



Title	Vector lattice ノ表現ニツイテ
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 233, p. 825-834
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74944
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1014. Vector lattice の表現ニツイテ

中山 正(阪大)

Vector lattice 或ハハ更ニ一般ニ可換束群ノ表現ニツイテハ純代数的ニハ非常ニ満足スベキ結果ガ Lovenzen (ソシテソノヨリ判リ易イ解説トシテ Clifford) ニヨツテ得ラレテキル (ソノコトハ 227 号談話 983 及ビ 984 ニモ一寸述べタ¹⁾)。 (勿論純代数的ニモ多クノ問題ガ残サレテキルガ)。 ソシテソノ結果ヲ使フト Vector lattice ノ諸結果, 特ニソノ表現ニツイテノ諸定理ニ於テソノ証明ガ簡易化サレルモノガ少クナイ様ニ思ハレル。

サテ, 前々号ニ前田一小笠原氏ノ興味アル諸談話ガ出タ (談話 998—1000), ソノ第一ノ表現論 (998) ソレハあるまじき時ニハ中野氏ノ relatives Spectrum (数物記事 23—7 (昨年)) ト大体同ジモノナルノデハナイカト思ハレマスガ, 兎ニ角ソレ等ヲ上述ノ立場カラ見テ見タイト思フ。 (本質的ニ大シタ違ヒハナイガ) 即チ, 一般ノ Vector-lattice ガ Krull-Lovenzen-Clifford ニヨツテ線形順序ヲモツモノヲ同型ニ當ニ表現サレテキルノ

1) 談話 984 ニオケル distributivity ニツイテハ中野氏カラ適切ナ御注意 (談話 995) ヲイタジキ難有ッ存ジマス。 自分デモ氣ツイテ談話 989 デ述べラオキマシタ。 紙上オ礼申シマス。 ナホ, Dedekind ノ証明ハ Wierke, Bd. 2, XXVIII §6 ニアリマス。

1) カラ、ソレ=直接 Wallman 式ヲ適用スレバ、同型ヲ
 犠牲ニシタイデ、兎ニ角常=アル意味デ連続ナル意味ノ函
 数(?) デ表現サレルワケデアル。ソノ後=特ニ函数ノトル値
 ヲ実数(又ハ $\pm\infty$) トシテ、ソノ代リ同型ヲ犠牲ニシテ準同
 型ニスレバ前田-小笠原氏ノ結果ニ相當スル表現が得ラレル
 ト思フ、ソシテ σ -complete ノ時ハ中野氏ノ *relative*
spectrum = ナルト思フ。而シテソレヲノ結果ヲ直接出サ
 ウト思フ時デモ Lovenzen-Clifford ノ表現ヲ経ルコ
 トハ無駄ナ *detour* デハナイト思フ。兎ニ角、べくとる束ノ
 所謂表現論=オイテ、スベテノ表現ノ母型又ハ原型トシテ
 Lovenzen-Clifford ノ定理ヲ見ルベキナノデハナカラ
 ウカト思フノデスが如何デセウカ?!

ナホ、序デ=談話 999 = 於テ小笠原氏ノ述ベテ居ラレ
 ル定理「あるきめですのうラ完備化出来る」ハ其ノ後ニモ述
 ベラレテアル如ク中野氏ノ上記數物記事及び談話 915 = ア
 リススガ、Lovenzen, Clifford = ヨツヲモ証明サ
 レテキル(例ヘバ Clifford, 定理 3) (Artin-Krull
 ノ定理ノ *analogy*) コトヲ述ベテセタイタバク。

§1. 線型順序ヲモツべくとる束ニツイテ自明カガ一言
 スル、線型順序ヲモツべくとる束 L ノ元 a, b = 於テ任意ノ
 自然数 n = 對シテ $|a| < n|b|$ ナルトキ $a \ll b$ デ表ハ
 シ b ノ位 (無限大ノ位) ハ a ヨリ高イトデモ云フコト=スル、
 $a \ll b$ デモ $a \gg b$ デモナイトキ a ト b ハ同ジ位ヲモツト
 イフ。コノ時=ハ $a=b=0$ デナイトスレバ $b \sim a \ll a$

(及ビ b) ナル實數 β ($\neq 0$) が存在シマター意的ニキマル、今 $a > 0$ ヲ固定シ、 a ヨリ高イ位、 b ニツイテハ $b \geq 0$ ニ應ジテ $\beta = \pm \infty$ 、 a ト同ジ位、 b ニツイテハ $\beta =$ 上記ノ β 、 a ヨリ低イ位、 $b = 0$ トスレバ、 $b \rightarrow \beta =$ コツテ $\pm \infty$ カラ實數及ビ $\pm \infty$ へノ對應ガツケラレル。算法ノ順序ガ保存サレル (但シ $\infty - \infty$ 等ニツイテハ何モワカラヌトシテ) 嚴密ノ意味デハイケナイガ、カナル對應ヲモ準同型トヨビ實數 (又 $\pm \infty$) ニヨリ表現ト呼バウ (前田-小笠原氏ノ場合ト同様)。

ナホ、カナル *analysis* ヲクハシク遂行シテ *idahn* ハ線型順序ヲモツ *vector lattice* 或ヒハ一般ニ可換束群ノ形ヲ完全ニキメテキルワケダガ、ソノ精細ハ必要トシナイ。

§2. 先ヅ *Louvenzen-Clifford* ノ定理: $\mathcal{L}$ フォーツノ *vector lattice* トスル (可換束群モ同様ニ扱ヘルガ、簡單ノタメニ)。

$x > 0$ ナル元、即チ正元ノアル集合 $\mathcal{P}$ デ束 $\mathcal{L}$ ノ双對 (= 加法的) いでや $\mathcal{P}$ ナル $\mathcal{L}$ 上ノ 正イデヤル トヨブ (*Louvenzen* ノ言葉ソノマデハ *properly = g-ideal* ナル $\mathcal{P}$ 上ノ 正イデヤル トイフベキダガ簡單ノタメソレヲ略ス)。 $\mathcal{P}$ 上ノ 正イデヤル $\mathcal{P} =$ オイテ $a \notin \mathcal{P}$, $b \notin \mathcal{P} \rightarrow a + b \notin \mathcal{P}$ ナルトキ $\mathcal{P}$ ハ素ナリトイフ。最大ノ $\mathcal{P}$ 上ノ 正イデヤル ハ素ナル。

$\mathcal{P}$ ガ素ナル $\mathcal{L}$ 上ノ 正イデヤル ナルトキ、 $|x| \in \mathcal{P}$ ナル元、即チ

$$x = a - c \quad (a, c \in \mathcal{P} \text{ ナル元})$$

α 元 x の全体 M_α トスル。 M_α は Birkhoff, 言葉カ
 イヘバ *normal + subspace* フナシ, 而モ L/M_α ナ
 ル剰餘 *vector lattice* ハ線形順序ヲモツ。 L ノ元 a
 $L/M_\alpha = \alpha$ ケル像、即チ $a \bmod M_\alpha$ ノ類ヲ $a(\alpha)$ デ
 表ハス。

今 β が最大 α -いでやる / 全体 β ウゴクトスレバ

$$\alpha \rightarrow (\dots, a(\beta), \dots)$$

ニヨッテ L が線形順序ベクトル束 L/M_α ノ直積、中-*trun*,
即チ同型ニ表現サレル。

§3. カク *Lovenzon-Clifford* ノ定理ハ L ノ
 最大 α -いでやる全体 β = 於ケル或ル意味ノ函数 (各点デ
 値ノ属スル *Bereich* がコトナリ、コトソレハ單ニ線形ベ
 クトル束デアッテ数デナイ) = ヨリ L ノ同型ノ表現ヲ主張ス
 ル。ソコデ β = 適當ニ位相ヲ入レル。 *Wallman* ノ真似
 フスル。

$L = \alpha$ ケル ≥ 0 ナル元ノナス部分束ニ於ケル *Wallman*
 ノ *maximal collection* が上記最大 α -いでやるニ他
 ナラナイノデカラ、 $a \geq 0$ ナル a = ツイテ $a \in \beta$ ナル最大
 α -いでやる β ノ集合、所謂 a -set ヲ開集合ノ基トスレバ
 ソレハ同時ニ開トナリ β が完全不連結ノ位相空間ニナル。

コノトキ上記 $a(\beta)$ ハ次ノ如キ意味デ連続ノ函数(?)デ
 アル、ソノ第一ノ意味: 一元 a , 一点 β = 対シ、第ニ一元
 b = ツイテ $a(\beta) = b(\beta)$ ナリトスレバ β ノ適當ニ近傍
 U トレバ $q \in U \rightarrow a(q) = b(q)$ デアル。

[証明] $a \leq b$ の時 = $\times$ レバヨイ. $(a-b)(f) = 0$ がカラ
 $a-b \notin f$. 然ル = f ハ最大ト - いでやるがカラ
 $(a-b) \wedge p = 0$ ナル $p \in f$ ガアル. コノ p -set U ヲ考へ
 レバ $U \ni f$ デアリ. $U \in \mathcal{Q}$ 即チ $p \in \mathcal{Q}$ ナラ $(a-b) \wedge p = 0$
 がカラ $a-b \notin \mathcal{Q}$. 故ニ $(a-b)(\mathcal{Q}) = 0$ デアル. 連続
ノ第二ノ意味: 任意ノ $\mu > 0$ (> 0 ナレコトハ特ニ本質的
 デハナイ) ヲトリ. $a(f) \gg \mu(f)$ ノ時 = $\wedge \mu(f)$ ヲ
 $a \geq 0$ = 應ジテ $\pm \infty$ トシ. 然ウデナイトキ = $\wedge$
 $a(f) - \mu(f) \mu(f) \ll \mu(f)$ ナル実数 $\mu(f)$ ヲ考へル
 (§1. 参照). シカラバコノ $\mu(f)$ ハ連続函数デアル.

[証明] $\mu(f) = \mu_0$ が有限ノ時 = $\wedge$

$$\{(\mu_0 + \varepsilon)\mu - a\} \cup 0 \text{ } - \text{set } \text{ト}$$

$$\{a - (\mu_0 - \varepsilon)\mu\} \cup 0 \text{ } - \text{set}$$

ノ共通集合ヲ考へレバヨイ. ソコデ $\mathcal{Q} =$ 対スル $\mu(\mathcal{Q})$ ハ
 $\mu_0 + \varepsilon$ ト $\mu_0 - \varepsilon$ ノ間 = アル. $\mu(f) = +\infty$ ノトキ = $\wedge$
 任意ノ実数 $\lambda =$ 對シテ $\{(\lambda\mu - a) \cup 0\} - \text{set}$ ノ補集合ナル
 前集合ヲ考へレバヨイ $\mu(f) = -\infty$ ノトキモ同様.

函数ト云フノハ無理ナ変ノ函数デアリ. ムシロ唯表現ト
 イフベキだが. 或ル意味デ連続デアリ. トモカク同型デアル
 ノが長所デアラウ.

§3. 上記第二ノ連続性ニ於ケル μ ヲ或ルーツノ固定
 シタ元トスレバ. $a \longrightarrow \mu(f) =$ ヲツテ Ω = 於ケル実数
 (又ハ $\pm \infty$) 値連続函数 $\mu(f) =$ ヲツテ L が準同型 (例ノ
 如ク *modify* シタ意味) = 表現サレタコト = ナル. 同型

性ヲ犧牲ニシテ變數(スハ士 ∞)値ニシタワケデア
ル。

特 = $L =$ (Freudenthal 式) 單位 e ガアルトシ
テ $U = e$ トスレバ前田-小笠原氏ノ §1ノ結果(定理1,2)
= ナルワケデアラウ。(實際上記 Ω ノ点ト前田-小笠原氏
ノ Ω ノ点ト對應ヅケラレルコトハ容易ニワカル)。(ナホ
言葉ニ捉ハル様デ恐縮デスガ、定理1.3 = オイテ $L/N =$
isomorphic ト言ハレテアルノハ言葉が一寸不適當デ
誤解ヲ招グ恐レガアルノデハナイデセウカ? ソコ = E 述べ
ラレテアル如ク單 = *Kern* ガ 0 トイフ意味ダー對一トハ
限ラナイワケデスカラ、妄言オ覺レ下サイ)。あるきめです
的ナラ 0 函数 = 對應スルノハ 0 元ノミノコト明カ。ナホ
あるきめです的ノ場合ノ精細ハ次 § = 述べヨウ。

σ -complete ナラ中野氏ノ *relative spectrum*
 sum = ナルワケデアラウ。ナホ、ソノ場合 Ω ガ局所
びこむばくヒナルコト(中野氏ノ *Satz. 1.5*) (實ハ局所
トイフヨリハ幾分強イびこむばくヒ性デアル)モ中野氏ニ
於ケル如ク *projection* ノ可補性カラ Wallman ノモ
ウーツノ位相トノ一致カラワカルワケデアルガ、ソレハ多分
ソレ = 本質的 = 依存スルコトデ、一般ノべくヒな東デハ Ω ハ
局所びこむばくヒ = ナルト限ラナイデハナイカト思ハレル
ガ、トモカク吟味シテ見ナケレバ分ラナイ。

§4. 次 = 前田-小笠原氏ノ §2 = 相當シテあるきめデ

す的ノ場合ヲ考ヘヨウ。 L があるきめです的トハ上記 § 2
 = 於ケル (或ヒハ一般 = 任意ノ線型順序ベクトル束 = ヨル)
 同型表現デ、 L ノ如何ナル二元 a, b ($\neq 0$) ヲトツテモ、
 スベテノ f = 對シテ $a(f) = b(f) = 0$ カ $a(f) \gg b(f)$
 トナツテホルトイフ様ナコトガナイコトデアル。

以下 L があるきめです的ナリトスル。前田、小笠原氏
 ノ定理 2.2 ノ証明ノ精細ハ略サレテアルガ、大体 Freudenthal
 單位ノアル場合ノ直積 = ナホス (大ザッパナ言
 ヒ方デガ) トイフ方法ハオ借りシテ (Bachner-Phillips,
 Ann. Math. 42 ヲモ参照)、マハリ Krull-Lorenzen
 -Clifford ノ定理カラ幾分簡易化サレルノデハナイカト
 思フ。

E = fremd (meet ガ 0) ナル正元ノ集合トシテ
 最大ノモノガ確カニ存在スル、ソノ一ツヲ $\{e_\alpha\}$ トスル。
 最大ト一いでやる、即チ Ω ノ点 f ノ中ニハスベテノ e_α =
 對シテ $e_\alpha(f) = 0$ トナルモノモアルカモ知レナイ。今ソレ
 ヲヲ除イテシマツテ残リヲ Ω_1 トスル。然ラバ § 2 = 於ケル
 表現 = 於テ單ニ f が Ω_1 ヲウゴクトシテモ表現が同型デアル
 コトハ保タレル。何トナレバ $a \geq 0$ デスベテノ $f \in \Omega_1$ = 對
 シテ $a(f) = 0$ ナラバ明カニスベテノ e_α = 對シテ
 $e_\alpha \wedge a = 0$ 。 $\{e_\alpha\}$ ノ最大性カラ $a = 0$ 。

ソコデ § 2 = 於ケル第二ノ連続性 = 於ケル U トシテ点 f
 = 於テ $e_\alpha(f) > 0$ ナル e_α (ソレハタビーツシカナイ) フト
 ル、即チ各点 f = 於テ $e_\alpha(f) > 0$ ナル e_α ヲトリ、 L/M_f

= オケル e_j ノ位 = 注目シテ $a(j) \gg e_o(j)$ ナラ $a \geq 0$

= 應ジテ $a(j) = \pm\infty$, 然ラデナケレバ

$$a(j) - a(j) e_o(j) \ll e_o(j)$$

トスル、コレニヨツテ

$$a \rightarrow a(j) \quad (j \in \Omega_1)$$

ナル Ω_1 デノ実数 (又ハ $\pm\infty$) 値函数 $a(j)$ = ヨツテ L が
準同型 = 表現サレタ、コノ $a(j)$ ハ連続デアル 何者: 各
 e_o -set ハ互ニ fremd ナ開且ツ閉集合デソノ和ガ Ω_1
デカラ各 e_o -set ノ中デ連続ナコトヲイヘバヨイ。然ルニ
ソレハ § 3 = 述べタ場合デアル。 (ユマデ ハあるきめです
的ノ假定ハ使ツテナシ)、次ニ常ニ $a(j) = 0$ ナル元 a
ハ 0 = カザル。証明ハ $a \geq 0$ ノトキスレバヨイ。ソノ様ナ a
ニツキ任意ノ e_o = 對シテ $b = a \wedge e_o$ トオケバ明カニ任意
ノ $j \in \Omega_1$ = 對シテ $b(j) = e_o(j) = 0$ カ $b(j) \ll e_o(j)$
デアル。故ニ (あるきめです假定ニヨリ) $b = 0$ 。スベテノ
 e_o = ツイテデカラ $a = 0$ デアル。

更ニ、任意ノ a = ツキ $a(j) = \pm\infty$ ナル点ハ nowhere
dense デアル。証明ハ $a > 0$ トシテヨイ。如何ナル $b > 0$
= 對シテ b -set 中ニハ $a(j)$ = 有限ナル $j (\in \Omega_1)$ が
アルコトヲイヘバヨイ、即チ $b(j) > 0$ デ且ツ $e_o(j) > 0$
ナル e_o = 對シテ $a(j) \gg e_o(j)$ デナシヤウナ j ノアル
事デアル、假ニコノ様ナ j ガナケレバ任意ノ e_o = 對シテ
 $b \wedge e_o$ ノ考ヘルニ如何ナル j = 對シテ $(b \wedge e_o)(j) = 0$
カ $(b \wedge e_o)(j) \ll a(j)$ デアル。然ラバ (あるきめです

假定=ヨリ) $b \wedge c = 0$. 任意, $c = 0$ 対シテダカラ $b = 0$ トナツテ矛盾。

上記ニツノコト=ヨツテ我々, 表現ハ同型デアル。

カクテ完全不連結ナ Ω , デノ連続実数 (又ハ $\pm \infty$) 値函数ヲ同型=表現サレタ。

更=前田-小笠原氏ノ場合=於ケル如クびこむばくヒヲノヤム時=ハ、例ヘバ Wallman 式=ヨリ Ω_1 ヲびこむばくヒナ $\Omega_2 = \text{inbed}$ スレバヨイデアラウ。 Ω_2 モヤハリ完全不連結デアル。 Ω_2 ノ点 $\mathcal{P}$ ハ Ω_1 ノ閉集合ノ lattice ノ最大双対いでやリデアル。 L ノ元 $a \geq 0$ = 対シテ $a\text{-set}$ $\in \mathcal{P}$ ナラバ $a(\mathcal{P}) > 0$, $a\text{-set} \notin \mathcal{P}$ ナラ $a(\mathcal{P}) = 0$ トオクコト=ヨツテ, L ノ元 $a = \Omega_2$ デノ連続(實数又ハ $\pm \infty$ 値)函数が得ラレ。ソレガ Ω_1 ($\subseteq \Omega_2$) ノ上デハ原ノト一致シ同ジ様ナ性質ヲモツコトハ容易=知ラレルデアラウト思フ。

以上本質的=ハ何等変リナク、タジ同ジコトヲ繰リカヘシタジケダアリ、ソシテ長々ト書イテ恐縮デシタガ、タジ Krull-Lorenzen-Clifford = ヨツテ同型ナ表現が與ヘラレテオノノデスカラ、vector lattice ノ諸表現論=オイテソレヲ原型トシテソレ=依存スルナラ種々ノ点デ簡易化サレルコトガアルノデハナカラウカト思フコトヲ述べタカッタダケデアリマス。(タジシコト=表現論トイッタノハ無限個ノ元ノ $\sup, \inf$ =関係セズ formulate 出来ルモノミトシマス、無限個ノ $\sup, \inf$ 等ノ出来

ルモ、(例へバ *spektral zerlegung* 等) デハ 同定
理ガ必ズ シモ 有効 = 利用出来ルトハ 限ラナイカト 思ヒマス、
利用出来ル コトモアリマセウガ)) 何カ考ヘ 違ヒ シテ キル 氣
モアルカト 思ヒマス、御教示ヲ 願ヒマス。