OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Krull ノ 豫想ニツイテ, II
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 233, p. 852-859
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74950
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1019. Krull ノ豫想ニツイテ, II

中山　正（阪大）

I ニオイテ Krull ノ豫想ノベキトキ来ノ場合（ソノ

場合ハサウナルト予想シタノデハナカッタコト知レマセンガ）ノ反例ヲ述ベタ、次ニ Krull ノ豫想ノ本来ノ場合即チ整域ノ場合ニツイテ反例ヲ述ベヨウ。即チ vollständig ganz-abgeschlossen[1] デシカモ eingeordnete Bewertungsringe ノ Durchschnitt トシテ表ハサレナイ様ナ整域ヲ作ル。ソレニハベクトル束ニオケル反例ニ依存シテ次ノ様ナ構成ヲスル：（Ｉニ於ル如ク）

Ａヲ Complete ナルベクトル束デＩニオケル係体ヲミタスモノ、即チソノ表現空間 Ω（完全不連結且ツビコムパクト）ニオイテ Ω ノ任意ノ一点ニ對シテ其処デ階カニ $+\infty$ ニナッテ nowhere dense set ヲノゾイテハ有限値ヲトル連続函数が存在スル様ニナッテヰルモノデアル。

然ルトキ Ω ノ上ノ連続函数デ nowhere dense set ヲノゾイテ有限ナルモノノ全体が一ツノ有リきめです的ベクトル束ヲナシ、シカシソレハ如何ナル空間ノ有限値ノ函数ノ束ニヨッテモ同型ニ表現サレナイノデアッタ。

サテ、実数又ハ $\pm\infty$ 値ノ函数トセバ、（正又ハ負ノ）整数及ビ $\pm\infty$ ノ値ヲトル連続函数デ而モ $\pm\infty$ ニナルノハ nowhere dense set ノミナルモノノ全体ヲ考ヘレバコレガヤハリ束群ニナルコトハ明カデアル（上述ノ部分束群ノ、勿論有リきめです的デアル、サテ我々ノ空間 Ω ハソノ任意ノ点ニ対シテ，ソコデ $+\infty$ ニナル、コノ様ナ函数が実際存在スル。

1) 即チ Artin ノ意味デノ ganz-abgeschlossen.

ソレハIデ實際作ッタ函數ハ整數又ハ±∞ノミヲトルモノデアッタ。コッテIニ於ケルト全ク同様ニシテコノ束群モ如何ナル空間ノ有限実函數ノ束群デ同型ニ表ハサレナイ。

我々ノ空間Ωノ各点ξ=abstract=一ツノ変数x_ξヲ對應サセル。任意ニ一ツノ体Kヲトル。Ωノ有限個ノ点$\{\xi_1, \cdots\cdots, \xi_s\}$ヲ考ヘ、ソレニ對應スル変数$x_{\xi_1}, \cdots\cdots, x_{\xi_s}$ノKニ於ケル多項式ヲ$(\xi_1 \cdots\cdots \xi_s)$多項式トデモ呼ブ、$\{\xi_1, \cdots\cdots, \xi_s\}$ノ部分集合$\{\xi_1, \cdots\cdots, \xi_t\}$アトリ、$(\xi_1 \cdots\cdots \xi_s)$多項式$F(\xi_1 \cdots\cdots \xi_s)$及ビ$(\xi_1 \cdots\cdots \xi_t)$多項式$F(\xi_1 \cdots\cdots \xi_t)$ニオイテ、前者ニオイテ$x_{\xi_{t+1}} = \cdots\cdots = x_{\xi_s}$ノトオイタ時ニ後者ニナル場合ニ、コレヲ

$$F(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_s) \gg F(\xi_1 \cdots\cdots \xi_t)$$

トデモ書クコトニスル。

次ニΩニオケル<u>多項式列</u>$\{F; P\}$ヲ次ノ如ク定義スル：Ωニオケル一ツノ第一種集合Pガアッテ、Pニ屬サヌ任意ノ有限個ノ点$\xi_1, \cdots\cdots, \xi_s$ニハ常ニ一ツノ$(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_s)$多項式$F(\xi_1 \cdots\cdots \xi_s)$ガ對應シテ居リ、而シテ$\{\xi_1, \cdots\cdots, \xi_s\} \supseteq \{\xi_1, \cdots\cdots \xi_t\}$ナヲ常ニ$F(\xi_1 \cdots\cdots \xi_s) \gg F(\xi_1 \cdots\cdots \xi_t)$トナッテキルトスル、カヽル system ヲ多項式列トヨビ$\{F; P\}$デ表ハス。

二ツノ多項式列$\{F; P_1\}$, $\{G; P_2\}$ニオイテ$P_1 \cup P_2$ヲフクムアル第一種集合ニ屬サヌ$\xi_1 \cdots\cdots \xi_s$ニ対シテハ對應スル多項式ガ同一デアルナラバ、コレラ両列ハ同値デアルト見テ、以下同一視スルトスル。

又，P_1 レ P_2 ニ對應シ、ソレニ屬サヌ $\mathfrak{p}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_s$ ニ對シテハ $F(\mathfrak{p}_1 \cdots\cdots \mathfrak{p}_s) + G(\mathfrak{p}_1 \cdots\cdots \mathfrak{p}_s)$ ガ對應シテヰル多項式列（コレガ上記 i), ii) ヲミタスコトハ明カ）ヲ多項式列 $\{F; P_1\}$, $\{G; P_1\}$ ノ和ト定義スル．積ニツイテモ同樣ニスル。

コレニヨッテ多項式列（ノ類）ノ全体 R ガ一ツノ環ヲナスコト明カデアル。更ニ整域ナルコトモ明カデアラウ。

コノ R ハ vollständig ganzabgeschlossen デアル．即チ二ツノ多項式列 $\{F; P_1\}$, $\{G; P_2\}$ 及ビ0デナイ $\{H; P_3\}$ ガアッテ、スベテノ $\nu = 1, 2, \cdots\cdots$ ニ對シテ $\{F; P_1\}^\nu \{H; P_3\}$ ガ $\{G, P_2\}^\nu$ デ割リキレルナラバ $\{F; P_1\}$ ハ $\{G, P_2\}$ デ割リキレル．即チスベテノ ν ニ對シテ $\{F; P_1\}^\nu \{H; P_3\} = \{G, P_2\}^\nu \{K^{(\nu)}; P^{(\nu)}\}$ ナル多項式列 $\{K^{(\nu)}; P^{(\nu)}\}$ ガアルナラバ $\{F; P_1\} = \{G; P_2\}\{L; P_4\}$ ナル $\{L; P_4\}$ ガアル。

（ソノ証明） コノ假定ガミタサレテヰルトスル。

P_1, P_2, P_3 及ビスベテノ $P^{(\nu)}$（ソレラノ join モ勿論第一種集合デアル）ノスベテヲフクム適當ナ第一種集合 P ヲトレバ，ソレニ屬サヌ点ノ有限集合 $\mathfrak{p}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_s$ ニ對シテハ常ニ $F(\mathfrak{p}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_s)$, $G(\cdots\cdots)$, $H(\cdots\cdots)$, $K^{(\nu)}(\cdots\cdots)$ ガ對應シテ居テ常ニ

$$F(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s)^\nu H(\cdots\cdots) = G(\cdots\cdots)^\nu K^{(\nu)}(\cdots\cdots)$$

トナッテヰル．

サテ $\{H; P_3\}$ ハ假定ニヨリ0デナイ．マタ $\{G;$

$P_2\}$ ガ0ノトキ（従ッテ $\{F; P_1\}$ モ0デアル）ニハ主張ハ自明デアルカラ、以下 $\{G; P_2\}$ モ0デナイトスル、ヨッテP=属サヌ適当ナ $\mathfrak{z}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{z}_s$ ヲトレバ $H(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_s)$ モ $G(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_s)$ モ共ニ0デナイ、コノ様ナ $\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots, \mathfrak{z}_s$ ヲ暫時ニ固定シテ考ヘル。

$\{\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_s\}$ ヲフクム $\{\mathfrak{z}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{z}_n\}$ ニ対シテハ勿論 $H(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_r\}$ モ $G(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_r)$ モ0デナイ（多項式列ノ條件参照）、シカルニスベテノレニ對シテ $F(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_r)^\nu H(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_r)$ ハ $G(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_r)^\nu$ デ割リキレルノデアル。ヨッテ $x_{\mathfrak{z}_1}, \cdots\cdots, x_{\mathfrak{z}_r}$ ノ多項式 $F(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_r)$ ハ $G(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_r)$ デワリキレル；$K[x_{\mathfrak{z}_1}, \cdots\cdots, x_{\mathfrak{z}_r}]$ ナル多項式域ハ *vollständig ganz-abgeschlossen* ダカラ!!

即チ

$$F(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_r) = G(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_r) L(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_r)$$

ナル $(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_r)$ 多項式 $L(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_r)$ ガ存在スル。シカモ $G(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_r) \neq 0$ ダカラ一意的ニ定マル。而シテ $\{\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_m\} \geqq \{\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_r\}$ ナラ $L(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_m) \gg L(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_r)$ ノトナッテキル、ソレハ $F(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_m) \gg F(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_r)$ 及ビGノ同様ナ関係ヨリ明カデアル。

サテP=属サヌ点ノ任意ノ有限個 $\mathfrak{q}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{q}_t$ ニ対シテハ $\mathfrak{q}_1, \cdots\cdots \mathfrak{q}_t$ 及ビ上記 $\mathfrak{z}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{z}_s$ ヲフクム（P=属サヌ）任意ノ有限点集合 $\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_r$ ヲトッテ $L(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_r)$ ヲ考ヘ、ソコニ於テ $\mathfrak{q}_1, \cdots\cdots \mathfrak{q}_t$ ニ属サヌ他ノ

変数ヲミナノトシテ生ズル所ノ $(\eta_1, \cdots\cdots \eta_t)$ 多項式ヲ $L(\eta_1, \cdots\cdots \eta_\nu)$ ト定義スル．コレハ $\xi_1 \cdots\cdots \xi_\nu$ ノトリ方ニ無関係ノコトハ上記ヨリ明カデアル．更ニ，$\{\eta_1, \cdots\cdots \eta_\mu\} \subseteq \{\eta_1, \cdots\cdots \eta_t\}$ ノトキ $L(\eta_1, \cdots\cdots \eta_\mu) \ll L(\eta_1, \cdots\cdots \eta_t)$ ナルコトモ明カデアル．何故ナラ $L(\eta_1, \cdots\cdots \eta_t)$ ヲ得タ上デ更ニ $x_{\eta_{\mu+1}}, \cdots\cdots x_{\eta_t}$ ヲ 0 ニスレバヤハリ $L(\eta_1, \cdots\cdots \eta_\mu)$ トナルベキダカラデアル。

ヨッテ，コノ $L(\cdots\cdots)$ ニヨッテーツノ多項式 $\{L; P\}$ ガ得ラレル．シカモ $\{F; P_1\} = \{G; P_2\}\{L; P\}$ デアル．何者，$\{\xi_1 \cdots\cdots \xi_\nu\} \subseteq \{\xi_1 \cdots\cdots \xi_s\}$ ニ対シテハ

$$F(\xi_1 \cdots\cdots \xi_\nu) = G(\cdots\cdots) L(\cdots\cdots)$$

デアリ，シタガッテ変数ノ幾ツカヲノニスル事ニヨッテ任意ノ $\eta_1 \cdots\cdots \eta_t$ $(\text{キ} P)$ ニ対シテモ $F(\eta_1 \cdots\cdots \eta_t) = G(\cdots\cdots) L(\cdots\cdots)$ トナルカラデアル。

ヨッテ或ル多項式列ノ環 R が vollständig ganzabgeschlossen ナル事ガ証明サレタ。

サテ，初メニ考ヘタ束群ノ元，スナハチ Ω ニオケル整数又ハ $\pm\infty$ ノ値ヲトル連続函数 f デアル nowhere dense set N ニオイテノミ $\pm\infty$ トナルモノヲ考ヘル．シカシテ $f \geqq 0$ ナル f ニ対シテ次ノ如キ多項式列ガ対応サセラレル，即チ N ニ属サヌ $\xi_1 \cdots\cdots \xi_s$ ニ対シテ

$$x_{\xi_1}^{f(\xi_1)} \, x_{\xi_2}^{f(\xi_2)} \cdots\cdots x_{\xi_s}^{f(\xi_s)}$$

ヲ対応サセル様ナ多項式列デアル、コノ多項式列ヲ簡単

$= \{x^f; N\}$ デ表ハス、シカラバ

$$\{x^{f_1}; N_1\} \times \{x^{f_2}; N_2\} = \{x^{f_1+f_2}; N_3\}$$

デアルコトハ明カデアル。

而シテ、ニツノ $\{x^{f_1}; N_1\}$, $\{x^{f_2}; N_2\}$ ニ於テ両者ガ後者デ $\mathfrak{R}$ ノ中デ割リキレルノハ $f_1 \geqq f_2$ ナル時ニ限ルコトハ $\mathfrak{R}$ ノ（両者ガ有限ナ）各点デ考ヘテミレバワカル。

カクテ $f \geqq 0$ ナル f ニハ多項式列 $\{x^f; N\}$ ガ対応スルガ $\geqq 0$ トカギラズ一般ノ元 f ニ対シテハ

$$f = f_1 - f_2 \quad (f_1 \geqq 0,\ f_2 \geqq 0)$$

トシテ $\mathfrak{R}$ ノ商体ニオケル $\{x^{f_1}; N_1\} / \{x^{f_2}; N_2\}$ ヲ対応サセル、コノ f_1, f_2 ノトリ方ニ無関係ナ f ノミデコノ商ガキマルコトハ勿論明カデアル。カクテコノ対応ニヨリ我々ノ求群（加法ヲ導イタガ）ガ $\mathfrak{R}$ ノ商体ニオケル $\{x^{f_1}; N_1\} / \{x^{f_2}; N_2\}$ ナル形ノ元ノナス乗法群ト同型ニナル。シカシテ求群ノ $\geqq 0$ ナル元ハ丁度コノ乗法群中ノ $\in \mathfrak{R}$ ナルモノニ対応スル。

今假ニ $\mathfrak{R}$ ガソノ商体ニオケル *speziell* + *Bewertungsringe* ノ *Quotientschnitt* ニナッテヰルトスレバ *Bewertungen* ヲ我々ノ乗法群ニツイテ考ヘ更ニ求群ニ移ッテミレバ、ソレハ我々ノ求群ガ実数値ノ函数デ同型ニ表現サレタコトニナル（単ニ準同型デナク、"同型"ナコトハスベテノ *Wert* ガ $\geqq 0$ ナラ $\in \mathfrak{R}$, 従ッテ対応スル元ガ求群デ $\geqq 0$ ナルコトカラデアル）。コ

レハ矛盾。

ヨッテ R ハ speziell + Bewertungsringe / Durchschnitt トハナリ得ナイ、故= Krull / 豫想 / 反例ガ得ラレタワケデアル。

—— 以上 ——