



Title	Krull ノ 豫想ニツイテ, II
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 233, p. 852-859
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74950
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1019. Krull の豫想 = シイテ, II

中 山 正 (阪大)

I = オイテ Krull の豫想 / べくとる末 / 場合 (ソノ

場合ハサウナルト予想シタノデハナカッタモ知レマセンガ)
 ノ反例ヲ述べタ、次ニ Krull ノ豫想ノ本来ノ場合即チ整域
 ノ場合ニツイテ反例ヲ述べヨウ。即チ *vollständig*
*ganz-abgeschlossen*¹⁾ デシカモ *spiegelte Bewertungsringe* ノ *durchschnitt* トシテ表ハサレ
 タイ様ナ整域ヲ作ル。ソレニハベクヒる束ニオケル反例ニ依
 存シテ次ノ様ニ構成ヲスル: ($\mathbb{I}$ ニ於ル如ク)

Aヲ *Complete* ナベニ束デ $\mathbb{I}$ ニオケル条件ヲミタス
 モノ、即チソノ表現空間 Ω (完全不連結且ツびこむばくヒ)
 ニオイテ Ω ノ任意ノ一点ニ對シテ其処デ $\log p = +\infty$ ニナ
 ヲツテ *nowhere dense set* ヲノゾイテハ有限値ヲトル連
 続函数が存在スル様ニナツテキルモノデアアル。

然ルトキ Ω ノ上ノ連続函数デ *nowhere dense set*
 ヲノゾイテ有限ナルモノノ全体ガーツノあるきめです的べく
 ヒる束ヲナシ、シカシソレハ如何ナル空間ノ有限値ノ函数ノ
 束ニヨツテモ同型ニ表現サレナイデアツタ。

サテ、実数ヌハ $\pm\infty$ 値ノ函数トサズ、(正ヌハ負人ハ)
 1) 整数及ビ $\pm\infty$ ノ値ヲトル連続函数 デ而モ $\pm\infty$ ニナル
 ハ *nowhere dense set* ノミナルモノノ全体ヲ考ヘレ
 バコレガヤハリ 束群ニナルコトハ明カデアアル(上述ノ部分束
 群)、勿論あるきめです的デアアル。サテ我々ノ空間 Ω ノハ
 ヲノ任意ノ点ニ對シテ、ソユデ $+\infty$ ニナル、コノ様ナル数ガ
 實際存在スル。

1) 即チ Artin ノ意味デ *ganz-abgeschlossen*。

ソレハ I デ實際作ツタ函数ハ整数又ハ $\pm\infty$ ノミヲトル
 モ、デアツタ。ヨツテ I = 於ケルト全ク同様ニシテコノ束群
 モ如何ナル空間ノ有限実函数ノ束群デ同型ニ表ハサレナイ。

我々ノ空間 Ω ノ各点 $p = \text{abstract}$ = ツノ変数
 x_p ヲ對應サセル。任意ニツノ体 K ヲトル。 Ω ノ有限
 個ノ点 $\{p_1, \dots, p_s\}$ ヲ考へ、ソレニ對應スル変数 $x_{p_1},$
 $\dots, x_{p_s}$ ノ K = 於ケル多項式 $\mathcal{F}(p_1 \dots p_s)$ 多項式ト
 デモ呼ブ。 $\{p_1, \dots, p_s\}$ ノ部分集合 $\{p_1, \dots, p_t\}$ ヲト
 リ。 $(p_1 \dots p_s)$ 多項式 $F(p_1 \dots p_s)$ 及ビ $(p_1 \dots p_t)$ 多
 項式 $F(p_1 \dots p_t) = \text{オイテ}$ 、前者 = オイテ $x_{p_{t+1}} = \dots$
 $\dots = x_{p_s} = 1$ トオイタ時ニ後者 = ナル場合ニ、コレヲ

$$F(p_1, \dots, p_s) \gg F(p_1 \dots p_t)$$

トデモ書クコトニスル。

次ニ Ω = オケル 多項式列 $\{F; P\}$ ヲ次ノ如ク定義
 スル： Ω = オケルツノ第一種集合 P ガアツテ、 P = 属サ
 ス任意ノ有限個ノ点 $p_1, \dots, p_s$ = ハ常ニツノ $(p_1, \dots,$
 $\dots, p_s)$ 多項式 $F(p_1 \dots p_s)$ ガ對應シテ居リ、而シテ
 $\{p_1, \dots, p_s\} \supseteq \{p_1, \dots, p_t\}$ ナラば常ニ $F(p_1 \dots p_s)$
 $\gg F(p_1 \dots p_t)$ トナツタキルトスル、カナル system
 ヲ多項式列トヨビ $\{F; P\}$ デ表ハス。

ニツノ多項式列 $\{F; P_1\}, \{G; P_2\}$ = オイテ $P_1 \cup P_2$
 ヲフクムアル第一種集合 = 属サス $p_1, \dots, p_s$ = 對シテハ對應
 スル多項式ガ同一デアアルナラバ、コレヲ兩列ハ同値デアルト
 見テ、以下同一視スルトスル。

又, $P_1 \cup P_2 =$ 對應シ、ソレニ属サヌ $P_1, \dots, P_s =$ 對シテハ $F(P_1 \dots P_s) + G(P_1 \dots P_s)$ が對應シテキル多項式列 (コレが上記 i), ii) マミタスコトハ明カ) マ多項式列 $\{F; P_1\}, \{G; P_1\}$ ノ和ト定義スル。積ニツイテモ同様ニスル。

コレニヨツテ多項式列 (ノ類) ノ全体 R ガ一ツノ環ヲナスコト明カデアアル。更ニ整域ナルコトモ明カデアアラウ。

コノ R ハ vollständig ganzabgeschlossen デアル。即チニツノ多項式列 $\{F; P_1\}, \{G; P_2\}$ 及ビ 0 デナイ $\{H; P_3\}$ がアツテ、スベテノ $\nu = 1, 2, \dots =$ 對シテ $\{F; P_1\}^\nu \{H; P_3\}$ が $\{G; P_2\}^\nu$ デ割りキレルナラバ $\{F; P_1\}$ ハ $\{G; P_2\}$ デ割りキレル。即チスベテノ $\nu =$ 對シテ $\{F; P_1\}^\nu \{H; P_3\} = \{G; P_2\}^\nu \{K^{(\nu)}; P_4\}$ ナル多項式列 $\{K^{(\nu)}; P_4\}$ がアルナラバ $\{F; P_1\} = \{G; P_2\} \{L; P_4\}$ ナル $\{L; P_4\}$ がアル。

(ノノ証明) コノ假定ガミタサレテキルトスル。

P_1, P_2, P_3 及ビスベテノ $P^{(\nu)}$ (ソレヲノ *join* モ勿論第一種集合デアアル) ノスベテヲフクム適當ニ第一種集合 P ヲトレバ、ソレニ属サヌ点ノ有限集合 $P_1, \dots, P_s =$ 對シテハ常ニ $F(P_1, \dots, P_s), G(\dots), H(\dots), K^{(\nu)}(\dots)$ が對應シテ居テ常ニ

$$F(P_1 \dots P_s)^\nu H(\dots) = G(\dots)^\nu K^{(\nu)}(\dots)$$

トアツテキル。

サテ $\{H; P_3\}$ ハ假定ニヨリ 0 デナイ。マタ $\{G;$

P_2 } が 0 ノ トキ (従ッテ $\{F; P_1\} \in O$ デアル) ニハ主張
ハ自明デアルカラ、以下 $\{G; P_2\} \in O$ デナイトスル、ヨッ
テ $P =$ 属サヌ適當ナ $p_1, \dots, p_s$ ヲトレバ $H(p_1, \dots, p_s)$
 $\in G(p_1, \dots, p_s) \in K = O$ デナイ、コノ様ナ $p_1, \dots, p_s$
ヲ臨時ニ固定シテ考ヘル。

$\{p_1, \dots, p_s\}$ ヲフクム $\{p_1, \dots, p_r\} =$ 対シテハ勿
論 $H(p_1, \dots, p_r) \in G(p_1, \dots, p_r) \in O$ デナイ (多項式
列ノ條件参照)、シカルニスベテノ $V =$ 對シテ $F(p_1, \dots,$
 $\dots, p_r) \vee H(p_1, \dots, p_r) \wedge G(p_1, \dots, p_r) \vee$ デ割リキ
レルノデアアル。ヨッテ $x_{p_1}, \dots, x_{p_r}$ ノ多項式 $F(p_1, \dots,$
 $\dots, p_r) \wedge G(p_1, \dots, p_r)$ デ割リキレル; $K[x_{p_1}, \dots,$
 $\dots, x_{p_r}]$ ナル多項式域ハ *vollständig ganz-*
abgeschlossen ナカラ!!

即チ

$$F(p_1, \dots, p_r) = G(p_1, \dots, p_r) L(p_1, \dots, p_r)$$

ナル $(p_1, \dots, p_r)$ 多項式 $L(p_1, \dots, p_r)$ が存在スル。シ
カ $\in G(p_1, \dots, p_r) \neq 0$ ナカラ一意的ニ定マル。而シテ
 $\{p_1, \dots, p_m\} \supseteq \{p_1, \dots, p_r\}$ ナラ $L(p_1, \dots, p_m)$
 $\gg L(p_1, \dots, p_r)$ トナッテキル、ソレハ $F(p_1, \dots, p_m)$
 $\gg F(p_1, \dots, p_r)$ 及ビ G ノ同様ナ關係ヨリ明カデアアル。

サテ $P =$ 属サヌ点ノ任意ノ有限個 $q_1, \dots, q_t =$ 対
シテハ $q_1, \dots, q_t$ 及ビ上記 $p_1, \dots, p_s$ ヲフクム (P
 $=$ 属サヌ) 任意ノ有限点集合 $p_1, \dots, p_r$ ヲトッテ $L(p_1, \dots,$
 $\dots, p_r)$ ヲ考ヘ、ソコニ於テ $q_1, \dots, q_t =$ 属サヌ他ノ

変数ヲミナシトシテ生ズル所ノ $(q_1, \dots, q_t)$ 多項式ヲ $L(q_1, \dots, q_r)$ ト定義スル. コレハ $p_1, \dots, p_r$ ノトリ方ニ無関係ノコトハ上記ヨリ明カデアアル. 更ニ、 $\{q_1, \dots, q_u\} \subseteq \{q_1, \dots, q_t\}$ ノトキ $L(q_1, \dots, q_u) \ll L(q_1, \dots, q_t)$ ナルコトニ明カデアアル. 何故ナラ $L(q_1, \dots, q_t)$ ヲ得タ上デ更ニ $x_{q_{u+1}}, \dots, x_{q_t}$ ヲ 0 ニスレバヤハリ $L(q_1, \dots, q_u)$ トナルベキデカラデアアル.

ヨツテ、コノ $L(\dots)$ ニヨツテ一ツノ多項式 $\{L; P\}$ ガ得ラレル. シカモ $\{F; P_1\} = \{G; P_2\} \{L; P\}$ デアル. 何者、 $\{p_1, \dots, p_r\} \supseteq \{p_1, \dots, p_s\}$ ニ對シテハ

$$F(p_1, \dots, p_r) = G(\dots) L(\dots)$$

デアリ、シテガツテ変数ノ幾ツカラ / ニスル事ニヨツテ任意ノ $q_1, \dots, q_t$ ($\notin P$) ニ對シテモ $F(q_1, \dots, q_t) = G(\dots) L(\dots)$ トナルカラデアアル.

ヨツテ我々ノ多項式列ノ環 R ガ *vollständig ganzabgeschlossen* ナルコトガ証明サレタ.

サテ、初メニ考ヘタ東洋ノ元、スナハチ $\mathbb{Q}$ ニオケル整数又ハ $\pm\infty$ 値連続函数 f デアル *nowhere derivate* set N ニオイテ / $\pm\infty$ トナルモノヲ考ヘル. シカシテ $f \geq 0$ ナル f ニ對シテハ、如キ多項式列ガ對應サセラレル、即チ N ニ屬サヌ $p_1, \dots, p_s$ ニ對シテ

$$x_{p_1}^{f(p_1)} x_{p_2}^{f(p_2)} \dots x_{p_s}^{f(p_s)}$$

ヲ對應サセル様ナ多項式列デアアル. コノ多項式列ヲ簡單

$= \{x^f; N\}$ が表ハス、シカラバ

$$\{x^{f_1}; N_1\} \times \{x^{f_2}; N_2\} = \{x^{f_1+f_2}; N_3\}$$

デアルコトハ明カデアル。

而シテ、ニツノ $\{x^{f_1}; N_1\}, \{x^{f_2}; N_2\} =$ 於テ
苟若カ後若デ $\mathcal{R}$ ノ中デ割リキレルノハ $f_1 \geq f_2$ ナル時
ニアルコトハ $\mathcal{O}$ ノ (両者カ有限ナ) 各点デ考ヘテミレバワ
カル。

カク $f \geq 0$ ナル $f =$ ハ多項式列 $\{x^f; N\}$ カ對應スル
カ ≥ 0 トカザラヌ一般ノ元 $f =$ 對シテハ

$$f = f_1 - f_2 \quad (f_1 \geq 0, f_2 \geq 0)$$

トレテ $\mathcal{R}$ ノ商体ニオケル $\{x^{f_1}; N_1\} / \{x^{f_2}; N_2\}$ ヲ對
應サセル、コノ f_1, f_2 ノトリ方ニ無關係ナ f ノミデコ
ノ商カキマルコトハ勿論明カデアル。カクテコノ對應ニヨリ
我々ノ束群 (加法ヲ書イタガ) が $\mathcal{R}$ ノ商体ニオケル

$\{x^{f_1}; N_1\} / \{x^{f_2}; N_2\}$ ナル元ノナス乘法群ト同
型ニナル。シカレテ束群ノ ≥ 0 ナル元ハ丁度コノ乘法群中
ニ $\mathcal{R}$ ナルモノニ對應スル。

今假ニ $\mathcal{R}$ がソノ商体ニオケル *speziell + Bewertungsringe* ノ *durchschnitt* ニナツテキルト
スレバ *Bewertungen* ヲ我々ノ乘法群ニツイテ考ヘ
更ニ束群ニ移ツテミレバ、ソレハ我々ノ束群カ実數値ノ
函数デ同型ニ表現サレタコトニナル (單ニ準同型デナク、
“同型” ナコトハスベテノ Wert が ≥ 0 ナラ $\in \mathcal{R}$ 、從
ツテ對應スル元が束群デ ≥ 0 ナルコトカラデアル)。コ

レハ矛盾。

ヨツテ R は *speziell* + *Bewertungsringe*
1 *Durchschnitt* トハナリ得ナイ、故 = Krull
ノ豫想ノ反例が得ラレタワケデアル。

—— 以上 ——