OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Symmetric group 及ビ full linear group ノ character ニツイテ
Author(s)	小暮, 勝美
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 233, p. 880-891
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74955
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1024. Symmetric group 及び full linear group の character について

小暮 勝美 (東大)

談話 993, 994 と関連して、對称群 $\mathfrak{S}_f$ と full linear group $GL(n)$ の character について、よく知られた結果を導き出すための方法を述べたいと思います。

この談話は順序としては上の二つの談話の中間に位置するものですが、話の準備としては談話 994 の §2 を以て代えます（その中の character に関する部分の除外して）. 但しそこには間違があり又分かり難いので訂正します。第 667 頁中段で F_S とかいたのは SF とかくべきであって、次頁 6 行目の $P_f e$ は $\hat{e} P_f$ と訂正致します。従って以下の §2 及び §4 に現われる $P_f e$, $P_f b$, $P_f ba$, $(P_f c)^*$ は夫々 $\hat{e} P_f$, $\hat{b} P_f = b P_f$, $\hat{ba} P_f = ab P_f$, $(\hat{c} P_f)^*$ と訂正します。

（尚ついでながら、申し添えますが談話 993 では、ビいつ文字の m, n とうてん文字の m, n とが印刷の上でスッカリ区別がつかなくなってしまいました）

I. f 階の tensor space P_f に於て、full linear group $GL(n)$ で induce される linear transformation 全体の linear closure を $\mathfrak{A}$, 一方

symmetric group π_f ヲル linear transformation 全体ノ linear closure ヲ γ トスルト，α，γ ハ完全可約デ互ニ他ノ commutator algebra デアル。

II. γ ハ π_f ノ group ring ρ ノ homomorphic ナ表現ニナッテヰルが，表現ガ 0 ニナル全体ノナス ρ ノ ideal ヲ ρ^0 トスルト $\rho = \rho_0 + \rho^0$ トシテ ideal $\rho_0 \cong \gamma$ ガキマル．コノトキ ρ_0 ノ左 ideal σ ニ関スル構造ハ P_f ノ α-subspace Σ ニ関スル構造ト全ク類似シテヰル．即チ σ ト Σ トハ

$$\sigma \longrightarrow \hat{e} P_f = \Sigma \qquad (1)$$

デ一対一ニ対応シ，直和ハ直和ニ，isomorphic ナモノハ isomorphic ナモノヘト対応スル。

$(\sigma = \rho e,\ e^2 = e$ ナラバ $\Sigma = \hat{e} P_f$ トナル$)$

III （ρ ノ構造）

ρ ハ完全可約デアルガ，ソレハ f ノ partition

$$(\lambda):\quad f = \lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r$$

$$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_r > 0 \quad \cdots (2)$$

ニ対応シテ次ノ様ニ直既約 ideal ニ分解サレル。

$$\rho = \sum_{(\lambda)} \alpha^{(\lambda)} \qquad (3)$$

$\alpha^{(\lambda)}$ ニ含マレル既約ナ左 ideal ハ (λ) ナル partition ニ対応スル例ノ diagram カラ作ラレタ idempotent

$$e^{(\lambda)} = \frac{1}{\mu^{(\lambda)}} c^{(\lambda)},\quad c^{(\lambda)} = b^{(\lambda)} a^{(\lambda)}$$

デ廣ヘヲレルトコロノ $\rho C^{(\lambda)}$ = isomorphic デアル。

ソシテ

$$\varepsilon^{(\lambda)} = \frac{1}{\mu^{(\lambda)}} \sum_{t \in \Pi_f} t^{-1} C^{(\lambda)} t$$

トオケバ $\alpha^{(\lambda)} = \rho \varepsilon^{(\lambda)}$, $\varepsilon^{(\lambda)2} = \varepsilon^{(\lambda)}$ デアル. (C.G. p.126)

Ⅳ. (2) ノ partition (λ) ニ對應スル $C^{(\lambda)}$, $\varepsilon^{(\lambda)}$ ヲ考ヘルトキ

$r \leqq n$ ナラバ $\hat{C}^{(\lambda)} P_f \neq 0$, $\hat{\varepsilon}^{(\lambda)} P_f \neq 0$

$r > n$ ナラバ $\hat{C}^{(\lambda)} P_f = 0$, $\hat{\varepsilon}^{(\lambda)} P_f = 0$

(C. G. P. 128 參照. ソコデハ $C^{(\lambda)} P_f$ 等ヲ扱フガ、$\hat{C}^{(\lambda)} P_f$ デモ殆ンド同樣デアル)

第一ノ場合ノ (λ) ヲ proper ナ partition ト呼ベウ。

尚, $\hat{\varepsilon}^{(\lambda)}$ デアル。

Ⅴ. (ρ_0 ノ構造)

ρ_0 ハ (3) カラ proper ナル (λ) ニ對應スル部分ダケヲ全部集メタモノデアル. $\rho_0 = \sum_{(\lambda)} \rho \varepsilon^{(\lambda)}$, (λ) ハ proper

(証) $\varepsilon^{(\lambda)} \in \rho_0$ ナラ $\rho_0 \varepsilon^{(\lambda)} = \rho \varepsilon^{(\lambda)} \neq 0$ 故ニ Ⅱ ニヨリ $\hat{\varepsilon}^{(\lambda)} P_f \neq 0$

又 $\varepsilon^{(\mu)} \notin \rho_0$ ナラ $\varepsilon^{(\mu)} \in \rho^0$ ∴ $\varepsilon^{(\mu)} P_f = 0$

Ⅵ. ρe ($e^2 = e$) ヲ表現加群トシタトキノ Π_f ノ表現ノ character ハ

$$\chi(S)=\sum_t e(t^{-1}S^{-1}t)=\sum_t \varepsilon(t^{-1}St)$$

デアル。

(証) 前半ハ C. G. p 105. 後半ハ $\chi(S)$ ガ class function ナルコトヨリ $\chi(S)=\chi(S^{-1})$ ダカラデアル.

Ⅶ. 上ニ於テ特ニ $e=\frac{1}{\lambda_1!\cdots\lambda_r!}$ $a^{(\lambda)}$ トスルト $\rho a^{(\lambda)}$ ニヨル π_f ノ表現ノ character ヲ得ル. ソレヲ $\psi^{(\lambda)}(S)$ トカケバ

$$\sigma(S)=\sum \psi^{(\lambda)}(S)\varepsilon_1^{\lambda_1}\cdots\varepsilon_n^{\lambda_n} \qquad (4)$$

トナル. 但シ $\sigma(S)$ ハ S ヲ cycle デ表示シタトキニ長サ 1, 2, ⋯⋯ ノ cycle ガ夫々 $\alpha, \beta, \cdots\cdots$ ケアッタトスルト

$\sigma(S)=\sigma_1^{\alpha}\sigma_2^{\beta}\cdots\cdots$, 但シ $\sigma_i=\varepsilon_1^i+\cdots\cdots+\varepsilon_n^i$ トスル ($\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_n$ ハ変数) (C. G. p 210)

Ⅷ. eP_f ヲ表現加群トシタトキノ $GL_1(n)$ ノ表現ノ character ハ

$$X(A)=Sp(A_f U(e))$$

デアル、但シ A_f, $U(e)$ ハ夫々 A, e ニヨリ P_f ノ linear transformation ノ matrix トスル (ーツノキメタ座標系デ)

(証) eP_f ノーツノ base ヲ $F_1, \cdots\cdots, F_h$ トシ, ソレニ $F_{h+1}\cdots\cdots F_{nf}$ ヲツケ加ヘテ P_f ノ base トスル,

$$A(F_1, \cdots\cdots, F_h, F_{h+1}, \cdots\cdots, F_{nf})$$
$$=(F_1, \cdots\cdots, F_h, \cdots\cdots F_{nf})\begin{pmatrix} \Pi(A) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

両辺= e_f operate スルト

$$eA(F_1, \cdots\cdots, F_k, \cdots\cdots F_n) = (F_1 \cdots F_k, eF_{k+1} \cdots eF_n) \begin{pmatrix} T(A) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$= (F_1 \cdots F_k, F_{k+1}, \cdots F_n) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & * \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline 0 & & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} T(A) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$= (F_1 \cdots F_k, F_{k+1} \cdots F_n) \begin{pmatrix} T(A) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

サテ $X(A) = S_p(T(A))$ デアルガ上式ヨリ，ソレハ eA ニヨル P_f ノ linear transformation ノ Spur ニ等シイ．即チ $Sp(U(e) A_f) = Sp(A_f U(e))$ デアル。

区．上ニ於テ特ニ $\hat{e} = \frac{1}{\lambda_1! \cdots \lambda_r!} a^{(\lambda)}$ トオクト $a^{(\lambda)} P_f$ ニヨル $GL(n)$ ノ表現ノ character ガ得ラレル（$\hat{a}^{(\lambda)} = a^{(\lambda)}$）．ソレヲ $\Psi^{(\lambda)}(A)$ トカケバ

$$\Psi^{(\lambda)}(A) = u_{\lambda_1} \cdots u_{\lambda_r}$$

茲ニ $u_\lambda = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \lambda} \varepsilon_1^{\alpha_1} \cdots \varepsilon_n^{\alpha_n}$ （λ-te Wronskische Funktion aleph）トスル．但シ ε_i ハ A ノ characteristic roots トスル。

（証） $\Psi^{(\lambda)}(A) = Sp\left(A_f U\left(\frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots} a^{(\lambda)}\right)\right)$

$$= \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots} \sum_p Sp(A_f U(p))$$

$$\left(\because\ a^{(\lambda)}=\sum_{p} p\right)$$

然ルニ $S_p(A_f U(S))=\sigma(S)$ ガ言ヘル（又）．故ニ

$$\Psi^{(\lambda)}(A)=\frac{1}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\cdots}\sum_{p}\sigma(p)$$

$$=\frac{1}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\cdots}\sum_{p_1}\sigma(p_1)\sum_{p_2}\sigma(p_2)\cdots\cdots$$

但シ $\sum_{p_i}$ ハ Young ノ diagram デ第 i 行ノ文字ノミヲ入レカヘル permutation 全体ニ亘ル和トスル。

トコロガ，ヨク知ラレタキルマウー

$$u_\lambda=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\lambda}\xi_1^{\alpha_1}\cdots\cdots\xi_n^{\alpha_n}=\frac{1}{\lambda!}\sum_{S\in\mathfrak{S}_\lambda}\sigma(S)$$

（C.G. p215. 参照．ソコ＝注意サレテキルマウニ，直接証明サレル．）

デアルカラ $\Psi^{(\lambda)}(A)=u_{\lambda_1}u_{\lambda_2}\cdots\cdots u_{\lambda_r}$

又．$S_p(A_f U(S))=\sigma(S)$

（証）$A_f=\| a_{i_1 j_1}\cdots\cdots a_{i_f j_f}\|$，

$$U(S)=\left\| \delta^{i_1'\cdots\cdots i_f'}_{j_1\cdots\cdots j_f}\right\|$$

$$\therefore\ A_f U(S)=\| a_{i_1' j_1}\cdots\cdots a_{i_f' j_f}\|$$

$S'=r^{-1}Sr$ トラバ $S_p(A_f U(S'))=S_p(A_f U(S))$ トナルコトハ定理Ⅰニヨリスグワカルカラ，$A_f U(S)$ ノ Spur ヲトルニ当ッテハ

$$S=[(1\ 2\cdots\cdots p)(p+1\cdots\cdots p+q)\cdots\cdots]^{-1}$$

トシテモヨイ。スルト

$$Sp(A_f U(S))$$
$$= Sp\| a_{i_1 j_2} a_{i_2 j_3} \cdots a_{i_p j_1} a_{i_{p+1} j_{p+2}} \cdots \|$$
$$= \sum_{i_1, \cdots i_f} (a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_p i_1})(a_{i_{p+1} i_{p+2}} \cdots) \cdots$$
$$= Sp(A^p) Sp(A^q) \cdots = \sigma_p \sigma_q \cdots$$
$$= \sigma_1^{\alpha} \sigma_2^{\beta} \cdots = \sigma(S)$$

但シ $\alpha, \beta \cdots$ ハ S ノ長サ夫々 $1, 2, \cdots$ ナル cycle ノ個数デアル.

(此ノ証明ハ Schur, Sitzungsbericht (Berlin) 1927 ノ §1 ヨリ)

XI. コゝニ現ハレタ $Sp(A_f U(S))$ ハ又次ノ意味ヲ持ツ.

$$Sp(A_f U(S)) = \sum_{(\lambda)} \chi^{(\lambda)}(S) X^{(\lambda)}(A) \quad (\lambda) \text{ は proper}$$

但シ $\chi^{(\lambda)}(S)$, $X^{(\lambda)}(A)$ ハ夫々 $\rho c^{(\lambda)}$, $\hat{c}^{(\lambda)} P_f$ ニヨル π_f, $GL(n)$ ノ表現ノ character トスル。

(証) V, II ニヨリ適当ナ P_f ノ座標系ニ対シテノミ A_f ハ

$$A_f = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \boxed{\begin{matrix} A^{(\lambda)} & \\ & \ddots \\ & & A^{(\lambda)} \end{matrix}} & g^{(\lambda)}\text{ケ} \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

トカケル $A^{(\lambda)}$ ハ $\hat{c}^{(\lambda)} P_f$ ニヨル既約表現デ $g^{(\lambda)}$ ハ $\rho c^{(\lambda)}$ ノ階数ニ等シイ. 之ヲ簡単ニ

$$A_f = \sum_{(\lambda)} E_{g^{(\lambda)}} \times A^{(\lambda)} \qquad (\lambda)\ \text{ハ proper}$$

トカケル.(Σ ハコユデハ matrix ノ直和, × ハ Kronecker 積, $E_{g^{(\lambda)}}$ ハ $g^{(\lambda)}$ 次ノ単位行列)

Iニヨリ $U(s)$ ハスベテノ A_f ノ可換ダカラ

$$U(s) = \sum B^{(\lambda)} \times E_{k^{(\lambda)}}, \quad k^{(\lambda)}, A^{(\lambda)}, \text{degree}$$

ナル形ノナス.

$B^{(\lambda)} \times E_{k^{(\lambda)}}$ ハ $\varepsilon^{(\lambda)} P_f$ ヨル π_f ノ表現ニナッテヰルガ, $\varepsilon^{(\lambda)} P_f$ が $\rho\varepsilon^{(\lambda)}$ ー加群デアリ, $\rho\varepsilon^{(\lambda)}$ ノ主単位元ナル $\varepsilon^{(\lambda)}$ が Einheits operator デアルコトニ注意スレバ, ソノ既約ナ部分ハ $\rho c^{(\lambda)}$ ト isomorphic. 然ルニ一方 $B^{(\lambda)}$ ハ既約デアル. 故ニ $B^{(\lambda)}$ ハ $\rho c^{(\lambda)}$ ニヨル π_f ノ表現 $U^{(\lambda)}(S)$ ニ等シイ:

$$U(s) = \sum U^{(\lambda)}(s) \times E_{k^{(\lambda)}}$$

一般ニ $(A \times B)(A_1 \times B_1) = AA_1 \times BB_1$ デアルコトニ注意スレバ

$$A_f U(s) = \sum_{(\lambda)} U^{(\lambda)}(s) \times A^{(\lambda)}$$

$$\therefore \quad Sp(A_f U(s)) = \sum_{(\lambda)} Sp(U^{(\lambda)}(s)) \, Sp(A^{(\lambda)})$$

$$= \sum_{(\lambda)} \chi^{(\lambda)}(s) \, X^{(\lambda)}(A)$$

但シコノ Σ ハ普通ノ和デアル。

XII. $\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_n$ ヲ変数ト考ヘタトキ $X^{(\lambda)}(A)$ ヲ $X^{(\lambda)}$ トカケバ

$$\sigma(S) = \sum_{(\lambda)} \chi^{(\lambda)}(S)\, X^{(\lambda)}$$

(証) X, XI ニヨレバヨイ. ($X^{(\lambda)}$, $\xi_1, \cdots\cdots, \xi_n$ ノ f 次ノ同次對称式トルコト明カデアル)

XIII. $l_i = \lambda_i + (n-i)$ $(i = 1, \cdots\cdots, n)$ トレ, 又 $|\xi_i^{l_k}|$ トル行列式ヲ $|\xi^{l_1} \cdots\cdots \xi^{l_n}|$ トイフ風ニカクコトニスレバ

$$\frac{|\xi^{l_1} \cdots\cdots \xi^{l_n}|}{|\xi^{n-1} \cdots\cdots \xi^{0}|} = |u_{\lambda_i - i + j}|$$

$$\left(u_\rho = \begin{cases} 1 & \rho = 0 \\ 0 & \rho < 0 \text{ トスル} \end{cases}\right)$$

トナルコトハヨリ知ラレテキル. (C.G. P.203) 之レヲ $\widetilde{X}^{(\lambda)}$ トカケバ $\sigma(S)$ ハ $\widetilde{X}^{(\lambda)}$ ノ linear combination トシテ表セル. ソノ係数ヲ $\widehat{X}^{(\lambda)}(S)$ トカクト,

$$\sigma(S) = \sum_{(\lambda)} \widehat{X}^{(\lambda)}(S)\, \widetilde{X}^{(\lambda)} \qquad (\lambda) \text{ ハ proper}$$

(証) proper + (λ) ニ對應スル $\widetilde{X}^{(\lambda)}$ 全体ガ f 次ノ對称式全体ノナス vector space ; base ヲナスコトヲ示セバヨイ. $\widetilde{X}^{(\lambda)} = \xi_1^{\lambda_1} \xi_2^{\lambda_2} \cdots\cdots \xi_n^{\lambda_n} + \cdots\cdots$ ガカラ $\widetilde{X}^{(\lambda)}$ ガ皆独立ナルコトハ明デアル.

f 次對称式ノ次元ハ明カニ $c_1^{\lambda_1} \cdots\cdots c_n^{\lambda_n}$ $(\lambda_1 \geqq \cdots\cdots \geqq \lambda_n,\ f = \lambda_1 + \cdots\cdots + \lambda_n)$ ナル單項式ノ數デアルカラ, ソレハ丁度 proper ナ (λ) ノ個数ニ等シイ.

XIV. $\widetilde{X} = \Sigma \pm \Pi^{(l_1 - r_1, \cdots\cdots, l_n - r_n)}$

$$\widetilde{\chi}^{(\lambda)} = \sum \pm \psi^{(l_1 - r_1, \cdots\cdots, l_n - r_n)}$$

但シコノ和ハ alternating sum トスル ── 即チ $r_1, \cdots\cdots, r_n$ ハ $1, \cdots\cdots, n$ ノ permutation デ，ソレガ even ナルカ odd ナルカニ応ジテ $\pm$ ハ $+$ カ $-$ ヲトル．又 $\varphi^{(l_1 - r_1, \cdots\cdots, l_n - r_n)}$ ハ $l_1 - r_1, \cdots\cdots, l_n - r_n$ ナル partition（コノマヽデハ大イサノ順ニナッテヰナイ）ヲ (λ) トスルトキ $\varphi^{(\lambda)}$ ヲ意味スルモノトスル．$\psi(l_1 - r_1, \cdots\cdots, l_n - r_n)$ モ同様。

(証) $$\widetilde{\chi}^{(\lambda)} = \sum \pm u_{l_1 - r_1} \cdots\cdots u_{l_n - r_n}$$
$$= \sum \pm \varphi^{(l_1 - r_1, \cdots\cdots, l_n - r_n)} \qquad (\text{IX ニヨル})$$

$\widetilde{\chi}^{(\lambda)}(S)$ ノ方ハ $\sigma(S) = \sum_{(\lambda)} \widetilde{\alpha}^{(\lambda)}(S)\, \widetilde{X}^{(\lambda)}$ ノ係数トシテ定義サレタノデアルカラ

$$\sigma|S|\, \varepsilon^{n-1} \cdots\cdots \varepsilon^0 | = \sum \widetilde{\chi}^{(\lambda)}(S) | \varepsilon^{l_1} \cdots\cdots \varepsilon^{l_n} |$$

VII ニヨリ 左辺 $= \sum_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = f} \psi^{(\lambda)}(S)\, \varepsilon_1^{\lambda_1} \cdots\cdots \varepsilon_n^{\lambda_n} \sum \pm \varepsilon_1^{r_1} \cdots\cdots \varepsilon_n^{r_n}$

$$= \sum \pm \psi^{(\lambda)}(S)\, \varepsilon_1^{\lambda_1 + r_1} \cdots\cdots \varepsilon_n^{\lambda_n + r_n}$$

両辺ノ $\varepsilon_1^{l_1} \cdots\cdots \varepsilon_n^{l_n}$ ノ係数ヲ比較シテ

$$\widetilde{\chi}^{(\lambda)}(S) = \sum \pm \psi^{(l_1 - r_1, \cdots\cdots, l_n - r_n)}(S)$$

XV. $pa^{(\lambda)}$ ニ含マレル既約部分ハソレゾレ $pC^{(\mu)}$ ニ isomorphic ダガ，コノトキ $(\mu) \geqq (\lambda)$ デアル．（partition ノ位ノツケ方ハ普通ノ通リ）

(証) $$c^{(\mu)}\, pa^{(\lambda)} = 0 \qquad (\mu) < (\lambda)$$

$$c^{(\lambda)}\rho a^{(\lambda)} \neq 0$$

ダカラデアル（C. G. p.124，(3.4)）

XVI. $\tilde{\chi}^{(\lambda)} = \chi^{(\lambda)}$, $\tilde{\chi}^{(\lambda)}(s) = \chi^{(\lambda)}(s)$

(証) XIV ヨリ $\tilde{\chi}^{(\lambda)}$, $\tilde{\chi}^{(\lambda)}$ ハ夫々 compound character Ψ, ψ, linear combination デ表ハサレルカラ，従ッテ又 primitive + character χ, χ デ表サレル．$\tilde{\chi}^{(\lambda)}$ ノ方ヲマトメテ matrix Λ ヲ使ヒ

$$(\tilde{\chi}^{(\alpha)}, \cdots, \tilde{\chi}^{(\lambda)}, \cdots, \tilde{\chi}^{(\omega)}) = (\chi^{(\alpha)} \cdots \chi^{(\omega)})\Lambda \cdots (5)$$

トカケバ，$(\alpha) > \cdots > (\lambda) > \cdots > (\omega)$ トスルト Λ ハ

$\Lambda = (\lambda_{ij})$ $\lambda_{ij} = 0$, $i < j$ ナル形トナル：

$$\Lambda = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

同トナレバ

$$(\tilde{\chi}^{(\alpha)} \cdots \tilde{\chi}^{(\omega)}) = (\Psi^{(\alpha)} \cdots \Psi^{(\omega)})\Lambda_1,$$

$$(\Psi^{(\alpha)} \cdots \Psi^{(\omega)}) = (\chi^{(\alpha)} \cdots \chi^{(\omega)})\Lambda_2$$

トスルト Λ_1, Λ_2 ハ共ニ上記ノ型ノ matrix デアリ（Λ_2 ノ方 XV, IIカラ明カ．Λ_1 ノ方ハ XIV ノ第一式オラ見エル）$\Lambda_2\Lambda_1 = \Lambda$ ダカラデアル．又 Λ_1, Λ_2 ノ形カラ明カナヨウニ，$\lambda_{ii} > 0$ デアル．又 XIII, XV ニヨリ，同ジ人ヲ用イテ

$$(\tilde{\chi}^{(\alpha)} \cdots \tilde{\chi}^{(\omega)}) = (\chi^{(\alpha)} \cdots \chi^{(\omega)})\Lambda$$

故ニ XII, XIII ト併セテ

$$(X^{(d)}\cdots X^{(w)})\begin{pmatrix}\chi^{(d)}(S)\\ \vdots\\ \chi^{(w)}(S)\end{pmatrix}=(X^{(d)}\cdots X^{(w)})\Lambda\Lambda'\begin{pmatrix}\chi^{(d)}(S)\\ \vdots\\ \chi^{(w)}(S)\end{pmatrix}$$

但シΛ'ハΛヲ transpose シタモノトスル。

$X^{(\lambda)}$ハ独立デアル。（(5)ヨリ）. 又更ニ$\chi^{(\lambda)}(S)$モ一次独立.

故ニ$\Lambda\Lambda'=E$. $\Lambda'=\Lambda^{-1}$, Λノ型ヲ考慮スレバ Λハ diagonal matrix デアル. $\Lambda\Lambda'=E$ダカラ diagonal element λ_{ii}ハ$\lambda_{ii}^2=1$. $\lambda_{ii}>0$ダカラ $\lambda_{ii}=1$. $\therefore\ \Lambda=E$ 故ニ$\tilde{X}^{(\lambda)}=X^{(\lambda)}$, $\tilde{X}^{(\lambda)}=\chi^{(\lambda)}$ヲ得ヲ. 即チ

XVII. （結論）

$\hat{C}^{(\lambda)}P_f$ヨル$GL(n)$ノ表現ノ character(primitive)ハ

$$X^{(\lambda)}(A)=\frac{|\varepsilon^{l_1}\cdots\varepsilon^{l_n}|}{|\varepsilon^{n-1}\cdots\varepsilon^{0}|}\quad(=|u\lambda_{i-i+j}|)$$

デアル. ソシテ$pC^{(\lambda)}$ヨルT_fノ表現ノ characterヲ$\chi^{(\lambda)}(S)$トスレバ

$$\sigma(S)=\sum_{(\lambda)}\chi^{(\lambda)}(S)X^{(\lambda)}(A)\qquad(\lambda)\text{ハ proper}$$

ナル関係ガ成立スル。

——（終リ）——