



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | 整域 及ビ べくとる束ニ関スルKrullノ豫想ニツイテ<br>I                                            |
| Author(s)    | 中山, 正                                                                       |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1942, 232, p. 804-811                                            |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/74942">https://doi.org/10.18910/74942</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1012. 整域及びベクトル束 = 関スル

Krull, 豫想 = ツイテ I

中山 正 (阪大)

Krull, 「vollständig ganz-abgeschlossen + 整域ハ常 = speziell + (即チ普通, 実数  
1値ヲトル) 賦値, Bewertungsringe, durch-

schnitt = ナルデアラウ」コトヲ予知シテ居マス。

(Crelle 167 (1932), P. 110 及び Math. Zeitschr. 41 (1936) P. 666; Loevenzen, Math. Zeitschr. 45 (1935) §5 ヲ参照)。ソノ束群的或ヒハベクヒ自束的解釈 (幾分強い主張トシテ) 「おもひよりの束群 (或ヒハベクヒ自束) ハ (有限) 実数値函数ヲ同型ニ表現サレルデアラウ」コトガ問題ニサレヲキル。(上記 Loevenzen 及び Clifford, Ann. Math. 41 (1940) / 最後ヲ参照)

処ガ、コノ束群的解釈ノ方ハ 否定的 = 解決サレル様ニ思フ。即チ反例ガ興ハラレルマウニ思フ。整域ノ方ニツイテモ大体反例ガ興ハラレテ否定的ニ答ハラレルマウニ思フノデスガ、未ダ充分吟味シテポイントガアリマスデ、ソレニツイテハ第 II デ述ベルコトニシテ今ハ束群ニ限ルコトニシマス。

反例ハ前々号 - 前田、小笠原氏ノベクヒ自束ニツイテノ興味フル談話が出マシタガ、ソノ第ニノモノ、小笠原氏ノ談話 999 = オケル結果<sup>(1)</sup>ヲ使フノデアリマス。ソノ小笠原氏ノ構成ノ中ニ「sehr tief zu liegen」+ コトガアルデセウ」トハ勿論デスガ、ソレニシテモ「working on this problem for the past year, with

---

(1) 吉田サンモ曾テソレト非常ニ近いコトヲワッテ居ラレタ。ピタゴラス環ノトキニ。

no success whatever」サレタ問題が以下ノ様ニ  
割ニ簡單<sup>(2)</sup>ニ否定サレルノハ少々変バアリ、マク小生ノ全ク  
不案内ナ事柄ニ関シラデスカラ、半信半疑 イサカ自信  
ガナイノデスガ、トモカク御報告シマス。

先ヅAヲ complete + Boolean algebra トシ、  
 $\mathcal{S}_B$  フツノ表現空間トスル。即チAノ最大双対いでヤルノ集  
合ニ Stone-Wallman ノ位相ヲハレタセノ。ソレハ勿  
論完全不連結 ヱームは<sup>o</sup>くヒズガ、更ニ小笠原氏ハ  $\mathcal{S}_B$  ノ上  
ノ(密数ヌハ $\pm\infty$ ヲトル)連続函数ガ nowhere dense  
ノ集合ヲ除イテハ有限ナルモノノ全体  $\mathcal{L}$  ハーツノ complete  
ノ(従ッラ勿論 あるきめでず的ナ)ベクヒズ東ヲナスコト  
ヲ証明セラレタ。

ソノ場合ニ函数ノ「和」ガ先ヅ問題ニナルワケダガ、ソ  
レヲ小笠原氏ハ西函数ノ有限ナル点ニオイテハ丁度各ノ値ノ  
和ニナル様ナ(B-可測ナ)函数ヲ考ヘテ、ソレト對等(第  
一種集合ヲノゾイテ一致スル事)ナル連続函数トシテ和ヲ定  
義シテ居ラレル。

サテ上記ノ如キA,  $\mathcal{S}_B$ , ソレカラ作ツタ  $\mathcal{L}$  ガAガ適當  
ノ条件ヲミタス時ニ上記ノ予想ノ反例ニナツテキルコトヲ云  
フノデアリマスガ、ソレニハ Aヲ適當ニトツテ

(\*)  $\mathcal{S}_B$  ノ任意ノ点  $f$  ニ對シテ、ソコデ實際ニ $+\infty$ ニ

2) 整域ニツイテハコトクシ複雑デアリマス。

ナル極ナルノ元 $f$ ガアル ( $f(p) = +\infty$ ) 様ニ出来ルコトノ言ヒマス。 今假ニ  $A$  ヲ適當ニトツテ、コノ様ニナツテキルモノガ既ニ出来タト 假定 シマス。ソウスレバ次ノ様ニヌレバヨイ:

$\mathcal{S}_L$  ノ点  $p$  = 對シテ、 $f(p)$  = 有限ナル  $f \in L$  ヲ考ヘルト、ソノ全体ハ  $L$  = オケルーツノ *normal subspace* ナルヲナス。(上ノ小笠原氏ノ構成カラ容易ニワカル如クニ函数ガ有限ナル点 $p$ デハ、ソノ「和」ノ値ハ丁度値ノ和ナル有限値ニナツテキル)。シカルニ上記假定ニヨリ、 $L = \{p \text{ デ } \infty = \text{ナル元ガ實際ニアルノケカラ } \mathcal{S}_p \text{ ハ } L = \text{ハ一致セズ、即チ proper + normal subspace デアル。}$

サテ、 $\mathcal{S}_L$  ノスベテノ点デ有限ナル函数ノ全体ハ明カニ  $\mathcal{S}_p$  ナリ、コレヲ例ヘバ  $\mathcal{S}_L$  トオク。

然ルトキ、 $L$  ノ任意ノ最大 *normal subspace*  $\mathcal{M}$  = 對シテ  $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{S}_L$  ナルコトヲイフ。コレガ云ヘレバヨイ。

何者、 $L$  リラ (有限ノ) 実数ヘノ準同型トハ  $L$  ヲアル最大 *normal subspace* デ剩餘ヲトルコトデアリ、従ツテソノ際  $\mathcal{S}_L$  ノ元ハ常ニ  $0$  ニナル。即チ  $L$  ハ (有限) 実数ノ函数デハ決シテ同型ニ表現サレナイ。

$\mathcal{M}$  ヲ  $L$  ノ任意ノ最大 *normal subspace* トスル。ソノ時

i) 一点  $p$  ガアツテ  $\mathcal{S}_p \supseteq \mathcal{M}$

ii)  $\mathcal{H}_f \equiv \mathcal{H} + \text{ル } f \in \mathcal{L} \text{ ハ 存 在 セ ヲ }$ 。

トイフニツノ場合ガ考ヘラレル。

先ヅ i) ノトキニハ  $\mathcal{H}_f = \mathcal{H}$  ( $\mathcal{H}$  ハ 最大ダカラ)。  
故ニ  $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{H}_f = \mathcal{H}$  デヨイ。

ii) ノ時ニハ各  $f \in \mathcal{L} = \mathcal{L}$  テ  $f_f(f) = +\infty$  + ル  
 $f_f \in \mathcal{H}$  ガアル ( $f_f > 0$  デアルトレテヨイ)。  $f_f$  ハ 連  
続ダカラ  $f$  ノ 適 当 ナ 近 傍  $U_f$  ヲ ト レ バ  $q \in U_f \rightarrow f_f(q)$   
 $\geq \alpha$  ( $\alpha$  ハ アルキマツタ 正 数)。  $\mathcal{L}$  ハ  $\mathcal{L}$  ニ ム バ  $\langle \mathcal{L} \rangle$   
カラ, 有 限 個 ノ  $U_{f_1}, U_{f_2}, \dots, U_{f_n}$   
デ オ ヲ ヘ ル。  $F = f_{f_1} + f_{f_2} + \dots + f_{f_n}$  ( $\mathcal{L}$  = オケ  
ル 意 味 ノ 和 + ル コト 勿 論) ヲ 考 ヘ ル。

$F \in \mathcal{H}$ 。

然ラバ  $F$  ハ  $\mathcal{L}$  ノ スベテノ 点 デ  $\geq \alpha$  + ル コト ハ 明 カ デ ア  
ル。 (和ノ定義参照)。故ニ如何ナレ 有 限 (徒 ヲ ヲ 有 界 +)  
 $g \in \mathcal{L} = \mathcal{L}$  テ  $|g| \leq n F$  + ル  $n$  ガ ア リ,  $g \in \mathcal{H}$  ト ナ  
ル。 故ニ  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}$  デアル。

ヨツテ 主張ガ証明サレタ。 (註: 実ハ 勿 論 i) ノ 場 合  
ハ ナ イ デ ア ル。 何 ト ナ ラ バ,  $\mathcal{H}_f$  ハ 決 テ 最大 normal  
subspace = ナ ラ ナ イ。 ソレハ  $\mathcal{H}_f$  ト アル  $f(f) =$   
 $\pm\infty$  + ル  $f$  デ 生 成 サ レ タ normal subspace ハ  $f$   
デ  $f$  ヨリ 高 イ order デ  $\infty$  = + ル 函 数, 例ヘバ  $f^2$  ヲ  
含 マ ナ イ カ ラ  $\mathcal{L}$  ト 一 致 セ ナ イ ノ デ ア ル。 コノ 事 ヲ 先 = イ ヲ  
テ i), ii) ナ ド ト イ ハ ナ イ ガ コ カ ヲ タ デ ア ラ ヲ)。

残ルノハ  $A$  ヲ 適 当 = ト ヲ ヲ,  $\mathcal{L}$  ガ 上 記 1 條 件 (\*) ヲ

ミタス様 = スレバヨイ。 (ソレニハ例ヘバ  $A$  が  $atom$  ヲ  
モツテキタリシテハイケナイ。ソノ元 = 対応スル  $\mathcal{S}$  ノ点ハ  
自身  $open\ set$  デソコデ  $\infty = +ル\ L$  ノ元 + ド + イ)。  
ソコデ,  $A$  トレテ

$complete + Boolean\ algebra$  デ, ソノ中  
= 可附番個,  $atom$  デナイ元  $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$   
(イヅレモ  $> 0$ ) がアツテ, 而シテ任意ノ  $\alpha (> 0)$  へ  
 $A =$  對シテ  $\alpha \geq v_i$  + ル  $v_i$  ガアル様ニナツテキルトス  
ル。例ヘバコノ様ニ  $A$  トシテハ  $(0, 1) =$  オケル  $open$   
 $sets\ mod.$  nowhere dense sets, + ス  
 $Boolean\ algebra$  ヲトレバヨイデアラウ。(2) (Birk-  
hoff ノ本 101 — 102 頁参照)。

$A$  がコノ様ニ  $\{v_n\}$  ヲモツトスル, 然ラバ  $\mathcal{S}$  ノ任  
意ノ一点, スナハチ  $A$  ノ最大双對いデヤル  $\mathcal{J} =$  對シテ,  
 $\mathcal{J}$  中 = 可附番個, 單調減少列  $w_1 > w_2 > \dots > w_n > \dots$   
..... デ  $\inf. w_n = 0$  + ルモ, ガアル。ソレハ明カデア  
ル。

何トトラバ  $\mathcal{J} = \{w\}$  トスレバ 確カ =  $\inf. w = 0$   
デアル ( $\inf. w > 0$  + ラ  $\mathcal{J}$  ハ最大双對いデヤルデアリ得  
+ イ;  $A$  ノ元ハイヅレモ  $atom$  デナイ) カラ,  $w_1$  ヲ  
 $w_1 \neq v_1$  + ル如クトリ,  $w_2$  ヲ  $w_1 > w_2$  デ且ツ  $w_2 \neq v_2$

(2) 例ヘバ有理数ヲ端ニモツ開區間ヲ  $v_1, v_2, \dots$  トスレ  
バヨイ。

＋ル地ケトリ、----- シテ行ケバヨイ。

叔テ  $\mathcal{F}$  ヲ  $\mathcal{S}$  ノ 点ト見レバ、 $\mathcal{F}$  ハ  $w\text{-set}$  ( $w \in \mathcal{F}$ ) =  
フクマレ、而シテ  $\bigcap (w_n\text{-set}) \ni \mathcal{F}$  デアル。コノ =  
 $w_i\text{-set}$  ハ開且ツ開デアル。ソノ intersection ハ開  
集合デアルガ、nowhere dense デアル。ナゼナラ、ソ  
ウデナリレバアル開集合ヲ、従ツテアル  $a\text{-set}$  ( $a > 0$ )  
ヲフクミ、然ラバ  $w_n\text{-set} \supseteq a\text{-set}$  即チ  $w_n \geq a$   
( $n = 1, 2, \dots$ ) トナツテ矛盾。

即チ  $w_1\text{-set} \supset w_2\text{-set} \supset \dots \supset w_n\text{-set} \supset \dots$   
ナル開且ツ開ナル集合  $w_n\text{-set}$  ノ 單調列ガエラレテ、ソ  
ノ intersection ハ nowhere dense set ( $\ni \mathcal{F}$ ) デ  
アル。ヨツテ  $f(q)$  ヲ

$$q \notin w_1\text{-set} \text{ 十ラ } f(q) = 0$$

$$q \in (w_n\text{-set}) - (w_{n+1}\text{-set}) \text{ 十ラ } f(q) = n$$

$$q \in w_n\text{-set} (n = 1, 2, \dots) \text{ 十ラ } f(q) = +\infty$$

トスレバ、コレハ連続函数デアリ ( $w_i\text{-set}$  ハミナ開且  
ツ開ナルコト = 注意),  $\mathcal{L}$  = 属シ,  $\mathcal{F}$  デ  $+\infty$  デアル。

$\mathcal{F}$  ハ  $\mathcal{S}$  ノ 任意ノ 一点タカラ、コレデ (米) ナル  $\mathcal{L}$  ガ  
出来タワケデアル。

コレデ東群ノ 場合ノ 予想ノ 反例ガ出来タ様デアル。整  
域ニツイテハ次回ニ論ジマス。

以上何カ間違ヒガアルカモ知レズ、マタ自分が知ラナイ  
ダケデ自明ナコトヲ長々ト書イタリシタ箇所モアル様ニ思ヒ  
マスガ、何ダカコレデ良ササリニ思フノデスガ?! 御表示

ヲ願ヒマス。