OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Regular vector lattice ニツイテ
Author(s)	小笠原, 藤次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 233, p. 872-876
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74952
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1021. Regular vector lattice ニツイテ

小笠原藤次郎(広島文理大)

積分論其ノ他ヘノ應用ヲ顧慮シテ regular vector lattice ニ關スル二三ノ事実ニツイテ述ベタイ。

§1. 定理1. Bochner ノ條件[1] (次ニ示ス(α))ヲ

(1) S. Bochner, Proc. Nat. Acad. Sci. 26 (1940) 29-31

満足スル vector lattice ハ regular (型 K_6 ノ)[2] デアル。

(ハ) (ロ)ノ連続ニ線型ナ汎函数列 $f_n(x)$ ガ存在シ任意ノ正ノ単調列 $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots\cdots$ ニ対シ各 n ニツイテ $f_n(x_m)$ ガ有界ノトキ Vx_m ガ存在スル。

(ニ) (ハ)ヲ満足スル vector lattice ヲ X トスレバ (ハ)カラ X ハ σ-complete デアル。今 $\rho(x)$ トシテ

$$\rho(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{f(|x|)}{1+f(|x|)}$$

ト置クトキ

(i) $\rho(x) \geqq 0$, $x=0$ ノトキ ニ限リ $\rho(x)=0$

(ii) $\rho(x+y) \leqq \rho(x)+\rho(y)$

(iii) $|x|<|y|$ ノトキ $\rho(x)<\rho(y)$

(iv) $x_n \downarrow 0$ ノトキ $\rho(x_n) \to 0$

(v) $x_n > 0$, $x_n \uparrow \infty$ ノトキ

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{p\to\infty} \rho(x_{n+p}-x_n) > 0,$$

$$\lim_{\lambda\to 0} \lim_{n\to\infty} \rho(\lambda x_n) > 0$$

コレカラ X ハ型 K_6 ノ regular トナルコトヲ知ル。[3]

例. 数列空間 (s) ハ (ハ)ヲ満足スル。$f_n(x)$ トシテ x ノ n 番目ノ成分ヲ表ス数トスレバヨイ。Bochner[4] ハ L_p

---

(2) L. Kantorovitch, Recueil Math. 7 (1940) 211.

(3) L. Kantorovitch, Recueil Math. 2 (1937) 121–168.

(4) S. Bochner, 上掲

空間ハ(ハ)ヲ満足スルト述ベテオルガ此ハ正シクナイ。

次ニXヲ regular vector lattice トシテ normal ideal ノ作ル complete Boolean algebra ノ表現 Boole 空間[5]ヲ Ω トスル。簡単ノタメXガ単位eヲ有スル場合ヲ考ヘル。Ω 上非稠密点ヲ除イテ有限値ヲトル連続函数全体 $\mathcal{L}_\Omega$ ハ complete vector lattice ヲ作ルコトハ既ニ分ッテオルガXが regular ノトキ次ノ定理が成立スル。

定理2. Xが単位eヲ有スル型 K_σ ノ regular vector lattice ナラバ $\mathcal{L}_\Omega$ ハ型 K_σ ノ regular vector lattice デアル。

(証) 定理1ノ証明中ノ $\rho(x)$ ニ当ルモノヲ作レバコノ場合ト同様ノ過程ニヨッテ証明サレル。

$x \in \mathcal{L}_\Omega$ ニ対シテ $\rho(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$ ト置クベキデ、$\rho(x) \in X$ デアル。Ω ヲXヲ値域トスル測度 $\mu(E)$ ノ導入ニヨリ

$$\rho(x) = \int_\Omega \frac{|f_x(\xi^*)|}{1+|f_x(\xi^*)|} \mu|dt|$$

ト書クコトガ出来ル。コレニ依ッテS空間ノ場合ト同様ニ証明出来ルワケデアル。

例. $X=L$ トスレバ $\mathcal{L}_\Omega = S$ ヲ、$X=(l)$ トスレバ $\mathcal{L}_\Omega = (\Lambda)$ ヲ示シテオル。後ノ例ノ如クeヲ $e_i > 0$ ニ分

(5) 拙上数学談話会 998, 999. コノ中記法及ビ定義ニ従フ。

ケ $e_i = V a_i$, $e_i \wedge e_j = 0$ $(i \neq j)$, e_i ニ對スル $\mathfrak{Z}_i$ (上ノ例デハ一点カラナル) ヲ作ッテ $\mathcal{L}_{\mathfrak{Z}_i}$ ノ直和 ($\mathcal{L}_{\mathfrak{Z}} = \mathcal{L}_{\mathfrak{Z}_1} \oplus \mathcal{L}_{\mathfrak{Z}_2}$) ヲ論ズル方ガ便利ノ場合ガアル。

定理3. 定理2ノ假定ノ下ニ次ノ二ツノ命題ハ互ニ對等デアル。

(i) $x_n \in X$ ガ $x \in X = \mathcal{L}_{\mathfrak{Z}}$ デ (o)-收斂スル。

(ii) $x_n \in X$ ガ任意ノ主 ideal (X 内ノ) ガ共ニラレタトキ空デナイ部分主 ideal ガ存在シテコレニ於ケル x_n ノ成分ガ x ノソレニ (o)-收斂スル。

(注) x_n ガ (o)-有界ノトキ (i), (ii) ハ何レモ (o)-收斂ヲ表ス。(コレハ σ-complete ノ場合デモ成立スルコトデハアルガ)

(証) 定理2カラ、$\mathcal{L}_{\mathfrak{Z}}$ ノ regular ヲ利用シテコノ定理カラ X ニ新シイ收斂ノ型ガアルコトガ分ル。上例デ函數空間 L ニツイテ云ヘバ L ノ函數列ガ殆ンド総テノ点デ L ノ函數ニ收斂スルコトデアリ、今迄ノ論ゼラレナカッタモノデアル。

定義 x_n, x ガ定理3ノ (ii) ヲ満足スルトキ x_n ハ x ニ廣義ノ (o)-收斂ヲスルトイフ。

コノ概念ノ使用ニツイテハ別ノ機會ニ述ベル。

§2. 定理2ニ於テ $P(X)$ ガ vector lattice トシテ任意ノ元 $\in X = K_6^-$ (non-proper axiom ヲ満足スル[6]型ノ

regular vector lattice ノ正要素 $|x|$ が次ノ條件ヲ満足スルトキXヲスベテ K_σ^- (non-proper axiom ヲ満足スル) 型ノ regular vector lattice デアル。

(1) $|x| \geqq 0$, $x=0$ ノトキニ限リ $|x|=0$

(2) $|x+y| \leqq |x|+|y|$ $|\lambda x| = |\lambda||x|$

(3) $|x| < |y|$ ノトヤ $\|x\| < \|y\|$

(4) $x_n \downarrow 0$ ノトキ $\|x_n\| \to 0$

(5) $0 < x_n \leqq x_{n+1}$, $\|x_n\|$ ガ (0) ー有界ノトキ $\bigvee x_n$ ガ存在スル。

(証) 実数デ norm ガ定義サレタ場合ト同様デアル。

次ノXヲ K_σ^- (K_σ) 型ノ或ハ non-proper axiom ヲ満足スル regular vector lattice トシ表現シ $\mathfrak{L}$ ニヨリ $|x|^p$ $0<p<+\infty$ ヲ定義スルトキ $|x|^p \in X$ ナル如キXノ全体ヲ X^p トスレバ (スベテXナルコトハ要求シナイ、例ヘバ (L) 空間ノ場合ヲ考ヘレバ分ル) 次ノ定理ガ成立スル。

定理. Xガ regular ノトキ X^p ハ同ジ型ノ regular vector lattice デアル。

(証) 略。

---

(6) L. Kantorovitch, (3) ニ掲ゲタ論文. コノトキ K_σ 型ニナルコトガ示サレテヰル。