



Title	Symmetric group 及ビ full linear group ノ character ニツイテ
Author(s)	小暮, 勝美
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 233, p. 880-891
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74955
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1024. Symmetric group 及 full linear group / character = ツイテ

小 暮 勝 美 (東大)

談話 993, 994 と 関 聯 シ テ、對 稱 群 π_f と

full linear group $GL(n)$ / character = ツイテ, ヨク 知 ラ レ タ 結 果 ヲ 導 キ 出 ス ー ツ ノ 方 法 ヲ 述 ベ タ イ ト 思ヒマ ス。

コノ 談 話 ハ 順 序 ト シ テ ハ 上 ノ ニ ッ ノ 談 話 / 中 間 = 位 置 スルモノデ, 話ノ準備トシテハ談話 994 / §2 ヲ以テ代ヘマス(ソノ中 / character = 関スル部分 / 除外シテ). 但シソコニハ間違ガアリマシタカラ訂正シマス。第677頁中段デ F_S トカイタノハ S_F トカクコトシテ, 次頁6行目 / P_{fe} ハ $\hat{e}P_f$ ト訂正致シマス。從ツテ以下ノ §2 及ビ §4 = 現ハレル P_{fe} , P_{fa} , P_{fb} , $(P_{fc})^*$ ハ夫々 $\hat{e}P_f$, $\hat{a}P_f = bP_f$, $\hat{b}P_f = aP_f$, $(\hat{c}P_f)^*$ ト訂正シマス。

(尚ツイデナガラ、申シ添ヘマスが談話 993 デハ、どいつ文字ノ m , n トラてん文字ノ m , n トガ印刷ノ上デスツカリ區別ガツカナクナツテマヒマシタ)

I. f 階 / tensor space P_f = 於テ, full linear group $GL(n)$ デ induce サレタ linear transformation 全体 / linear closure ヲ Ω_f , 一

symmetric group $\pi_f = \exists \mathbb{K}$ linear transformation 全体 / linear closure $\Rightarrow \gamma$ ト ス
 ルト, σ, γ ハ 完全可約デ互 = 他 / commutator algebra
 デアル。

II. γ ハ π_f / group ring P / homomorphic
 + 表現 = + ヲ テ キルガ, 表現ガ $0 = 1$ ル 全体 / + ス P /
 ideal γ P^0 ト スルト $P = P_0 + P^0$ ト シテ ideal
 $P_0 \cong \gamma$ ガ キマシ。コノトキ P_0 / 左 ideal $\sigma =$ 閉
 スル構造ハ P_f / σ -subspace $\Sigma =$ 閉スル構造ト全
 ク類似シテキル。即チ σ ト Σ トハ

$$\sigma \rightarrow \hat{\sigma} P_f = \Sigma \quad (1)$$

デ一對一ニ對應シ。直和ハ直和ニ, isomorphic + ϵ
 ノハ isomorphic + ϵ / $\sim$ ト 對應スル。

$$(\sigma = p e, e^2 = e + \text{ラバ} \quad \Sigma = \hat{e} P_f \text{ ト } + \text{ル})$$

III (P / 構造)

P ハ 完全可約デアルガ, λ / f / partition

$$(\lambda): \quad f = \lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 \dots (2)$$

= 對應シテ次ノ様ニ直既約 ideal = 分解サレル。

$$P = \sum_{(\lambda)} \sigma^{(\lambda)} \quad (3)$$

$\sigma^{(\lambda)} =$ 含ッレル既約 + 左 ideal ハ (λ) + $\mathbb{K}$ partition

= 對應スル例ノ diagram カヲ作ラレタ idempotent

$$e^{(\lambda)} = \frac{1}{\mu^{(\lambda)}} c^{(\lambda)}, \quad c^{(\lambda)} = b^{(\lambda)} a^{(\lambda)}$$

デアルハワレルトコロ $\rho C^{(\lambda)} = \text{isomorphic}$ デアル。

ソレテ

$$\varepsilon^{(\lambda)} = \frac{1}{\mu^{(\lambda)^2}} \sum_{t \in \pi_f} t^{-1} C^{(\lambda)} t$$

トオケバ $\rho^{(\lambda)} = \rho \varepsilon^{(\lambda)}$, $\varepsilon^{(\lambda)^2} = \varepsilon^{(\lambda)}$ デアル。(C.G. p.126)

IV. (2) , $\text{partition } (\lambda) = \text{對應スル } C^{(\lambda)}$, $\varepsilon^{(\lambda)}$ ヲ考ヘルトキ

$$r \leq n + \lambda \quad \hat{C}^{(\lambda)} P_f \neq 0, \quad \hat{\varepsilon}^{(\lambda)} P_f \neq 0$$

$$r > n + \lambda \quad \hat{C}^{(\lambda)} P_f = 0, \quad \hat{\varepsilon}^{(\lambda)} P_f = 0$$

(C.G. p.128 参照. ソコデハ $C^{(\lambda)} P_f$ 等ヲ扱フガ、 $\hat{C}^{(\lambda)} P_f$ デモ殆ンド同様デアル)

第一ノ場合、 (λ) ヲ $\text{proper + partition}$ ト呼バウ。

尚、 $\hat{\varepsilon}^{(\lambda)}$ デアル。

V. (ρ_0 ノ構造)

ρ_0 ハ(3)カラ $\text{proper + } (\lambda) = \text{對應スル部分ダケヲ全部集メタモノ}$ デアル。 $\rho_0 = \sum_{(\lambda)} \rho \varepsilon^{(\lambda)}$, (λ) ハ proper

(証) $\varepsilon^{(\lambda)} \in \rho_0$ トラ $\rho_0 \varepsilon^{(\lambda)} = \rho \varepsilon^{(\lambda)} \neq 0$ 故 $= \Pi = \text{ヨリ}$
 $\hat{\varepsilon}^{(\lambda)} P_f \neq 0$

$$\text{又 } \varepsilon^{(\mu)} \notin \rho_0 \text{ トラ } \varepsilon^{(\mu)} \in \rho^0 \quad \therefore \varepsilon^{(\mu)} P_f = 0$$

VI. $\rho e (e^2 = e)$ ヲ表現加群トシタトキ、 π_f ノ表現ノ characterハ

$$\chi(s) = \sum_t e(t^{-1} s^{-1} t) = \sum_t e(t^{-1} s t)$$

デアル。

(証) 前半ハ C. G. p 105. 後半ハ $\chi(s)$ が class function ナルコトヨリ $\chi(s) = \chi(s^{-1})$ ナカラデアル。

VII. 上ニ於テ特ニ $e = \frac{1}{\lambda_1! \cdots \lambda_r!} a^{(\lambda)}$ トスルト $p a^{(\lambda)}$ ニヨル π_f ノ表現ノ character ヲ得ル。ソレヲ $\psi^{(\lambda)}(s)$ トカケバ

$$\sigma(s) = \sum \psi^{(\lambda)}(s) \varepsilon_1^{\lambda_1} \cdots \varepsilon_n^{\lambda_n} \quad (4)$$

トナル。但シ $\sigma(s)$ ハ s ヲ cycle デ表示シタトキニ長サ 1, 2, -----, 1 cycle が夫々 $\alpha, \beta, \cdots$ ケツタトスルト

$$\sigma(s) = \sigma_1^{\alpha} \sigma_2^{\beta} \cdots, \quad \text{但シ } \sigma_i = \varepsilon_1^i + \cdots + \varepsilon_n^i$$

トスル ($\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ ハ変数) (C. G. p 210)

VIII. $e P_f$ ヲ表現加群トシタトキノ $GL(n)$ ノ表現ノ character ハ

$$X(\lambda) = S_p(A_f U(e))$$

デアル。但シ $A_f, U(e)$ ハ夫々 A, e ニヨリ P_f ノ linear transformation, matrix トナル (ニツノキメタ座標系ヲ)

(証) $e P_f$ ノニツノ base ヲ $F_1, \cdots, F_h$ トシ, ソレ $= F_{h+1} \cdots F_n$ ナヲツケ加ヘテ P_f ノ base トスル。

$$\begin{aligned} A(F_1, \cdots, F_h, F_{h+1}, \cdots, F_n) \\ = (F_1, \cdots, F_h, \cdots, F_{n_f}) \begin{pmatrix} \mathbb{I}(\lambda) & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

両辺 = e を operate する

$$eA(F_1, \dots, F_k, \dots, F_{n+1})$$

$$= (F_1, \dots, F_k, eF_{k+1}, \dots, eF_{n+1}) \begin{pmatrix} T(A) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$= (F_1, \dots, F_k, F_{k+1}, \dots, F_{n+1}) \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(A) & * \\ & 0 & * \end{pmatrix}$$

$$= (F_1, \dots, F_k, F_{k+1}, \dots, F_{n+1}) \begin{pmatrix} T(A) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

さて $X(A) = S_p(T(A))$ がアルが上式ヨリ, $\therefore$ eA
 $=$ $\exists$ P_f / linear transformation / Spur
 $=$ 等しい. 即ち $S_p(U(e)A_f) = S_p(A_f U(e))$ となる。

IX. 上 = 於て特 $\rightarrow \hat{e} = \frac{1}{\lambda_1! \dots \lambda_r!} a^{(\lambda)}$ とおく $a^{(\lambda)} P_f$
 $= \exists$ $GL(n)$ / 表現 / character が得られる ($\hat{a}^{(\lambda)}$
 $= a^{(\lambda)}$). $\therefore$ $\Psi^{(\lambda)}(A)$ とかけん

$$\Psi^{(\lambda)}(A) = u_{\lambda_1} \dots u_{\lambda_r}$$

$\text{茲} = u_{\lambda} = \sum_{d_1 + \dots + d_n = \lambda} \varepsilon_1^{d_1} \dots \varepsilon_n^{d_n}$ (λ -te Wronskische

Funktion α 等) とする. 但し ε_i は A /
characteristic roots とする。

$$(証) \quad \Psi^{(\lambda)}(A) = S_p \left(A_f U \left(\frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \dots} a^{(\lambda)} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \dots} \sum_p S_p(A_f U(p))$$

$$(\because a^{(\lambda)} = \sum_p p)$$

然レ $S_p(A_f U(s)) = \sigma(s)$ 可言ヘル (X). 故 =

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}^{(\lambda)}(A) &= \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots} \sum_p \sigma(p) \\ &= \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots} \sum_{p_1} \sigma(p_1) \sum_{p_2} \sigma(p_2) \cdots \end{aligned}$$

但シ $\sum_{p_i}$ は young diagram 第 i 行ノ文字ノミヲ
入レカヘル permutation 全体ニ亘ル和トスル。

トコロガ、ヨク知ラレヲキルヤウ =

$$u_\lambda = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \lambda} \varepsilon_1^{\alpha_1} \cdots \varepsilon_n^{\alpha_n} = \frac{1}{\lambda!} \sum_{s \in \pi_\lambda} \sigma(s)$$

(C.G. p215. 参照. ソコ = 注意サレテ
キルヤウ =, 直接証明サレル.)

$$\text{テアルカラ } \bar{\Psi}^{(\lambda)}(A) = u_{\lambda_1} u_{\lambda_2} \cdots u_{\lambda_r}$$

$$\text{X. } S_p(A_f U(s)) = \sigma(s)$$

$$(\text{証}) \quad A_f = \| a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_f j_f} \|,$$

$$U(s) = \| s_{j_1^{i_1} \cdots j_f^{i_f}} \|$$

$$\therefore A_f U(s) = \| a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_f j_f} \|$$

$$s' = r^T s r + \text{ラベ } S_p(A_f U(s')) = S_p(A_f U(s)) +$$

ルコトハ定理 I = ヨリスゲワカルカラ, $A_f U(s)$ ノ Spur

ヲトル = 當ツテハ

$$S = [(1 \ 2 \cdots p) (p+1 \cdots p+q) \cdots]^{-1}$$

トシテモヨイ。スルト

$$\begin{aligned}
 & S_p(A_f U(s)) \\
 &= S_p \| a_{i_1 j_2} a_{i_2 j_3} \cdots a_{i_p j_1} a_{i_{p+1} j_{p+2}} \cdots \| \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_f} (a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_p i_1}) (a_{i_{p+1} i_{p+2}} \cdots) \cdots \\
 &= S_p(A^p) S_p(A^q) \cdots = \sigma_p \sigma_q \cdots \\
 &= \sigma_1^\alpha \sigma_2^\beta \cdots = \sigma(s)
 \end{aligned}$$

但シ $\alpha, \beta, \dots$ は S の長サ夫々 $1, 2, \dots$ + 1 cycle
ノ箇數デアル。

(此ノ証明ハ Schur, Sitzungsbericht
(Berlin) 1927, § 1 ヲリ)

XI. コノ = 現ハレタ $S_p(A_f U(s))$ ハ又次ノ意味ヲ持ツ。

$$S_p(A_f U(s)) = \sum_{(\lambda)} \chi^{(\lambda)}(s) X^{(\lambda)}(A) \quad (\lambda) \text{ハ proper}$$

但シ $\chi^{(\lambda)}(s), X^{(\lambda)}(A)$ ハ夫々 $\rho C^{(\lambda)}, \hat{C}^{(\lambda)} P_f = \text{ヨル}$
 $\pi_f, GL(n)$ ノ表現ノ character トスル。

(証) $V, \Pi = \text{ヨリ適當} + P_f$ ノ座標系ニ対シ ρ, A_f
ハ

$$A_f = \left(\begin{array}{c} \boxed{A^{(\lambda)} \cdots A^{(\lambda)}} g^{(\lambda)} \end{array} \right)$$

トカケル $A^{(\lambda)} \wedge \hat{C}^{(\lambda)} P_f = \text{ヨル既約表現デ}$ $g^{(\lambda)}$ ハ $\rho C^{(\lambda)}$
ノ階數ニ等シイ。之ヲ簡單ニ

$$A_f = \sum_{(\lambda)} E_{g^{(\lambda)}} \times A^{(\lambda)} \quad (\lambda) \text{ is proper}$$

トカケル. ($\sum$ は コ ヲ テ ハ matrix ノ 直和, $\times$ ハ Kronecker 積, $E_{g^{(\lambda)}}$ ハ $g^{(\lambda)}$ 次ノ 単位行列)

$I = \text{ヨリ } U(s) \text{ ハ スベテ } A_f \text{ ノ 可換ダカラ}$

$U(s) = \sum B^{(\lambda)} \times E_{h^{(\lambda)}}, \quad h^{(\lambda)} \text{ ハ } A^{(\lambda)} \text{ , degree}$
 ナル形ノナス.

$B^{(\lambda)} \times E_{h^{(\lambda)}} \text{ ハ } \varepsilon^{(\lambda)} P_f = \text{ヨル } \pi_f \text{ ノ 表現} = \text{ナツテ}$
 ナルガ, $\varepsilon^{(\lambda)} P_f$ ガ $\rho \varepsilon^{(\lambda)}$ - 加群デアリ, $\rho \varepsilon^{(\lambda)}$ ノ 主單
 位元ナル $\varepsilon^{(\lambda)}$ ガ Einheits operator デアルコト
 = 注意スレバ, ρ ノ 既約ナ部分ハ $\rho C^{(\lambda)}$ ト isomorphic.
 然ルニ一方 $B^{(\lambda)}$ ハ 既約デアル. 故ニ $B^{(\lambda)}$ ハ $\rho C^{(\lambda)} = \text{ヨ}$
 ル π_f ノ 表現 $U^{(\lambda)}(s) = \text{等レイ}$:

$$U(s) = \sum U^{(\lambda)}(s) \times E_{h^{(\lambda)}}$$

一般ニ $(A \times B)(A, \times B,) = AA, \times BB,$ デアルコト
 = 注意スレバ

$$A_f U(s) = \sum_{(\lambda)} U^{(\lambda)}(s) \times A^{(\lambda)}$$

$$\begin{aligned} \therefore Sp(A_f U(s)) &= \sum_{(\lambda)} Sp(U^{(\lambda)}(s)) Sp(A^{(\lambda)}) \\ &= \sum_{(\lambda)} \chi^{(\lambda)}(s) \chi^{(\lambda)}(\Lambda) \end{aligned}$$

但シコノ $\sum$ ハ 普通ノ和デアル.

Ⅳ. $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ ヲ 変数ト考ヘタトキ $\chi^{(\lambda)}(\Lambda)$ ヲ $\chi^{(\lambda)}$ ト
 カケバ

$$\sigma(s) = \sum_{(\lambda)} \chi^{(\lambda)}(s) X^{(\lambda)}$$

(証) $\Sigma, \Xi = \exists \lambda \forall \exists \lambda, (X^{(\lambda)}, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n$
ノ f 次ノ 同次對稱式 + ルコト明カデアル)

XIII. $l_i = \lambda_i + (n-i)$ ($i=1, \dots, n$) トレ, 又 $|\epsilon_i^{l_i}|$
+ ル行列式ヲ $|\epsilon^{l_1} \dots \epsilon^{l_n}|$ トイフ風ニカクコト=
スレバ

$$\frac{|\epsilon^{l_1} \dots \epsilon^{l_n}|}{|\epsilon^{n-1} \dots \epsilon^0|} = |u_{\lambda_i - i + j}|$$

$$(u_p = \begin{cases} 1 & p=0 \\ 0 & p < 0 \end{cases} \text{トスル})$$

トナルコトハヨリ知ラレテキル. (C.G. p. 203) 之レヲ
 $\tilde{X}^{(\lambda)}$ トカケバ $\sigma(s)$ ハ $\tilde{X}^{(\lambda)}$, linear combination
トレテ表セル. γ ノ係数ヲ $\tilde{X}^{(\lambda)}(s)$ トカキウ.

$$\sigma(s) = \sum_{(\lambda)} \tilde{X}^{(\lambda)}(s) \tilde{X}^{(\lambda)} \quad (\lambda) \text{ハ proper}$$

(証) proper + (λ) = 對應スル $\tilde{X}^{(\lambda)}$ 全体ガ f 次,
對稱式全体ノ + ス vector space; baseヲ + スコトヲ
示セバヨイ. $\tilde{X}^{(\lambda)} = \epsilon_1^{\lambda_1} \epsilon_2^{\lambda_2} \dots \epsilon_n^{\lambda_n} + \dots$ 等
カラ $\tilde{X}^{(\lambda)}$ ガ皆独立ナルコトハ明ザアル.

f 次對稱式ノ次元ハ明カニ $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$ ($\lambda_1 \geq \dots$
 $\dots \geq \lambda_n$, $f = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$) + ル單項式ノ數デアル
カラ, ソレハ丁度 proper + (λ) ノ個數ニ等シイ.

$$X = \sum \pm \Psi(l_1 - r_1, \dots, l_n - r_n)$$

$$\tilde{x}^{(\lambda)} = \sum \pm \psi(l_1 - r_1, \dots, l_n - r_n)$$

但しコノ和ハ alternating sum トスル — 即チ

$r_1, \dots, r_n$ ハ $1, \dots, n$ ノ permutation デ, ψ レガ even + ルカ odd + ルカ = 奇ジテ $\pm$ ハ + カ - テ
 トル. 又 $\Psi(l_1 - r_1, \dots, l_n - r_n)$ ハ $l_1 - r_1, \dots, l_n - r_n$
 + ル partition (コノマデハ大イサノ順ニナツテキ
 + イ) $\gamma(\lambda)$ トスルトキ $\tilde{x}^{(\lambda)}$ ヲ意味スルモノトスル.
 $\psi(l_1 - r_1, \dots, l_n - r_n)$ ニ同様.

$$\begin{aligned} \text{(証)} \quad \tilde{x}^{(\lambda)} &= \sum \pm u_{l_1 - r_1} \dots u_{l_n - r_n} \\ &= \sum \pm \Psi(l_1 - r_1, \dots, l_n - r_n) \quad (\text{IX} = \text{ヨル}) \end{aligned}$$

$$\tilde{x}^{(\lambda)}(s) \text{ ノ } \sigma(s) = \sum_{(\lambda)} \tilde{x}^{(\lambda')}(s) \tilde{x}^{(\lambda)} \text{ ノ 係数ト}$$

シテ定義サレタノデアルカラ

$$\sigma(s) \varepsilon^{n-1} \dots \varepsilon^0 = \sum \tilde{x}^{(\lambda')}(s) \varepsilon^{l_1} \dots \varepsilon^{l_n}$$

$$\begin{aligned} \text{VII} = \text{ヨ} \text{ 左辺} &= \sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_n = f} \psi^{(\lambda)}(s) \varepsilon_1^{\lambda_1} \dots \varepsilon_n^{\lambda_n} \sum \pm \varepsilon_1^{r_1} \dots \varepsilon_n^{r_n} \\ &= \sum \pm \psi^{(\lambda)}(s) \varepsilon_1^{\lambda_1 + r_1} \dots \varepsilon_n^{\lambda_n + r_n} \end{aligned}$$

右辺, $\varepsilon_1^{l_1} \dots \varepsilon_n^{l_n}$ ノ 係数ヲ比較シテ

$$\tilde{x}^{(\lambda)}(s) = \sum \pm \psi(l_1 - r_1, \dots, l_n - r_n)(s)$$

IV. $pa^{(\lambda)} =$ 含マレル既約部分ハソレゾレ $fC^{(\mu)} = \text{iso-morphic}$ デガ, コノトキ $(\mu) \leq (\lambda)$ デアル. (partition
 ノ位ノツケ方ハ普通ノ通り)

$$\text{(証)} \quad c^{(\mu)} pa^{(\lambda)} = 0 \quad (\mu) < (\lambda)$$

$$c^{(\lambda)} p a^{(\lambda)} \neq 0$$

がカラデアル (C. G. p. 124, (3.4))

$$\text{XVI. } \tilde{\chi}^{(\lambda)} = \chi^{(\lambda)}, \quad \tilde{\chi}^{(\lambda)}(s) = \chi^{(\lambda)}(s)$$

(証) XIV = ヨリ $\tilde{\chi}^{(\lambda)}, \tilde{\chi}^{(\lambda)}$ は夫々 compound character Ψ, ψ , linear combination デ表ハサレルカラ, 従ッテ又 primitive character χ , χ デ表サレル. $\tilde{\chi}^{(\lambda)}$ / 方ヲマトナテ matrix Λ ヲ使ヒ

$$(\tilde{\chi}^{(\lambda_1)}, \dots, \tilde{\chi}^{(\lambda_r)}, \dots, \tilde{\chi}^{(\lambda_s)}) = (\chi^{(\lambda_1)}, \dots, \chi^{(\lambda_s)}) \Lambda \dots (5)$$

トカケバ, $(\lambda_1) > \dots > (\lambda_r) > \dots > (\lambda_s)$ トスルト Λ ハ

$\Lambda = (\lambda_{ij}) \quad \lambda_{ij} = 0, \quad i < j \quad \text{ナル形トナル:}$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

例トナレバ

$$(\tilde{\chi}^{(\lambda_1)}, \dots, \tilde{\chi}^{(\lambda_r)}) = (\Psi^{(\lambda_1)}, \dots, \Psi^{(\lambda_r)}) \Lambda_1,$$

$$(\Psi^{(\lambda_1)}, \dots, \Psi^{(\lambda_r)}) = (\chi^{(\lambda_1)}, \dots, \chi^{(\lambda_r)}) \Lambda_2$$

トスルト Λ_1, Λ_2 ハ共ニ上記ノ型ノ matrix デアリ (Λ_2

ノ方 XIV, II カラ明カ. Λ_1 ノ方ハ XIV ノ第一式カラ見エル)

$\Lambda_2 \Lambda_1 = \Lambda$ がカラデアル. 又 Λ_1, Λ_2 ノ形カラ明カナマシ

ニ, $\lambda_{ii} > 0$ デアル. 又 XIII, XV = ヨリ, 同ジ Λ ヲ用キ

テ

$$(\tilde{\chi}^{(\lambda_1)}, \dots, \tilde{\chi}^{(\lambda_r)}) = (\chi^{(\lambda_1)}, \dots, \chi^{(\lambda_r)}) \Lambda$$

故ニ XIV, XIII ト併セテ

$$(X^{(\lambda)} \dots X^{(\mu)}) \begin{pmatrix} \chi^{(\lambda)}(s) \\ \vdots \\ \chi^{(\mu)}(s) \end{pmatrix} = (X^{(\lambda)} \dots X^{(\mu)}) \Lambda \Lambda' \begin{pmatrix} \chi^{(\lambda)}(s) \\ \vdots \\ \chi^{(\mu)}(s) \end{pmatrix}$$

但し Λ' は Λ を transpose したモノとする。

$X^{(\lambda)}$ は独立である。(5)より)。又 $\chi^{(\lambda)}(s) \in$ 一次独立。

故 $\Lambda \Lambda' = E$. $\Lambda' = \Lambda^{-1}$, Λ の型を考慮すれば Λ は diagonal matrix である。 $\Lambda \Lambda' = E$ が故に diagonal element λ_{ii} は $\lambda_{ii}^2 = 1$. $\lambda_{ii} > 0$ が故に $\lambda_{ii} = 1$. $\therefore \Lambda = E$ 故 $\tilde{X}^{(\lambda)} = X^{(\lambda)}$, $\tilde{\chi}^{(\lambda)} = \chi^{(\lambda)}$ を得る。即ち

XVII. (結論)

$\hat{C}^{(\lambda)} P_f =$ 有理 $GL(n)$, 表現, character (primitive) である。

$$X^{(\lambda)}(A) = \frac{|\varepsilon^{\lambda_1} \dots \varepsilon^{\lambda_n}|}{|\varepsilon^{\mu_1} \dots \varepsilon^{\mu_n}|} \quad (= |\mu \lambda_i - i + j|)$$

である。よって $\rho C^{(\lambda)} =$ 有理 τC_f , 表現, character を $\chi^{(\lambda)}(s)$ とすれば

$$\sigma(s) = \sum_{(\lambda)} \chi^{(\lambda)}(s) X^{(\lambda)}(A) \quad (\lambda) \text{ は proper}$$

なる関係が成立する。

—— (終り) ——