式
 が成立する. $f_{xy}(f^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{x y_n}(f^*) = f_x(f^*) \lim_{n \rightarrow \infty} f_{y_n}(f^*)$
 $= f_x(f^*) f_y(f^*)$. x が有界でないとき定理 1, 証明より

同論法 = ヨル。コレヨリ次ノ定理が成立スル。

定理 2. *ring lattice* R ハ 單獨的 = 定マル *bicom-
pact Hausdorff* 空間ノ連続函数族 (第一種集合ノ上
ヲ除イテ有限ヲトル)ノ *ring lattice* = ヨル *ring-
lattice-isomorphic* = 表現サレル。

定理 3. § 1ノ定理 2デ " e = 関レテ有限 "ノ條件
ヲトツタモ。

(注意) 積ノ定義 = ハ *Riesz*ノ方法カアル。

(注意) 表現論カラ *ring lattice*ノ種々ノ基礎的性質
ヲ導クコトカ出来ル。

(お断り) 本稿ヲ終ツテ中野氏が學士院記事 17(1941) 311
- 317デ σ -complete *ring lattice*ガ可換ナルコト
ヲ述べラレタキルノニ氣がツイタ。