



Title	Kantorovitch ノ B2 空間ニツイテ
Author(s)	小笠原, 藤次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 231, p. 773-777
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74934
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1004 Kantorovitch / B_2 空間 = ツイテ

小笠原 藤次郎(廣文理大)

Banach 空間論ノ立場カラ B_2 空間 (Kantorovitch, *Recueil Math* 2 (1937) 121-168) = ツイテ簡單 + 考察ヲ加ヘヌ。

§1. Banach lattice トソノ共軛空間.

E ハ vector lattice デ norm が定義サレ之レ = ヨツテ normed space ヲ作り $|x| \leq |y|$ ノトキ $\|x\| \leq \|y\|$ が成立スルモノトスル。

E カ norm = ヨツテ完備ノトキハ Banach lattice ト呼ブコト = スル。 E ノ共軛空間 $\bar{E}$ ハ任意ノ $x \in E$ = 對シ $\phi = f(x) \geq 0$ トナル $f \in \bar{E}$ ヲ $f \geq 0$ ト定メルコト = ヨリ $\bar{E}$ ハ complete vector lattice トナルコト, 又 $\|f\| = \| |f| \| = \text{l.u.b.} (|f(x)|; \|x\| \leq 1, 0 \leq x \in E)$ が容易ニ確メラレルカラ $\bar{E}$ ハ Banach lattice デアルコトガ分ル。 E ト $\bar{E}$ ノ關係ヲ双對的立場カラ觀察スルメ $\bar{\bar{E}}$ ヲ考ヘル。任意ノ $f \geq 0$ = 對シ $f(x) \geq 0$ ノトキ $x \geq 0$ ナルコト $f(x_+) = \text{l.u.b.} (f(x); 0 \leq x' \leq x)$ ヲ確メルコ

E は $\bar{E}$ の中 $=$ Banach 空間トシテ又 vector lattice トシテ埋藏サレルコトガ分ル。

従ッテ E は vector lattice トシテ complete + Banach lattice $=$ 埋藏サレル。コノコトカラモ E の norm $=$ ヨル完備化ハ Banach lattice + レコトガ知ラレル。 E の可附番部分集合ヲ考ヘコレヲ含ム最小ノ E の vector sub-lattice ヲ考ヘ norm $=$ ヨル完備化ヲ行ヘバ可分 + Banach lattice ガ得ラレル。コレモ容易ニ分ルコトノ思フ。

E ト $\bar{E}$ の norm ノ関係ヲ見ルタメ $x = E$ 於テ $x > 0$, $y > 0$, $x \wedge y = 0$ ノトキ $\|x+y\| = \{\|x\|^p + \|y\|^p\}^{1/p}$, $1 \leq p \leq +\infty$ ($p = +\infty$ ノトキコノ式ノ右辺ハ $\max(\|x\|, \|y\|)$ ヲ表スモノトスル) ナル関係ガ成立スル場合ヲ考ヘテ見ル。且ツ E ガ Banach lattice ノトキ抽象 L_p 空間ト嚙ブコトニスル。 $\bar{E}$ ハ抽象 L_q 空間トナルコトガ証明出来ル。茲ニ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ニヨッテ定フル数デアアル。コレニハ $f > 0$, $g > 0$, $f \wedge g = 0$ ノトキ $\|f+g\| = l.u.b. (f(x) + g(y); 0 \leq x, y \in E, x \wedge y = 0, \|x+y\| \leq 1)$ ヲ証明スルコトガ必要ナル。又 $1 < p < +\infty$ ノトキ spectral 分解ノ式カラ E ハ uniformly convex ナルコトガ知ラレル。

§2. Kantorovitch ノ意味デ regular + Banach lattice.

E ヲ Banach lattice トシテ Banach ノ本ノ意味デ weakly complete トスル (コノ要求ハ以下ノ

議論カラ分ルト思フ).

次ノニツノ性質が成立スル。(α) $x_n \downarrow 0$ ノトキ
 $\|x_n\| \rightarrow 0$ (β) $0 \leq x_n \leq x_{n+1}$, $\|x_n\|$ が有界ノトキ
 $\bigvee x_n$ が存在スル。

(α) ハ $\bar{E}$ ノ單位球ノ内 $f \geq 0$ ナル要素全体ハ E ノ要素ニ
ヨル弱収斂性ニヨリ *bicompact* トナルコト及ビ x_n が 0
ニ弱収斂スルコトヨリ (β) ハ $\{x_n\}$ ノ弱収斂極限が $\bigvee x_n$
トナルコトカラ証明出来ル。(β) カラ E ハ σ -complete
vector lattice ナルコトが知ラレル。今條件 (γ) ラ
ロクニ示シノトキ $\|x\| < \|y\|$ ト定義スル。

定義 (α), (β), (γ) が成立スル Banach lattice
ヲ B_2 空間 (Kantorovitch: 上掲論文, 153 頁) ト
イフ。

B_2 空間ハ Kantorovitch ノ意味デ regular (同上,
138) デアルコトが知ラレテアル。

定義. Kantorovitch ノ意味デ regular + (α), (β)
ノ成立スル Banach lattice ヲ K_2 空間トイフ。

(Kantorovitch-Vulich, Compositio
Math. 5 (1957) 119-165).

ノ定義ヲ思ヒ出テトラバ次ノ定理が得ラレル。

定理 1. 可分 (Banach 空間トシテ) ノ Banach
lattice E が (α), (β) ラ満足スルトキ E ハ K_2 空間
デアアル。

(証) (β) カラ E ハ σ -complete, E ノ可分カラ E

は complete vector lattice トナル。 (0)-収斂ト complex norm デノ (k)-収斂, (t)-収斂ト norm =ヨル (b)-収斂トノ一致ヲ証明シテ regularity ノニツノ條件 (Kantorovitch, 上掲, 138) ヲ確認メレバヨイ。

定理2. 可分 + Banach lattice E が weakly complete ノトキ E ハ $\bar{k}_2$ 空間デアアル。

(証) 本節ノ所論カラ (α), (β) が成立スル。従ッテ定理1カラ E ハ $\bar{k}_2$ 空間。

定理3. Banach lattice E が weakly complete 且ツ (γ) が成立スルトキ E ハ B_2 空間デアアル。

(証) (α), (β), (γ) が成立スルカラ。

系. weakly complete + 抽象 L , 空間ハ B_2 空間デアアル。

(証) (γ) ノ成立が証明出来ルカラ。

定理4. Banach 空間トシテ regular + Banach lattice E ハ可分ノトキ $\bar{k}_2$ 空間デアアル。

(証) E ハ weakly complete トナルカラ定理2カラ。

定理5. Banach 空間トシテ regular + Banach lattice E =於テ (γ) が成立スルトキ E ハ B_2 空間デアアル。

(証) E ハ weakly complete トナルカラ定理

3 カラ。

定理6. *uniformly convex* + Banach lattice
 E は B_2 空間デアル。

(証) 角谷氏ノ他ノ研究ニヨツテ E は *regular* +
Banach 空間。(7)ノ成立ハ自明, 従ツテ定理5カ
ラ。

系. 抽象 L_p 空間 $1 < p < +\infty$ は B_2 空間デアル。

(証) §1ノ所論ニヨリ L_p は *uniformly convex*
+ Banach lattice トナルカラ。

定理7. 定理4ノ条件“可分”ハイラナイ。

証. E ノ任意ノ部分集合 A ヲ考ヘルトキ $\forall A$ が A ノ
高々可附番部分集合, *l. u. b.* トルコトヲ示セバ充分。

A が (0)-有界ノトキ A ノ高々可附番部分集合, *l. u. b.*ノ
集合 $\{x_\alpha\}$ ヲ考ヘスベテノ第一級, 第二級ノ順序数ニツイ
テ $\alpha < \beta$ ノトキ $x_\alpha < x_\beta$ トナルコトガ矛盾スルコトヲ示セ
バヨイ。コレハコノ §ノ始めニ述ベタ考ヘ方ニヨツテ容易
ニ示セル。