



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | Tietze : 松村ノ定理ノ一証明                                                          |
| Author(s)    | 中村, 正弘                                                                      |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1942, 231, p. 763-768                                            |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/74932">https://doi.org/10.18910/74932</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

## 1002. Tietze - 松村ノ定理ノ一証明

中 村 正 弘 (東北大)

カナリ前ノ話デスガ Tietze<sup>(1)</sup> ト 松村氏<sup>(2)</sup> が次ノ定理ヲ証明シテ居ラマス。

定理.  $R^n$ ノ閉, 連結ト集合ガ局所凸集合ナラバ凸集合デアール。

但シ局所凸集合トハ、 $H$ ノ各点 $p$ ノアル近傍 $U$ ノ撰ブト $U \cap H$ ガ凸集合ニナルヲウナ集合ヲ呼ビマス。

(Tietze)

所デ最近ニイタツラフシテ, コノ定理ヲ Banach 空間ニ拡張シテ直接証明フヤツテ見ツスト一寸難ニ出来道ギテシマヒマシタ。ドコガ間違ツテアル, カ判リマセンノデ、《紙数談》ノ紙上ヲ拝借シテ御権威ノ御叱正ヲ受ケタイト思ヒ

1) Tietze, Math. Zeits., 28(1928)

2) 中島, 東北数学雑誌, 29(1928)

マスノデ、投稿スルコトニシマシタ。

定理ヲハッキリ書キマス次ノ通りデス。

定理.  $E$ ヲ strictly convex +  $B$ -空間トシ、  
 $H$ ヲ  $E$ ノ 集合デコンパクト、連結、局所凸 トシマス。スル  
ト  $H$ ハ 必然的ニ凸集合ニナリマス。

証明ハコンパクトト云フ点ヲ除クト全ク初等的デス。面  
例デスガ、成ルベク正確ニ書クタメニツマラナイ定義ヲシバ  
ラク並べサセテ頂キマス。

↓

$H$ ガコンパクトト云フコトヲ使ツテ例ニヨツテ例ノ如ク  
有限個ノ開球  $U_i$  デ  $H$ ヲ覆ヒ、 $U_i \cap H$ ヲ凸ニスル様ニ取り  
マス。コノ被覆ハ証明ヲ通ジテ取り換ヘマセン。

ソコデ上ノ被覆ヲマツテ、次ニ  $(H \cap U_i \cap U_j)^a$   
——  $H \cap U_i \cap U_j$ ノ内被デス——ガ空集合ニナラナイ  
モノヲ集メテ  $I$  トシ  $S_{ij} = (H \cap U_i \cap U_j)^a$  デ示シ  
マス。

次ニ  $H$ ノ中カラ勝手ニ二点  $a, b$ ヲ撰ビ出シテコレヲ  
モトニシテ 橋ヲ作リマス。橋ト云フハ  $I = [a, p_1, p_2,$   
 $\dots, p_n, b]$  トイフ  $H$ ノ元ノ順序ヲ持ツ組デ、 $p_i$ ノ取  
リ方ヲ次ノマツニ定メマス。便宜上  $a \in U_1$  トシ  $b \in U_r$   
トシマス。

1°.  $p_1$ ヲ  $S_{ij}$ ノ中カラ取ル。

2°.  $p_i$ ガ  $S_{j_k}$ ノ中ニアレバ、 $p_{i+1}$ ハ  $S_{k_l}$ ノ中ヨリ撰  
ブ。

3° ツノ  $S_{ij}$  ノ中カラハ唯ツノ元  $p_k$  ラ撰ビ、ニ  
度トハ取り出サナイ。

4° 最後 =  $p_n$  ハ  $S_{tr}$  ノ中ヨリ撰ガ。

コノ定義カラ見テ  $(a, p)$ , <sup>3)</sup>  $(p_i, p_{i+1})$ ,  $(p_n, b)$  が  
Hニ属シテオルクトハ明デス。コノ  $p_i$  ラ脚ト呼ブコトニシ  
マス。

$I = [a, p, \dots, b]$  トイフ  $a, b$  ラ端点ニ持ツスベ  
テノ橋ヲ集メテ  $\Pi$  デ表シ,  $\Pi$  ラ次ノ同値関係ヲ重リ合ハナ  
イ部分集合  $\Pi_i$  ニ分ケマス。

[同値関係ノ定義]  $I = [a, p_1, \dots, p_n, b]$  :  $I'$   
=  $[a, q_1, \dots, q_n, b]$  が同値デアルトハ  $q_i \in S_{jk}$  カ  
ラ  $p_i \in S_{jk}$  ガ出ルコトダトシマス。

コノ関係ガ例ノ三公理ヲ満スノテ上ノヤウニ分ケルコト  
ガ出来ルワケデス。

## 2.

次ニ橋ノ長さ: 即チ  $I = [a, p_1, \dots, p_n, b]$  ナ  
ラハ

$$p(I) = \sum_{i=1}^{n+1} \|p_i - p_{i-1}\| \quad p_0 = a, p_{n+1} = b,$$

ヲコレガ定義スルト,  $p(I)$  ハ實ハ  $p_i$  ノ  $n$ -変数ノ実函数  
ニ成ルワケデス。所デソノ定義サレテキル領域  $S_{jk} \times \dots \times S_{tr}$   
ハコンパクトデスカラ後ノ  $\Pi_i$  ノ中ニハ少クトモツノ  $I$   
ニ對シテ  $p(I)$  ガ最小トナレモ、ガ存在シマス。總テノ  $i$  7

3)  $(a, p)$  トハ  $a$  ト  $p$  ラ結ブ線分ノ意味デス。以下同様

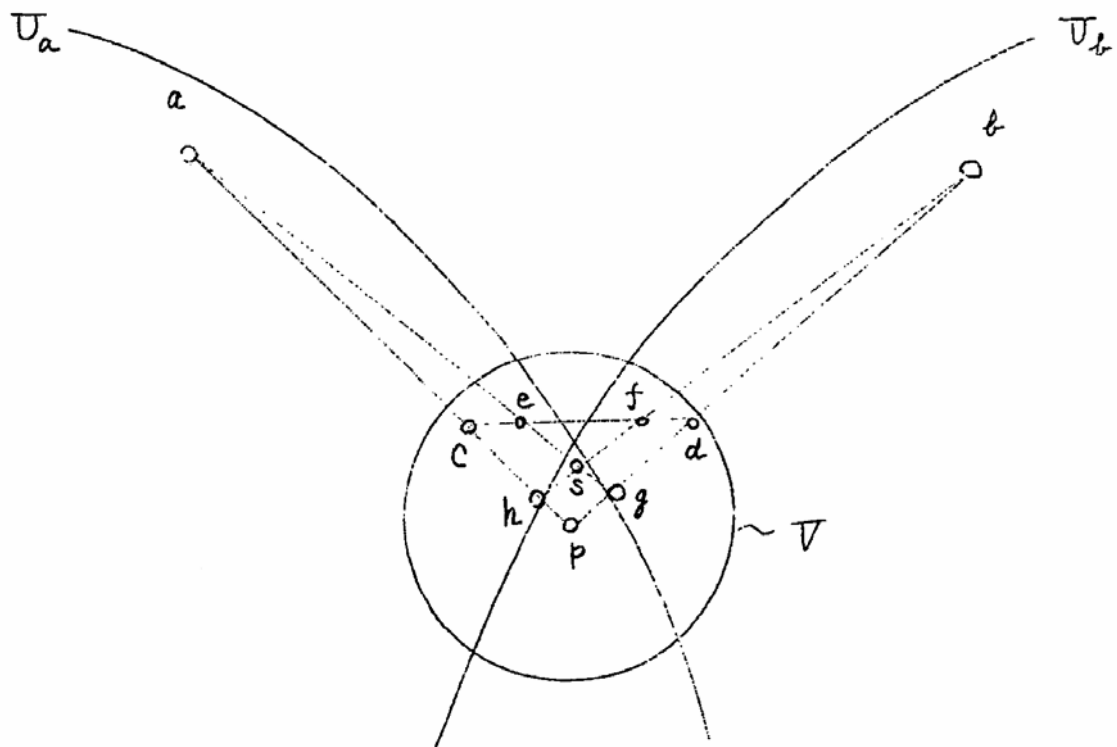
通ジター番  $p(I)$  ノ小サイ橋ヲ  $a, b$  ヲ結ブ 徑橋 ト呼  
ビマス。

任意ノ二点  $a, b$  ヲ結ブ線分ガ  $H = \text{ハルトイフ代リ}$ ニ、  
徑橋ガ  $H = \text{入ッテオルクトハ明ナ}$ デ、次ノ補助定理ヲ証  
明シマス。

補助定理 経テノ徑橋ハ線分デアール。

### 3

コレヲ脚ノ數ニヨル帰納法デ証明シマス。脚ノ數ガ  
0デハ無意味ナデ、徑橋  $I$  ガ  $[a, p, b]$  トイツ型ノモノガ  
ツクトシマス。  $p \in H$  デスカラ  $p = \text{於ケル}$  アル開球  $\nabla$  ヲ取  
ルト  $\nabla \cap H$  ガ凸ニナルモノガアル筈デス。ソコデ線分  $(a,$   
 $p)$  ト  $(p, b)$  ノ上ニ点  $d$  トヲ撰ンデ  $c \in \nabla \cap U_a$ <sup>4)</sup>,  $d \in$   
 $\nabla \cap U_b$  トスル事ハ勿論出来マス。(ソノ辺ハ圖ヲ見テ下サイ)



局所凸トイフノヲ使へバ  $(c, d)$  ハ  $\nabla$  ノ中ニ入ル以上ス  
 $H$  ノ中ニ入ッテ来マス。ソコデ次ニ  $(c, d)$  ノ上ニ  $U_a \cap V$ ,  
 $U_b \cap V$  ニ属スル  $e, f$  ヲ取リ,  $a$  ト  $e$ ,  $b$  ト  $f$  ヲ結ンデ延  
シ, 交点ヲ  $s$  トシ,  $(t, b)$ ,  $(a, t)$  トノ名ニノ交点ヲ  $g$ ,  
 $h$  トシマス。  $e$  ト  $g$  トハ  $\nabla$  ノ中ニアル以上局所凸ノ假定デ  
 $(e, g) \subseteq H$ , 同様ニ  $(f, h) \subseteq H$  ヲ得マス。

ソコデ以上ヲ組ミ合セレバ  $(a, s)$  ト  $(s, b)$  ハ  $H$  ニ属  
スルコトニ成リマス。所デ  $[a, s, b]$  トイフ線分ノ和ヲ長  
サヲ延サナイ様ニシテ橋ニ変へ, (出来ル事ハ明デス)。ソノ  
橋ヲ  $J$  トシマス。

今初メノ橋  $I$  が直線デナイトスレバ嫌デモ  $S$  ハ  $p$   
トハ変ッテ来マスノデ, *strictly convexity* ヨリ  
 $\rho(J) < \rho(I)$   
ヲ得マス。コレハ假定ニ反シマス。

#### 4

コレカラハ樂デ  $m-1$  迄定理カ成立ツタトシテ,  $I =$   
 $[a, p_1, \dots, p_m, b]$  が  $m$  個ノ脚ヲ持ッ經橋ガトスル  
ト,  $[a, p_1, \dots, p_m]$  ト  $[p_1, p_2, \dots, b]$  トハ又ハリ  
經橋ニ成リマスカラ, 帰納法ノ假定デ線分ニナルノデ,  $I$   
モ亦線分ニ成ッテシマヒマス。

#### 4) 前頁脚註

$U_a$  トハ  $a$  ノ入ッテアル開球トイフ意味デス。  $U_a$  ハ初メノ  
被覆ノ中カラ取リマス。

コレヲ証明ハ終ツタノデスガ、誤リガオ判リニナラ  
方ハ眞ニ恐レ入リマスガ僕迄御一報下サイマセンデセウ  
カ？

新年早々世迷事ヲオ聞キニナッテサゾ御迷惑デセ  
ウガ。