OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	標数 p ノ準單純リイ環
Author(s)	松島, 興三
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 232, p. 811-824
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74943
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1013. 標數 p ノ準單純リイ環

松島與三（阪大學生）

任意ノ体 k ノ上ノ準單純リイ環 L ヲ考ヘマス。

k ノ標數 0 ノトキハ，L ハ可換ナラザル單純環ノ直和ニナリ、シカモソノ derivation ハスベテ inner ニナルコトハ，ヨク知ラレテヲリマスガ 標數 $p\neq 0$ ノ場合ニハ、一般ニ單純環ノ直加ニナラズ、又 derivation ハ inner デアルトハ限ラナイノデ，單純環ノコトガワカッタトシテモ、準單純環ノ構造ハ一般ニハ分ラナイシ、derivation algebra ノ構造モ複雜ニナッテ来マスガ、L ノ ideal ガ準單純デアルヤウナ場合ハ、割合簡單ニナリマスノデ、ソノヤウナ場合ニツイテ、準單純環ガ單純環カラ、ドノヤウニシテ織ラレルカヲ少シシラベテ見ルコトニシマス。

§1. 体 k ノ上ノ Lie 環 L ヲ考ヘル。ソノ積ヲ $a\circ b$ $(a, b\in L)$ デ表スコトニシマス。

$$\sigma(\alpha x+\beta y)=\alpha\sigma x+\beta\sigma y$$

$$\sigma(x\circ y)=(\sigma x)\circ y+x\circ(\sigma y)$$

$x, y \in L$, $\alpha, \beta \in k$

ヲ満スL ノ linear transformation ヲ derivation トヨブ。

$a \in L$ トスレバ、Jacobi ノ恒等式ヨリ

$$a \circ (x \circ y) = (a \circ x) \circ y + x \circ (a \circ y)$$

トナルカラ、$x \longrightarrow a \circ x$ ナル linear transformation ハ derivation トナル。コレヲ L ノ inner derivation トヨビ、Zassenhaus ニヨッテ、$\underline{a}$ デ表スコトニナル。

ニツノ derivation σ, τ カアッタトキ、$\sigma \circ \tau$ ニ $\sigma\tau - \tau\sigma$ ト定義スレバ、コレニヨッテ derivation ノ全体 D(L) ハ k ノ上ノ Lie 環ヲツクリ、inner derivation ノ全体 I(L) ハソノ ideal ニナル。[1]

初メニ準単純環ノ derivation algebra ノコトヲシラベテ見ヨス。

(定理1) L ヲ準単純ナ Lie 環トスレバ、ソノ derivation algebra D(L) ノ subalgebra R

---

1) 吉田先生: a characterisation of the adjoint representation of the semi-simple Lie rings (Jap. Journ. 1938)

Zassenhaus: über Lie'sche Ringe mit Primzahlcharakteristik (Abh. Hamburg Bd. 13. 1939)

デ、$I(L)$ヲフクムモノハ、スベテ準単純デアル。特ニ$D(L)$ハ準単純デアル。

(証) Rヲ$D(L)$ノ subalgebra, $R \supseteq I(L)$トスル。Rノ solvable ideal Aヲトル。$A \cap I(L)$ハ$I(L)$ノ solvable ideal デアリ、$L \cong I(L)$デアルカラ、$A \cap I(L) = 0$. $A \circ I(L) \subseteq A \cap I(L)$ナル故$A \circ I(L) = 0$.

従ッテ$\sigma \in A$トスレバ、任意ノ$x \in I(L)$ニ対シテ$\sigma \circ x = 0$, シカルニ $\sigma \circ x = \underline{\sigma x}$ デアルカラ.[2] スベテノ$x \in L$ニ対シ、$\underline{\sigma x} = 0$トナルカラ、$\sigma x = 0$. $\sigma = 0$コレハ$A = 0$ナルコトヲ示ス。従ッテLハ準単純デアル。

q. e. d.

(定義) スベテノ derivation σニ対シ、invariant ナルLノ submodule ヲLノ characteristic ideal トヨブ.

Lie 環Lが$L \circ L = L$ヲ満足スルトキ vollkommen トイフ。

(定理2) Lが vollkommen デ、且ツソノ centrum $= 0$トスレバ、ソノ derivation algebra $D(L)$ニ於テヘ、$I(L)$ヲフクム subalgebra ノ derivation ハ$D(L)$ノ inner derivation ニ拡張出来ル。特ニ$D(L)$ノ derivation ハスベテ

---

2) cf. 1)

inner デアル。

(証)

$R \supseteq I(L)$ ヲ $D(L)$ ノ subalgebra トスル。R ノ任意ノ derivation E ヲトル。L ノ centrum $= 0$ ナル故、$L \cong I(L)$ デ、$I(L)$ ハ R ノ vollkommen + Ideal ナルカラ characteristic デアル。[4] 故ニ E ハ $I(L)$ ノ de　　n $\bar{E}$ ヲ induce スル。

$L \cong I(L)$ ナルコトヨリ、任意ノ $x \in L$ ニ對シ

L ——— $I(L)$

x ⟷ $\underline{x}$

ε ↓ ↓ $\bar{\varepsilon}$

εx ⟷ $\underline{\varepsilon x}$

$\underline{\varepsilon x} = \bar{\varepsilon}\underline{x}$ トナル様ナ εx ガ一意的ニ存在スル。

ソウスレバ、$x \longrightarrow \varepsilon x$ ナル對應ハ L ノ derivation ナル。スナハチ $\varepsilon \in D(L)$

ε ガ $D(L)$ ニ於テ induce スル inner derivation ヲ ε トシ $E - \varepsilon = \tilde{E}$ トオク。

$$(E - \varepsilon)\underline{x} = E\underline{x} - \underline{\varepsilon x} = \bar{\varepsilon}\underline{x} - \varepsilon \circ x$$
$$= \underline{\varepsilon x} - \underline{\varepsilon x} = 0$$

故ニスベテノ $\underline{x} \in I(L)$ ニ對シ $\tilde{E}\underline{x} = 0$

$\eta \in R$ トスル。

$$0 = \tilde{E}(\underline{\eta x}) = \tilde{E}(\eta \circ \underline{x}) = (\tilde{E}\eta) \circ \underline{x} + \eta \circ (\tilde{E}\underline{x})$$

---

3) Zassenhaus P. 52 ニハ $D(L)$ ノ derivation ガスベテ inner ニナルコトダケガ書イテアル。

4) Zassenhaus P. 52.

$$=(\tilde{E}\eta)\circ x=(\tilde{E}\eta)x$$

ダカラ、スベテノxニ對シ$(\tilde{E}\eta)x=0$ 從ッテ$\tilde{E}\eta=0$ スナハチKデハ$E=\varepsilon$トナッテホル。　　q. e. d.

(定理3)　Lヲ準單純デ、單純環ノ直和ニナッテホルトスル。ソウスレバ$R\supseteq I(L)$ナル$D(L)$ノ subalgebra Rハ定理ノコトク準單純デハアルガ、$I(L)$ハRノ maximal fullreducible[5] ideal デ、Rガ$I(L)$ヨリ、本當ニ大キイ場合ハ fullred. ニナラメ。シカシ、Rノ ideal ハスベテ準單純デアル。

(証)

$L\cong I(L)$ナル故、$I(L)$が fullred. ナルコトハ明カデアル。$I(L)$ヲ含ムRノ fullred. ideal Aがアルトスレバ、$I(L)$ハAノ直和因子トナル。　：$A=B+I(L)$.　$B\circ I(L)=0$ナル故、前ト同様ニシテ、$B=0$ 從ッテ$A=I(L)$トナル。

次ニRノ ideal がスベテ準單純ナルコトヲイフ。Aヲ任意ノRノ ideal トスル。$I(L)\supseteq A$ノトキハ$I(L)$が fullred. ナルコトヨリ明カデ、又$I(L)\supset A=D=0$ノトキハ、$A=0$トナルカラ、$D\neq 0$, $A\neq I(L)$トシテ証明スル。$I(L)$ハ fullred ナル故、Dハ$I(L)$ノ直和因子トナル。

---

5) 以後可換ナラザル單純環ノ直和ニナル環ノコトヲ full-red トヨブコトニスル。

$I(L)=B+D$ シカルニ B ハ明カニ vollkommen ダカラ $I(L)$ ノ ch. ideal デ, $I(L)$ ガ ideal ダカラ、R ノ ideal トナル。

D ノ centralisater[6] ヲ $Z(D)$ トスル。$B\circ D=0$ ダカラ $B\subseteq Z(D)$ デアルカラ

$$B\subseteq Z(D)\cap I(L)$$

シカルニ $D\cap Z(D)$ ハ R ノ可換 ideal デアルカラ、$D\cap Z(D)=0$

従ッテ $(I(L)\cap Z(D))\cap D=0$ 故ニ

$$(I(L)\cap Z(D),\ D)=(I(L)\cap Z(D))+D$$

$$(I(L)\cap Z(D),\ D)\leq I(L)=B+D$$

$$\leq (I(L)\cap Z(D))+D$$

ナル故

$$I(L)=(I(L)\cap Z(D))+D \qquad B\leq I(L)\cap Z(D)$$

ヨリ

$$B=I(L)\cap Z(D)$$

トナル。

$$B\cap A=I(L)\cap Z(D)\cap A=(I(L)\cap A)\cap Z(D)$$

$$=D\cap Z(D)=0$$

ナル故 $(B,A)=B+A$, $(B,A)\leq(I(L),A)$ ダガ

$$I(L)=B+D\leq B+A,\ A=B+A$$

ナル故

$$(I(L),A)=B+A \text{ トナル。}$$

---

6) $x\circ D=0$ ナルx ノ全体ヲイフ。ソレハ又 R ノ ideal ニナル。

故ニ、A ノ ideal ハ (I(L), A) ノ ideal トナルガ、(I(L), A) 又 I(L) ハ定理 1 ニヨリ、準單純ナル故、A モ準單純デナケレバナラナイ。 q. e. d.

§2. 次ニ、上ニヤッタコトノ逆ヲ考ヘテ行クコトニシマス。

group ノ場合ニ、Fitting ガ同ジヤウナコトヲヤッテ居リマスガ (Fitting: Beiträge zur Theorie der Gruppen von endlichen Ordnung, Jahresbericht D. M. V. Bd. 48) Lie 環ノ場合ニハ、準單純環ノ ideal ハ準單純ニナラナイカモシレナイノデ、假定ニ入レテヤラネバナリマセン。

先ヅ、初メニ準單純ナ L ノ minimal ideal ガスベテ準單純デアルト假定シマス。コノ假定ナレバ次ノ Lemma ガ成立ツ。

(Lemma 1)

任意ノ準單純環 L ノ二ツノ ideal A, B ガ full-reducible ナラ、ソノ和 (A, B) モ fullred. デアル。

(証)

定理 3 ノ証明ノトキト同樣ニシテ、$A \cap B = D$, $A = A_1 + D$ トスレバ、$(A, B) = A_1 + B$ ナルコトガ証明出來ル。

A_1 モ、B モ fullred. デアルカラ、(A, B) モ fullred. デアル。

(定理4) minimal ideal が準單純デアルヤウナ準單純環 L ハ唯一ツノ 0 デナイ、maximal full-red. ideal S ヲモチ、ソレハ characteristic ideal デアル。

(証) "max. fullred. ideal が二ツアッタトシ、コレヲ A, B トスレバ、ソノ和モ Lemma 1 ニヨリ fullred. ニナルカラ、唯一ツニ限ルコトガワカル。且ツソレハ、勿論 vollkommen デアルカラ、Characteristic デアル。次ニ 0 デナイコトヲイフ。

L ノ 'min. ideal A ラトル。(A ハ vollkommen トナルコトハスグイヘル)。

A ノ任意ノ ideal B ヲトレバ、B∘B = B トナルナラ、B ハ vollkommen デ、故ニ A ノ ch. ideal デ、A が ideal ナル故、L ノ ideal トナルカラ、

B ≠ B∘B、同様ニシテ B∘B ≠ (B∘B)∘(B∘B)……シタガッテ、B ハ可解デアルカラ、A が準單純ナコトヨリ B = 0、従ッテ A ハ單純デアル。A ⊆ S ダカラ、S ≠ 0.

q. e. d.

S = S₁ + …… + Sₙ ト單純環ノ直和ニナッタトスレバ Sᵢ が可換デナイコトヨリ vollkommen デアルカラ、前ノヤウニ Sᵢ ハ L ノ 'minimal ideal ニナルコトガワカル。逆ニ 'min. ideal ハ上ニ証明シタ如ク單純デアルカラ、S ハ実ハ 'min. ideal ノ sum トナリ、従ッテ L ノ Sockel (Loewy ノ Kompositionsreihe

ノ一番最後ノモノ）ト一致スルコトガワカル。故ニコレカラ上ノ S ヲ L ノ Sockel トヨブコトニスル。

定理4ノ條件ノ下ニ

（Lemma 2） L ノ Sockel S ノ centralisater Z(S) ガ準單純デアルト假定スル。ソウスレバ Z(S)＝0 トナルコトガイヘル。

（証）

S ∩ Z(S) ハ可換ナ ideal ダカラ、S ∩ Z(S)＝0. 故ニ (S, Z(S)) ＝ S＋Z(S)

Z(S) ノ min. ideal A ヲ考ヘルト、Z(S) ガ準單純トイフコトカラ、A ハ vollkommen. 從ッテ Z(S) ノ ch. ideal デ、從ッテ L ノ ideal ニナル。勿論 A ハ L ノ min. ideal ダカラ、假定ヨリ準單純トナル。

定理4ヲ Z(S) ニツカヘバ、Z(S)≠0 ナラ、0 デナイ Sockel S′ ガアル。S＋S′ ハ fullred. ニナルカラ、S＋S′＝S, S′＝0 トナラネバナラナイ。從ッテ Z(S)＝0 トナラネバナラナイ。

（定理5） L ガ準單純トシ、L ノ min. ideal 及ビ Sockel centralisater ガ準單純トスル。ソウスレバ、L ハ fullreducible ナ Lie 環ノ derivation algebra ノ inner derivation ヲスベテフクム様ナ subalgebra ト isomorph デアル。

（証） L ノ Sockel S ハ 0 デナク、fullred. デ

アル。

$a \in L$ ニ對シ、S ノ derivation $\bar{a} : x \to a \circ x$ ($x \in S$) ヲ對應セシメルト、コレニヨリ L ハ $D(S)$ ノ $I(S)$ ヲフクムヤウナ subalgebra $\overline{L}$ = homomorph = abbilden サレルガ、Lemma 2 ヨリ実ハ isomorph ニナルコトガワカル。

定理ヨト組合セテ

(系1) L ノ min. ideal 及ビ Sockel, centralisater ガ準單純デアレバ、L ノスベテノ ideal ハ準單純デアル。

(系2) 準單純環 L デ、ソノ ideal ガスベテ準單純デアルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ、L ガ fullred. ナ環ノ derivation algebra ノ inner ヲスベテフクム subalgebra ト isomorph トナルコトデアル。

今ト仝様ニ、L ノ min. ideal 及ビ Sockel, centralisater ガ準單純ト假定スル。Sockel S ハ ch. ideal デアルカラ、L ノ任意ノ derivation σ ニ対シ、$\sigma S \subseteq S$ トナルカラ、定理5ノ証明ニ於ケルト同様ニ、σ ニ對シ σ ガ S ニ於テ induce スル derivation $\overline{\sigma}$ ヲ對應サセルト、$D(L)$ ハ $D(S)$ ノ subalgebra = homomorph = ウツルガ、実ハ isomorph = ナル。何者、0 ニ對應スル $D(L)$ ノ ideal ヲ A トスレバ定理5ノ對應ガ isomorph ナルコトヨリ A ハ $I(L) = 0$ コレヨリ $A = 0$ ガ出ル。$D(L)$ ノ Bild ヲ $\overline{D(L)}$ デ表ハス。

$\bar{\sigma} \in \overline{D(L)}$, $\bar{a} \in \bar{L} = \overline{I(L)}$ トスレバ,

$$(\bar{\sigma} \circ \bar{a})x = \bar{\sigma}(\bar{a}x) - \bar{a}(\bar{\sigma}x) = \sigma(a \circ x) - a \circ (\sigma x)$$
$$= (\sigma a) \circ x = (\overline{\sigma a})x$$

ナル故

$$\bar{\sigma} \circ \bar{a} = \overline{\sigma a} \in \bar{L}$$

スナハチ $\bar{\sigma}$ ハ $\bar{L}$ ノ normalisater[7] $N(\bar{L})$ ニ属スル。

逆ニ、$\xi \in N(\bar{L})$ トスレバ、任意ノ $\bar{a} \in \bar{L}$ ニ対シ、$\xi \circ \bar{a} \in \bar{L}$ ダカラ $\bar{b} = \xi \circ \bar{a}$ ナル $b \in L$ ガ一意的ニ存在スル。$b = \xi' a$ トオク。

スナハチ $\overline{\xi' a} = \xi \circ \bar{a}$ ソウスレバ

$$\overline{\xi'(a \circ b)} = \xi \circ \overline{(a \circ b)} = \xi \circ (\bar{a} \circ \bar{b})$$
$$= (\xi \circ \bar{a}) \circ \bar{b} + \bar{a} \circ (\xi \circ \bar{b})$$
$$= \overline{\xi' a} \circ \bar{b} + \bar{a} \circ \overline{\xi' b} = \overline{\xi' a \circ b + a \circ \xi' b}$$

ナル故

$$\xi'(a \circ b) = (\xi' a) \circ b + a \circ (\xi' b)$$

スナハチ ξ' ハ L ノ derivation デアリ、$x \in S$ ニ対シテハ $\overline{x} = \underline{x}$ (スナハチ $\overline{x}$ ハ S ノ inner derivation) ナルコトハ定義ヨリ明デアルカラ。

$$\overline{\xi' x} = \xi \circ \overline{x} = \xi \circ \underline{x} = \xi \underline{x} = \overline{\xi x} \longrightarrow \xi' x = \xi x$$

スナハチ $\overline{\xi'} = \xi$ デアル。故ニ $\xi \in \overline{D(L)}$.

スナハチ $\overline{D(L)}$ ハ $\bar{L}$ ノ normalisater トー致スル。

従ッテ

---

7) $x \circ \bar{L} \subseteq \bar{L}$ ナル x ノ全体ヲ $\bar{L}$ ノ normalisater トヨブ。

(定理6)

準単純環 L ノ max. ideal, 及ビ Sockel ノ centralisater ガ準単純デアルト假定スル。ソウスレバ, L ハ fullreducible ナ Lie 環 S ノ derivation algebra $D(S)$ ノ, $R \supseteq I(S)$ ナル subalgebra ト isomorph ニナルガ、コノトキ $D(L)$ ハ R ノ $D(S)$ ニ於ケル normalisater $N(R)$ ト isomorph ニナル。

上ノ証明ノ系トシマレテ

(系) 上ノ同ジ條件ノ下デ、L ノニツノ derivation σ, τ ガソノ Sockel S ノスベテノ元 x ニ対シ $\sigma x = \tau x$ ナラ $\sigma \equiv \tau$ デアル。

次ニ Sockel ノ derivation ガスベテ L ノ derivation ニ拡張出来ルトスレバ, $\overline{D(L)} = D(S)$, スナハチ $\overline{L}$ ハ $D(S)$ ノ ideal ナリ、更ニ L ノ inner derivation ニ拡張出来ルトスレバ、上ノ系ヨリ、L ノ derivation ハスベテ inner デアルコトガワカル。

従ッテ、$\overline{L} = D(S)$ トナル。

前ニヌッタコトト一緒ニスレバ

(定理7)

準単純環 L ガ fullreducible ナ環ノ derivation algebra ト isomorph ニナルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ

1) L ノ ideal ハスベテ準単純デ,

2) L ノ Sockel ノ derivation ガスベテ L ノ

inner derivation = 拡張出来ルコトデアル。

§3. Zassenhaus ハ上記論文 80 頁デ次ノ三ツノ Vermutung ヲ述ベテ居リマス。

1) 可換デナイ単純環 L ノ outer derivation algebra D(L)/I(L) ハ可解デアル。

2) スベテノ可換デナイ charakteristisch einfach + Ring ハ Charakteristik p ノトキ、einfach + algebra, p-Poteng ring = ナル.

3) L ヲ可換デナイ、charakteristisch einfach 十環トスレバ D(L)/I(L) ハ可解デアル。

(実ハ 1) 2) ヨリ 3) ガ出ルコトガ書イテアリマス)

更ニ 2) 3) ヨリ次ノコトヲ結論シテ居リマス。

4) vollkommen + 準単純環ハ可換デナイ単純環ノ直和ニナル。(P.80, Satz 8)

トコロガ Jacobson ハ Classes of restricted Lie algebras of characteristic p. I (American Journal Vol. LXIII 1941) デ 1) ニ対スル反例ヲ示シテ居リマス。ソウスレバ勿論 3) モ一般ニ成立タヌワケデスガ、コンデ 4) モ実ハ一般ニ成立タヌコトヲ言ヒマス。

ソノ次メニハ 4) ガ正シイトスレバ 1) モ正シイコトヲ証明スレバ十分ナワケデス。4) ガ成立シテ 1) ガ成立シナ

イトスル。ソウスレバ可換デナイ単純環Lガアッテ、
$D(L)/I(L)=K$が solvable デナイ。

$$A^0K=K,\ AK=K\circ K,\ A^2K=A(AK)=(K\circ K)\circ(K\circ K)\cdots$$

$$A^iK=A(A^{i-1}K)=A^{i-1}K\circ A^{i-1}K$$

トオク。（A: Afleitung）

$K\supseteq AK\supseteq A^2K\supseteq\cdots\cdots$テ、Kハ solvable デナイカラ、$i$ガアッテ

$$A^iK=A^{i+1}K=\cdots\cdots\neq 0$$

トナル。

シカルニ$A^iK=A^i\left(D(L)/I(L)\right)=A^iD(L)+I(L)/I(L)$

デアルカラ

$$N=A^iD(L)+I(L)=A^{i+1}D(L)+I(L)=\cdots\cdots$$

N≠I(L) デアル。

$$AN=A(A^iD(L)+I(L))\supseteq A^{i+1}D(L)+AI(L)$$

$$=A^{i+1}D(L)+I(L)=N\quad(\because AI(L)=I(L))$$

ナル故、$AN=N$ スナハチ Nハ vollkommen デアルガN≠I(L)ダカラ、定理3ニヨリ準単純デシカモ、単純環ノ直和ニナラナイ。コレハ矛盾デアル。