Title	Eulerノ弾道分弧計算ニ於ケル誤差
Author(s)	渡辺, 次雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 231, p. 768-773
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74933
rights	
Note	

1003. Eulerノ弾道分弧計算ニ於ケル誤差

渡辺　次　雄（満洲國陸軍軍官学校）

原点ヲ砲口ニ，射面ヲ xy 平面ニトリ x, y 軸ヲ夫々水平及ビ鉛直方向ニトレバ弾道方程式ハ次ノ式デ與ヘラレル。

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = -cf(v)\cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\[2ex] \dfrac{dv_y}{dt} = -cf(v)\sin\theta - g \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

但シ空氣抵抗ハ弾丸ノ速度ニノミ関係スルモノト假定スル。又 θ ハ弾道上ノ一点 (x, y) ニ於ケル弾道切線ノ傾斜角デアル。

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{dv_x}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt}=-\frac{g\cos\theta}{v}\,\frac{dv_x}{d\theta}$$

コレヲ (1) ニ代入シテ

$$g\frac{dv_x}{d\theta}=v\cdot cf(v)$$

特ニ $f(v)=v^2$ ナルトキハ

$$g\,d(v\cos\theta)=cv^3=c(v\cos\theta)^3\frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

$$(v_x=v\cos\theta)$$

$$\therefore\quad \frac{d(v\cos\theta)}{(v\cos\theta)^3}=\frac{c}{g}\,\frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

積分シテ

$$\frac{1}{(v\cos\theta)^2}=-\frac{2c}{g}\int\frac{d\theta}{\cos^3\theta}+\mathrm{Int\text{-}Konst}$$

而ルニ

$$\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\cos^3\theta}=\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}+\frac{1}{2}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

コレヲ $\xi(\theta)$ デ表ハセバ

$$\frac{1}{(v\cos\theta)^2}=-\frac{2c}{g}\xi(\theta)+\mathrm{Konst.}$$

コノ常数ヲ $\frac{2c}{g}$ C トカケバ $C=\frac{g}{2c\,v_s^2}$ (v_s ハ弾道頂点ニ於ケル速度)

$$\therefore\quad \frac{1}{(v\cos\theta)^2}=\frac{2c}{g}(C-\xi(\theta))$$

$$\therefore \quad v^2 = \frac{g}{2c}\,\frac{1}{\cos^2\theta\,(C-\xi(\theta))}$$

而ルニ $\quad g\,ds = -v^2\dfrac{d\theta}{\cos\theta}$

$$\therefore \quad 2c\,ds = -\frac{d\theta}{\cos^3\theta\,(C-\xi(\theta))}$$

$\dfrac{d\xi}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^3\theta}$ ナルコトヲ用ヒテ変形スレバ

$$2c\,dS = -\frac{d\xi}{C-\xi(\theta)} = +\frac{d(C-\xi(\theta))}{C-\xi(\theta)}$$

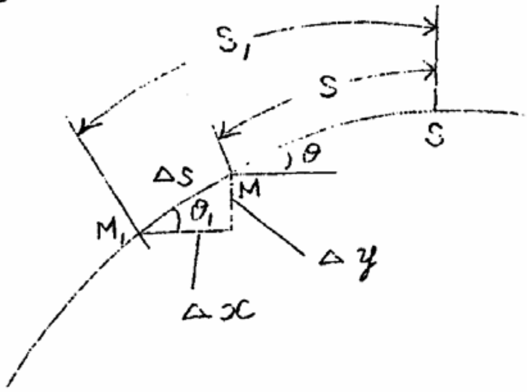
$$\therefore \quad 2cS = \log(C-\xi(\theta)) + k\ (\text{Int-Konst.})$$

弧Sヲ弾道ノ頂点カラ測ルコトニスレバ

$$k = -\log C \quad (\because\ s=0\ \text{ノトキ}\ \theta=0)$$

$$\therefore \quad S = \frac{1}{2c}\log\frac{C-\xi(\theta)}{C}$$

故ニ圖ニ於テ



$$SM = S = \frac{1}{2c}\log\frac{C-\xi(\theta)}{C},$$

$$SM_1 = S_1$$

$$= \frac{1}{2c}\log\frac{C-\xi(\theta_1)}{C}$$

$$\therefore \quad \overset{\frown}{MM_1} = \Delta S = \frac{1}{2c}\log\frac{C-\xi(\theta_1)}{C-\xi(\theta)}$$

今 $\quad \Delta x = \dfrac{1}{2c}\log\dfrac{C-\xi(\theta_1)}{C-\xi(\theta)}\cos\dfrac{\theta+\theta_1}{2}$

$$\Delta y=\frac{1}{2C}\log\frac{C-\xi(\theta_1)}{C-\xi(\theta)}\sin\frac{\theta+\theta_1}{2}$$

ナル近似式ヲトルトx, y ハ次ノ式デ計算サレル。

$$x=\sum\Delta x=\frac{1}{2C}\sum\log\frac{C-\xi(\theta_1)}{C-\xi(\theta)}\cos\frac{\theta+\theta_1}{2}$$

$$y=\sum\Delta y=\frac{1}{2C}\sum\log\frac{C-\xi(\theta_1)}{C-\xi(\theta)}\sin\frac{\theta+\theta_1}{2}$$

コレハ1753年L. Euler ニヨッテ與ヘラレタ(Berl. Ber. 1753, S. 348)

本談話ハコノ分派計算ノ誤差評価式ヲ求メタイ。

明ラカニ

$$\cos\theta_1<\cos\frac{\theta+\theta_1}{2}<\cos\theta$$

$$\therefore\ \sum\log\frac{C-\xi(\theta_1)}{C-\xi(\theta)}\cos\theta_1<2Cx$$

$$<\sum\log\frac{C-\xi(\theta_1)}{C-\xi(\theta)}\cos\theta$$

故ニ全弾道ニツイテ $2Cx$ ノ計算カラ生ズル誤差ヲ $2C\varepsilon$ トスレバ

$$2C\varepsilon=\sum\log\frac{C-\xi(\theta_1)}{C-\xi(\theta)}\cos\theta-\sum\log\frac{C-\xi(\theta_1)}{C-\xi(\theta)}\cos\theta_1$$

$$=\sum\log\frac{C-\xi(\theta_1)}{C-\xi(\theta)}\cdot 2\sin\frac{\theta+\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta}{2}$$

落角ヲ ω $(<\frac{\pi}{2})$ トスレバ落角ハ射角ヨリ大ナルコトヨリ

$$< \sum \log \frac{C-\xi(\theta_1)}{C-\xi(\theta)} \cdot 2\sin\omega \sin\frac{\Delta\theta}{2}$$

故ニ弾道曲線ノ長サヲSトスレバ

$$2C\varepsilon < 2CS \cdot 2\sin\omega \cdot \sin\frac{\Delta\theta}{2}$$

$$= 4C\sin\omega\sin\frac{\Delta\theta}{2} \cdot S$$

同ジ射角α，同ジ初速v_0ノ眞空弾道ノ長サヲS'トスレバ$S' > S$。

且ツ $$S' = \frac{2v_0^2}{g}\cos^2\alpha \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \frac{2v_0^2}{g}\cos^2\alpha \cdot \xi(\alpha)$$

$$\therefore \quad \boxed{2C\varepsilon < \frac{8Cv_0^2}{g} \cdot \sin\omega \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin\frac{\Delta\theta}{2}\xi(\alpha)}$$

例 $\alpha = 40°$, $\omega = 47°11.3'$, $\frac{Cv_0^2}{g} = 0.517$ ノトキハ $2CX = 0.75$

上ノ不等式ノ右辺ヲ計算スルト約 $1.668\sin\frac{\Delta\theta}{2}$ トナル。故ニ$\Delta\theta = 20'$ニトルト

$$2C\varepsilon < 0.0049$$

トナル。Cハ弾道係数ト称スルモノデ0.010乃至0.000007ノ値ヲトル。今$C = 0.0001$トスレバ，射程ハ約$3750m$。誤差ハ$49m$ヨリ小トナル。」

同様ニ$2Cy$ノ誤差評價式モ計算出来ル。

$$\boxed{2C\varepsilon < \frac{8Cv_0^2}{g}\cos^2\alpha\sin\frac{\Delta\theta}{2}\xi(\alpha)}$$

トナル。