



Title	東ノ中心
Author(s)	前田, 文友
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 232, p. 788-796
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74937
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1007. 束ノ中心

前田 文友 (廣島文理大)

私ハ前著 *Relative Dimensionality in Operator Rings* (廣島文理大紀要第11卷(1941), 1-6頁)ニ於テ,
Hilbert空間ニ於ケル operator ring = 含マレタマラ
エル projectionノ作ル束ニ於ケル, J. v. Neumann
ノ可約ナル連続幾何學 (一般ニハ complemented modular lattice)ノ場合ト同ジク, 次ノ四ツノ命題ガ equivalent
デアアルコトヲ証明シタ。今 a ヲ束 L ノ要素トスル。

(a) a ハ L ノ中心ニ属スル。

(b) a ハ neutral element デアル。

(c) a ハ complement a' ヲ有シ, (a, a') D デアル。

(d) a ハ unique complement a' ヲ有スル。

コノデ, L ノ中心トハ Birkhoff, *Lattice theory* P.23
ニ定義シテアルガ如ク, L ヲ δT ノ如ク束ノ積トシテアラハ
ストキ $[1, 0]$ トシテアラハサレル L ノ要素ノ全体デアアル。
コレハ L ガ一般ノ束ノ場合ノ中心ノ定義デアアルガ, 特ニ L
ガ modular デアル場合ニハ J. v. Neumannノ連続
幾何學ノ講義 I. 39頁ノ如ク, L ヲ $L(0, a)$ ト $L(0, b)$
トノ直和 ($L = L(0, a) \oplus L(0, b)$) デアラハシ得ルカ如キ
要素 a ノ全体トナル。

次ニ a ガ L ノ neutral element デアルトハ, a ト
 L ノ任意ノニ要素 x, y トガ L ノ distributive sublattice

ヲ生成スル，即チ a ト任意ノ x, y トハアライル形ノ配分ノ式ヲ満足スルコトデアル。

コレハ Birkhoff, *Neutral Elements in General Lattices*, Bull. A. M. S. 46 (1940), 702ニアル定義デアル。連続幾何學ノ講義40頁ノ(a)Dニ相當スル。

$(a, b)D$ トハ， L ノ任意ノ要素 x ニ對シテ $x \wedge (a \vee b) = (x \wedge a) \vee (x \wedge b)$ が成立スルコトデアル。 L ガ modular デアル場合ハ連続幾何學講義 I, 38頁 Theorem 5.1カラ，上ノ式ニ於テ a, b ノ位置ハドユデモヨイノデアルガ，一般ノ latticeノ場合ハ a, b ハ上ノ如キ位置ニアルモノトスル。

(2) — (5)ノ四命題ガ equivalent デアルコトハ連続幾何學ノ場合ハ講義40頁 Theorem 5.2, Theorem 5.3ノ如ク modularity ヲ用ヒテ証明シテ居ル。Operator ringノ場合ハ必ずモ modular トハ云ヘナイカラ，operator ト云フ具体的ノ性質ヲ用ヒテ居ル。コレデハ，コノ兩者ヲ包含スルガ如キ一般ノ束ノ場合ノ定理ヲ求ムル。

コレニハ Wilcox, *Modularity in the theory of Lattices*, Annals of Math. 40 (1939), 494ニ導入サレタ次ノ概念ヲ用ヒル。如何ナル $C \leq a$ ニ對シテモ $(b \vee C) \wedge a = (b \wedge a) \vee C$ が成立スルトキ $(b, a)M$ トカク。 $a \wedge b = 0$ ニシテ $(b, a)M$, $(a, b)M$ ガ同時ニ成立スルトキハ $(a, b) \perp$ トカク。(コレハ affine geometryニ於テハ a ト b トが交ラズシカモ平行デナイコトヲ意味シ

ヲ居ル)

補助定理1 次ノ三ツノ命題ハ equivalent テアル。

$$(1^\circ) \quad (a, b) \perp_\Delta$$

$$(2^\circ) \quad a \wedge b = 0 = \text{シテ}, x \leq a, y \leq b \text{ ナル任意ノ } x,$$

y = 対シテ

$$a \wedge (x \vee y) = x, \quad b \wedge (x \vee y) = y \quad (1)$$

$$(証) \quad (1^\circ) \rightarrow (2^\circ) \quad x \leq a, (b, a) M \text{ テアルカラ}$$

$$x \leq a \wedge (x \vee y) \leq a \wedge (x \vee b) = x$$

$$\text{故ニ} \quad a \wedge (x \vee y) = x \quad \text{同様ニ} \quad b \wedge (x \vee y) = y \text{ テ}$$

アル。

$$(2^\circ) \rightarrow (1^\circ) \quad (1) \text{ノ第一式ニ於テ } y = b \text{ トオケバ}$$

$$a \wedge (x \vee b) = x \quad \text{即チ } (b, a) M$$

$$\text{同様ニ} \quad (a, b) M$$

定理1 束 L が 0 及び 1 ヲ有スルトキ、次ノ三ツノ命題ハ equivalent テアル。

$$(\alpha) \quad a \wedge L \text{ ノ中心ニ属スル。}$$

$$(\beta) \quad a \wedge \text{neutral} = \text{シテ complement } a' \text{ ヲ有スル。}$$

$$(\gamma) \quad a \wedge \text{complement } a' \text{ ヲ有シ, } (a, a') D, (a, a') \perp_\Delta \text{ テアル。}^{(1)}$$

$$(証) \quad (i) \quad (\alpha) \rightarrow (\beta) \quad L = ST \text{ トアラハストキハ,}$$

(1) $(\alpha) \text{ ト } (\beta) \text{ トガ equivalent テアルコトハ, 上記 Birkhoff, 論文 105 頁 Theorem 6 = 証明シテアル。}$

$a = [1, 0]$ デアルカラ a の complement $a' = [0, 1]$ 有スル。 $[1, 0]$ が ST の neutral element ナルコトハ、 $1, 0$ が夫々 S, T の neutral element デアルコトカラ容易ニ検証シ得ル。

$$\begin{aligned} \text{例ハバ } [1, 0] \wedge ([x, y] \vee [u, w]) &= [1, 0] \wedge [x \vee u, y \vee w] \\ &= [1 \wedge (x \vee u), 0 \wedge (y \vee w)] \\ &= [(1 \wedge x) \vee (1 \wedge u), (0 \wedge y) \vee (0 \wedge w)] \\ &= [1 \wedge x, 0 \wedge y] \vee [1 \wedge u, 0 \wedge w] \\ &= ([1, 0] \wedge [x, y]) \vee ([1, 0] \wedge [u, w]). \end{aligned}$$

(ii) $(\beta) \rightarrow (\gamma)$ a の neutral デアルカラ, $(a, a') \in D$, $(a, a') \in M$, $(a', a) \in M$ が成立スル。

(iii) $(\gamma) \rightarrow (\delta)$ $S = (\delta; \delta \leq a)$, $T = (t; t \leq a')$ トオキ, $L = ST$ ナルコトヲ証明スル。

任意ノ $x \in L$ ニ對シテ $x \rightarrow [x \wedge a, x \wedge a']$ ナル對應ヲ考ヘレバ, $[x \wedge a, x \wedge a'] \in ST$ デアル。逆ニ $[\delta, t]$ ヲ ST ノ任意ノ要素トスル。

$x = \delta \vee t$ トオクトキハ, 補助定理1カラ $x \wedge a = (\delta \vee t) \wedge a = \delta$ 。同様ニ $x \wedge a' = t$ 。即チ $x \in [\delta, t]$ ノ原像デアル。

而シテ $[x \wedge a, x \wedge a'] = [y \wedge a, y \wedge a']$ ナルトキハ

$x \wedge a = y \wedge a$, $x \wedge a' = y \wedge a'$, $(a, a') \in D$ ナレバ

$$x = x \wedge (a \vee a') = (x \wedge a) \vee (x \wedge a')$$

$$= (y \wedge a) \vee (y \wedge a') = y \wedge (a \vee a') = y$$

故ニ $x \rightarrow [x \wedge a, x \wedge a'] = \exists$ リテ L ト ST トハ一對一ノ對應ヲナス。コノ對應ハ明カラ order ヲ度ヘナイ。故ニ

L と ST とは isomorph デアル。シカシ $a \rightarrow [1, 0]$ デアルカラ、 a は L の center = 属スル。

次 L = relatively complemented ナル條件ヲ
 與ヘル。即チ $a \leq x \leq b$ ナルトキハ、 $x \vee y = b$, $x \wedge y = a$
 ヲ満足スル。之ノ relative complement y が存在
 スルト假定スル。

補助定理 2. L ヲ relatively complemented
 lattice トスル。 $a \wedge x = 0$ ナルトキハ、 $x \leq a'$ ナルが如
 キ a の complement a' が存在スル。⁽¹⁾

$$(a) \quad (a \vee x) \vee y = 1, \quad (a \vee x) \wedge y = x \quad (1)$$

ヲ満足スル y ヲトル。 (1) の第一式カラ $y \geq x$ デアル。故ニ (1)
 の第一式ハ $a \vee y = 1$ トナル。又 (1) の第二式ヨリ
 $a \wedge y = a \wedge (a \vee x) \wedge y = a \wedge x = 0$ 。故ニ y が求ムル
 a' デアル。

定理 2. L ヲ $1, 0$ ヲ有スル relatively complemen-
 ted lattice トスルベ、次ノ四ツノ命題ハ equivalent
 デアル。

(a) a は L の center = 属スル。

(1) コノ dual モ成立スル。 a' が relative complement 1 場
 合ニモ拡張出来ル。 V. Heumann 連続幾何學ノ講義 I, 7
 頁ニ於テハ、 L が complemented modular lattice 1
 場合ヲ証明シテ居ル。シカシ上ノ如ク modular デナク
 トモ成立スル。

(β) a は neutral element デアル。

(γ) a の complement a' = 對シ, $(a, a') \perp_\Delta$ が成立スル。

(δ) a は unique complement a' ヲ有シ $(a, a') \perp_\Delta$ デアル。

(証) complement の存在ハ假定シテ居ルカラ, 定理1カラ (α), (β), (γ) は equivalent デアル。

(α) $\rightarrow$ (δ) ヲ証明シヨウ。

$[1, 0] \vee [x, y] = [1, 1], [1, 0] \wedge [x, y] = [0, 0]$ が成立スルノハ $x=0, y=1$ ノトキ及ビソノトキ=限ル。故
= $a = [1, 0]$ へ unique complement $a' = [0, 1]$ ヲ有
スル。 $(a, a') \perp_\Delta$ ハ (γ) カラ出ル。

次 = (δ) $\rightarrow$ (α) ヲ証明シヨウ。任意ノ $x \in L$ ヲトリ,
 $u = a \wedge x$ トオク。 $u \vee v = x, u \wedge v = 0$ ナル v ヲトリ,
シカルトキハ $a \wedge v = a \wedge v \wedge x = u \wedge v = 0$ 。

a へ unique complement a' ヲ有スルカラ 補助定理2
ヲ $v \leq a'$ デアル。

$u \leq a, v \leq a' =$ シテ $(a, a') \perp_\Delta$ デアルカラ, 補助
定理1カラ $a' \wedge x = a' \wedge (u \vee v) = v$

故 = $x \wedge (a \vee a') = x = u \vee v = (x \wedge a) \vee (x \wedge a')$

即チ $(a, a') \perp_\Delta$ デアル。(証明終)

定理2が, 始メニ述ベタ complemented modular
lattice 1 場合ト operator ring 1 場合, 両者ヲ包
含スル所ノ求ムル定理デアル。コノコトハ complemented

modular lattice / 場合ハ明ラカデアル。ナントナレ
 ベコノトキハ relatively complemented デアリ,
 modularity カラ $(a, a') \perp_\Delta$ ハ常ニ成立スルカラ, (γ)
 $(\delta) =$ 於テ $(a, a') \perp_\Delta$ ハ不要デアル。

次ニ operator ring / 場合ヲ考ヘル。Mヲ
 Hilbert空間ニ於テ1ヲ含ム operator ring トシ, M
 ニ属スル projection / 全体ヲ Eニテアラハス。E, F ∈ E
 ナルトキ, $E \leq F$ ナ E F = F E = E ニコツテ定義スルトキ
 E ハ束ヲナシテ居ル。E F = 0 或ハ F E = 0 / トキハ
 $E \vee F = E + F$ デアリ, $E F = F E$ / トキハ $E \wedge F = E F$ デ
 アル。

先ヅ E ガ relatively complemented ナルコ
 トヲ示ス。 $G \leq E \leq F$, E, F, G ハ互ニ可換デアルカラ
 $E_1 = (F - E) \vee G = (F - E) + G$ トオケバ, E ト E_1 トモ可
 換デアル。故ニ

$$E \vee F_1 = E \vee (F - E) \vee G = E \vee (F - E) = F,$$

$$E \wedge E_1 = E E_1 = E \{ (F - E) + G \} = E G = G$$

故ニ E_1 ガ E / relative complement デアル。

従ツテ定理2ガ適用出来ル。コノトキニ $(\gamma) =$ 於テ
 $(E, E') \perp_\Delta$ ハ必要デアルコトヲ示サウ。 $(E, E') \perp$ デア
 ルカラ

$$\begin{aligned} 1 - E &= (1 - E) \wedge (E \vee E') = \{ (1 - E) \wedge E \} \vee \{ (1 - E) \wedge E' \} \\ &= (1 - E) \wedge E' \end{aligned}$$

即チ $1 - E \leq E'$ 従ツテ $(1 - E) E' = E' (1 - E) = 1 - E$ 。

即ち $EE' = E'E$ 故に $EE' = E \wedge E' = 0$

然るに $E' = 1 - E$ デアル。今 $H \leq E$ トスルトキハ、 E, H, E' ハ互に可換デアル。 $HE' = 0$ デアルカラ

$$E \wedge (H \vee E') = E(H + E') = EH = H.$$

故に $(E', E) M$. 同様 $(E', E) M$. 故に $(E, E') \perp_\Delta$ デアル。

又 $(\delta) =$ 於て $(E, E') \perp_\Delta$ ハ不要デアル。ソレハ E ハ *unique complement* E' ヲ有スルノデアルカラ $E' = 1 - E$ デアルベキデアル。故に上述ノ如ク $(E, E') \perp_\Delta$ デアル。

カクノ如クシテ定理2カラ *operator ring* ノ場合ノ定理が出テ来ル。

以上デ我々ノ目的ハ達セラレタノデアルガ、定理2ニ関聯シテ次ノコトガ云ヘル。亦ノ中心ハ *Boole* 代数ヲ作ルカラ⁽¹⁾ 定理2カラ直ニ次ノ定理が成立スル。

定理3 $0, 1$ ヲ有スル *relatively complemented lattice* L が *Boole* 代数デアルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ、 L ノ任意ノ要素 a ハ唯一ツノ *complement* a' ヲ有シ、 $(a, a') \perp_\Delta$ が成立スルコトデアル。

コノ定理ハ *complement* ノ單一性カラ *Boole* 代数ガ云ヘル一ツノ場合ヲ示シテ居ル。Birkhoff / 本94頁 = *complement* ノ單一性ノミカラ *Boole* 代数ガ云ヘルカドウカハ未解決ノ問題デアルトナシ、次ノ三ツノ場

(1) Birkhoff / 論文, 705頁 Theorem 5.

合 = ハ ソレガ云ヘルコトヲ述ベテ居ル。

(1°) L が modular ナルトキ,

(2°) $a \rightarrow a'$ が dual automorphism ナルトキ,

(3°) L が complete atomic lattice ナルトキ.

定理 3 ハ (1°) ノ場合ヲ更ニ一般化シタモノデアアル。

尚定理 3 ニ於テ, complement ノ唯一性ヲ除ケバ,
次ノ定理が成立スル。

定理 4. $O, 1$ ヲ有スル relatively complemented lattice L が modular デアルタメノ必要且ツ
充分ナル条件ハ, 任意ノ要素 a トソノ complement a' ト
ノ間 $= (a, a') \perp_a$ が成立スルコトデアアル。

(証) 必要ナルコトハ明ラカデアアル。充分ナルコトヲ証明
スルタメニ, $c \leq a$ ナルトキ $(b \vee c) \wedge a = (b \wedge a) \vee c$
が成立スルコトヲ証明シヨウ。 $(a \wedge b) \vee c = b,$
 $(a \wedge b) \wedge c = 0$ ナル c ヲトレバ, $c \leq b$ デアルカラ $a \wedge c = 0$.
故ニ補助定理 2 ヨリ $c \leq a'$ ナル a ノ complement a' が
存在スル。 $(a \wedge b) \vee c \leq a$ ニシテ $(a, a') \perp_a$ デアルカラ
補助定理 1 カラ $(b \vee c) \wedge a = [(a \wedge b) \vee c \vee c] \wedge a = (a \wedge b) \vee c$
デイル。

(終)