



Title	擴張セラレタ Cauchy's integral formulaノ検討
Author(s)	高須, 鶴三郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 233, p. 896-900
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74957
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1026. 擴張セラレタ Cauchy's integral formula / 検討

高須 鶴三郎 (東北大)

1°. $f(z)$, ($z = x + iy$, $j^2 = \mu + \nu j$; x, y, μ, ν は実数) / 理論ハ絶対値ト modulus トヲ区別スルコトニヨリ, Cauchy's integral formula 及び其ノ結果以外ハ安全ニ進行シ, Cauchy's integral formula モ $\nu^2 + 4\mu < 0$ / 場合ハ問題ナク, 従ッテ全複素函数論ガ拡張セラレマスガ, 円ノ代リニ楕円ガ赤ル程度ノ拡張デスカラ, 却ッテ張合ガ少イデスカ, $\nu^2 + 4\mu \rightarrow 0$ 及び > 0 / 場合ハ, Cauchy's integral formula / 成立ト, 「一度微分出来レハ何曲デモ出来ルトハ限ラナイ」コトノ矛盾ニ苦シミマシタガ, 漸ク事柄ガ透明ニナリマシタカラ, 以下其ノ検討ヲサセテ頂キマス。

2°. Algebraic = (即チ hyperbolic geometry デ共軌点對向ノ距離ガ $\frac{\pi}{2}K$ デアルコトノ, reality ヲコメテ / 完全 dual / 量ヲ4倍シテ) 知レテ居ル所ノ「一周角ガ所屬 trigonometry デ $2\pi \frac{i}{j}$ デアル」コトヲ, 所屬 polar coordinates (ρ, θ) , ($\rho = (x^2 + \nu xy - \mu y^2)^{\frac{1}{2}}$, $z = \rho e^{j\theta}$) デ

$$(1) \oint d\theta = 2\pi \frac{i}{j}$$

ト書イテモ analysis ト抵触シナイコトハ一月末号デ見

テオキマシタ通りデアリマス。

2°. 次 $= \nu^2 + 4\mu > 0$ 及 $\epsilon \rightarrow 0$ 1 場合 = 對スル新シ
 1. integral formula (3)ヲ導イテ見マス。点 $Z = x$
 $+ jy$ ヲ囲ム閉曲線 C , 平行 *isotropes* $(X-x) + j(Y$
 $-y) = \pm K, (K > 0)$ ヲ P_K ト名ツケ, C ノ内ニアル P_K
 部分ヲ P'_K , 外ニアル部分ヲ P''_K ト名ツケテオキマス, C_K
 ト P'_K トヲ囲ムレタ部分ニハ *Hüllteiler* ハアリマセン
 カラ, *Cauchy's integral theorem* (此方ニハ
 不安ハアリマセン) ハ成立シマ
 ス。積分ノ道ニハ図ノ様ノ向
 キヲ辿リマス。即チ

$$\int_{C_K - P_K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

$$(2) \int_{C_K} = \int_{P_K}$$

然ルニ *isotropes* = 平行ナ

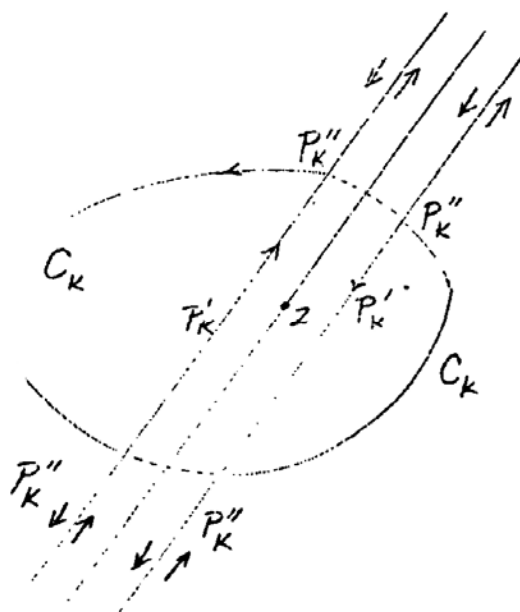
$P_K = P'_K + P''_K$ = ソウテハ $d\zeta = 0$ デスカラ

$$\int_{P'_K} = 0 \quad \text{然ツテ} \quad \lim_{K \rightarrow 0} \int_{C_K} = 0$$

仍テ次ノ新シイ *integral formula* ヲ得マス。

$$(3) \int \lim_{K \rightarrow 0} C_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

之ニハ *Cauchy's integral formula* ノ一ツノ
ausarten シタ *Gegenstück* ト見ルベキデアリマ



ス、此ノ際 $(X-x) + j(Y-y) = 0$ が *isotrople* デ
ナケレバ、 $\lim_{K \rightarrow 0} C_K$ ノ代リニ C ト書イテヨイデセウガ、
今ハ C ト書ケマセヌ。

3°. (2) ノ積分ノ

双方カラ

$$(4) \int_{C_K} + \int_{P_K''} \\ = \int_{P_K'} + \int_{P_K''} = \int_{P_K}$$

P_K' , P_K'' 上カラノ積分
ノ寄與ハ 0 デスガ、

$\log(\zeta - z)$, $\zeta - z$

ガ正負号ヲ変ズル所ニケ所 (圖ノ $\checkmark$ 及 $\cup$ 印ノ所) デ、

$$\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \text{ , 中 } \zeta - z = \rho e^{j\theta}, \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{d\rho}{\rho} + j d\theta,$$

$\theta = \pi \frac{i}{j}$ 宛ノ寄與ヲ考ヘルト、(4) カラ

$$(5) \lim_{K \rightarrow 0} \int_{C_K + P_K''} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z)$$

ガ得ラレマス。之ガ *Cauchy's integral formula*

ノ第二ノ *Analogon* デス。其ノ際 *bicomplex*

$\zeta = x + jy + jiZ + iU$, ($i^2 = -1$) ノ domain 7

R_4 ノ xy -plane ($Z=0, K=0$) = 限

$$f(\zeta) = X(x, y, 0, 0) + jY(x, y, 0, 0)$$

$$+ jiZ(x, y, 0, 0) + iU(x, y, 0, 0)$$

1 domain トシテ = 次元ヨリ上ノモノヲ考ヘタコトニナリ
マシタカラ、 i が這入ッテ来マシタ、然レ (3) がアレコト故
(5) ハ 実質ハ

$$\lim_{K \rightarrow 0} \int_{P_K''} = \lim_{K \rightarrow 0} \int_{P_K''}$$

即チ $2\pi i f(z) = 2\pi i f(z)$

ナル trivial ナ結果 = ausarten シタワケデス。

N. B. 學士記事ノ方ハ正誤表デ正シテオキマシタ。2°, 3° ノ項デ述べマシタコトハ *conjugate hyperbolas* ヲ ($\nu^2 + 4\mu > 0$ ノ場合 =) 用フル方法デモ示サレマス。

4°. $\nu^2 + 4\mu > 0$ ノ場合 =, 一度ハ微分出来ルガ二度ハ出来ヌ例ハ次ノ様ニ作レマス。 $\varphi(\eta)$ ノ連続ナルドモ微分可能デナイ実変数函数トシマス, $\psi(\eta) = \int \varphi(\eta) d\eta$ ハ一度ダケシカ微分出来ナイ函数デアリマス、之ヲ利用シテ,

$$f(z) = \{ -(\mu r + \mu \nu + \nu^2 r) + (\mu + r\nu)j + \nu r \bar{j} \} \psi(x - ry)$$

ヲ作ルト、之ハ一度ダケ微分出来テ二度以上微分出来ナイ函数デアリマス、茲ニ $\nu = j + \bar{j}$, 且ツ r ハ $r^2 = \mu + \nu r$ ノ一根ダトシマス、何トナレバ、 $z = x + jy$, $\bar{z} = x + \bar{j}y$ カラ

$$\eta = x - ry = \frac{(-\bar{j} - r)z + (j + r)\bar{z}}{j - \bar{j}}$$

トナリ,

$$f'(z) = \{ -(\mu r + \mu \nu + \nu^2 r) \\ + (\mu + r \nu) f' + \nu r \bar{f}' \} g(\eta) \frac{-\dot{r} - \nu}{\dot{r} - \dot{\nu}}$$

而シテ $f'(z)$ の存在ノ必要條件 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ が容易ニ示
サレルカラデアリマス。($\mu = 1, \nu = 0, r = 1$ 場合ヲ
窪田教授が示サレマシタ)

此ノ paradox ハ前掲ノコトヲ解決ガツタ誤デア
リマス。

Beltrami-Bompiani ノ積分公式モ上掲ノ場合ニ
準ジテ形ガ andarten シテ来マス。

4². Cauchy's integral formula = アラハ
レルイガコノ中ノアルイトハ独立行動ヲトルコトハ, $\nu^2 + 4\mu$
 < 0 ノ場合ニ成立確實ナル $Z = x + jy$ ノ時ノ formula
カラ依然トシテ云ヘマス。

終リニ, discussion ヲシテ下サツタ数氏ニ厚ク御
礼ヲ申シマス。

此、組織的ノ結果ハ相當豊富デアハリマスガ本発表ハ
慎重ヲ期シタイト思ヒマス。