OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	普通ノ Green 函數ガ存在シナイトキノ境界値問題
Author(s)	佐藤, 常三
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 233, p. 901-909
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74958
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1027. 普通ノ Green 函數ガ存在シナイトキノ境界値問題

（理研理化學研究所物理学研究室）

椎 籐 常 三

§1. 区域 $a \leqq x \leqq b$ ニ於ケル微分方程式

$$\mathfrak{L}(y) \equiv (Py')' + Q \cdot y = 0,$$

$$\mathfrak{L}(y) \equiv \mathfrak{L}(y) + \lambda y = 0$$

境界條件ヲ簡單ノタメニ

$$R[y;\ a, b] = 0$$

トシ，コレヲ滿足スルヤウナ任意ニツノ函數 y, z ハ常ニ Green 公式ニ於ケル剩餘項

(1) $$[P(yz' - y'z)]_a^b = 0$$

ナラシムルモノトス。

吾々ノ問題ハ微分方程式 $\mathfrak{L}(y) = 0$ ニゾクスル Green 函數ガ作レナイ場合ニ就テ論ズル．カクノ如キ例ハ，タトヘバ

$$\begin{cases} \mathfrak{L}(y) + \lambda y = 0, \\ A(y) + By'(a) = 0, \quad Cy(b) + Dy'(b) = 0 \end{cases}$$

ナル境界値問題ニ於テ，特ニ $\lambda = 0$ ニ應ズル解ガ $y \equiv 0$ 以外ニ存在スルトキナドデアル。（Lovitt, Linear Integral Equations, 頁 170/176）

斯クノ如キ場合ニ對スル処理法ヲ述ベラアル參考書ノウチデ Vivanti-Schwank: Lineare Integral-

Courant-Hilbert, §117, 頁205/206ヲ採ッテミルトソノ要旨ハ大体次ノ如クデアル. Hilbertノ論旨ヲ同ジデアル.
(Hilbertハ広義ノGreen函数ト称シテヰル)

$$\mathfrak{L}(y)=0, \quad R[y;a,b]=0$$

ノ解ヲ$\rho(x)$トシ, 微分方程式

$$(2) \quad \mathfrak{L}(y)=\rho(x)\rho(\xi)$$

ニ属スルGreen函数ヲ求メルトキ, コレガ存在スルモノト仮定シテG(x,ξ)トカケバ

$$(3) \quad \int_a^b \rho^2(x)\,dx=1$$

次ニ若シモ上述ノGトρトノ間ニ

$$(4) \quad \int_a^b G(x,\xi)\rho(x)\,dx=0$$

ナル関係ガ成立スルナラバ, G(x,ξ)ハ対称性ガ保証サレル.
次ニ微分方程式

$$\mathfrak{L}(y)=\rho(x)\rho(\xi)$$

ニ属スルGreen函数ガ存在スルモノトシ, コレヲΓ(x,ξ)トカケバ(3)ニヨッテ

$$(5) \quad \int_a^b \Gamma(x,\xi)\rho(x)\,dx=0$$

トナル. (4), (5)ヲ利用スルト

$$(6) \quad G(\eta,\zeta)=\Gamma(\eta,\zeta)-\lambda\int_a^b G(\eta,x)\Gamma(x,\zeta)\,dx$$

ガ得ラレル. コレハGトΓトノ間ニ相反性ガ成立スルコト

ヲ云フモノデアル。

何レノ著書ヲミテモ，微分方程式 $L(y)\equiv L(y)+\lambda y=0$ ニ属スル Green 函数ニツイテハ言及サレテオラナイヤウダシ，事実 Hilbert ノ原著ヲミテモ，Vivanti ノヲミテモ，該 Green 函数ト $\Gamma(x,\xi)$ トヲ混同シテオルヤウニ思ヘル。タトヘバ Vivanti-Schwank §1. 120，頁213/216 ニ於ケル例題ニ於テハ，$G(x,\xi)$ ニヨッテ作ラレル Fredholms 行列 $D(\lambda)$ ガ

$$D(\lambda)=\sin^2\sqrt{\lambda}$$

ト計算サレテアル。$D(\lambda)$ ハ，ソノ構成定義ヨリ明カニ $D(0)=1$ デナケレバナラナイ筈デアル。

又條件(4)ハ $G(x,\xi)$ ガ対称ナルタメノ十分條件デアル。吾々ハ此ノ点モ，モ少シ吟味スル必要ガアルヤウニ思フ。以下モコハかとなく著キツケタ批論ニ対シテ専門家ノ御教示ヲ仰ギタイト思フ。

§2. 微分方程式

$$L(y)+\lambda y=0$$

ニ属スル Green 函数ノ存在ハ許容スルモノトシ，コレヲ $\Gamma^*(x,\xi;\lambda)$ トスレバ，Green 公式ヲ用ヒテ

$$G(\eta,\zeta)=\Gamma^*(\eta,\zeta)-\lambda\int_a^b G(\eta,x)\Gamma^*(x,\zeta)\,dx-\rho(\eta)H(\zeta)$$

但シ

$$H(\zeta)=\int_a^b \Gamma^*(x,\zeta)\rho(x)\,dx$$

シカルニ G 及ビ Γ^* ノ對稱性ニヨレバ

$$H(\zeta)=\text{const.}\,\rho(\zeta)$$

トカケル．便宜上，コレヲ $H(\zeta)=\mu^{-1}\rho(\zeta)$ トカイテオケバ

$$(7)\quad G(\eta,\zeta)=\Gamma^*(\eta,\zeta)-\lambda\int_a^b G(\eta,x)\Gamma^*(x,\zeta)\,dx \qquad -\mu^{-1}\rho(\eta)\rho(\zeta)$$

$$(8)\quad \rho(\zeta)=\mu\int_a^b \Gamma^*(x,\zeta)\rho(x)\,dx$$

次ニ境界値問題

$$\mathfrak{L}(y)+\lambda y=0,\quad R[y;a,b]=0$$

ノ固有値及ビ固有函数ヲ入，$\varphi(x)$ トスレバ

$$(9)\quad \varphi(\xi)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)\varphi(x)\,dx+\rho(\xi)\int_a^b \varphi(x)\rho(x)\,dx$$

トナル．(9)ナル積分方程式ト上述ノ境界値問題トハ互ヒニ等値的デアルコトハ明カデアル．

以上ノ関係式カラ次ノ如キ定理ガ得ラレル．

定理1　境界値問題

$$(10)\quad \mathfrak{L}(y)+\lambda y=0,\quad R[y;a,b]=0$$

ニ於ケル固有値及ビ固有函数ハ入=0ヲ除ケバ，核 $G(x,\xi)$ ノ固有値及ビ固有函数ニ全ク一致スル。

証明．入及ビ φ ヲ核 G ノ固有値及ビ固有函数トスレバ，條件(4)ハ積分方程式論ノ示ストコロニヨッテ

$$\int_a^b \varphi(x)\rho(x)\,dx=0$$

ト変換サレル．コレヲ(9)ニ入レルト

$$\varphi(\xi)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)\varphi(x)\,dx+\rho(\xi)\cdot 0;$$

即チ(9)ハ成立スルカラ，λ及ビφガ(10)ノ固有値及ビ固有函数デアル。

次ニ(10)ニ於テλ(≠0)ニ應ズル固有函数ヲφトスレバ

$$\lambda\int_a^b \varphi(x)\rho(x)\,dx=\left[P(\varphi\rho'-\varphi'\rho)\right]_a^b=0$$

コレヲ(9)ニ入レルトナラバ

$$\varphi(\xi)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)\varphi(x)\,dx$$

コレハ斯クノ如キλ及ビφガ核Gニゾクスル固有値及ビ固有函数トナルコトヲ示スモノデアル。(証明終)

特ニλ=0ニ應ズル(10)ノ解ハρ(x)デアル．而カモρ(x)ハλ=0ニ應ズル唯一解デアルコトハ明カデアル．

何トナレバρ以外ニφヲ許スバソレニヨッテ作ラレル Green 函数 $\overline{G}$ ハ，ソノ構成定義カラレバ $\overline{G}+G$．然ルニ他方(6)ハGノ代リニ $\overline{G}$ ヲオイテモ成立スルカラ，相反性ニ矛盾シテクル。

次ニG(x,ξ)カラ作ラレル Fredholm 行列ヲD(λ)ト記シ，且ツ

$$g'(\lambda)/g(\lambda)=-\int_a^b \Gamma^*(x,x;\lambda)\,dx$$

トオクナラバ次ノ如キ結果ガ得ラレル.

定理2 $D(\lambda)=C_0\lambda^{-1}g(\lambda)$, $C_0^{-1}=\lim_{\lambda=0}\lambda^{-1}g(\lambda)$

何トナレバ

(8)ハ $\overline{\Gamma}(\rho)+\mu\rho=\Gamma(\rho)+(\lambda+\mu)\rho=(\lambda+\mu)\rho=0$

ト等価関係ニアル、故ニ $\mu=-\lambda$. 故ニ

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}=-\int_a^b\Gamma(x,x;\lambda)\,dx$$

シカルニ他方(7)ニ於テ

$$\overline{\Gamma}^*(\eta,\zeta)\equiv\Gamma^*(\eta,\zeta)-\mu^{-1}\rho(\eta)\rho(\zeta)$$

トオケバ條件(4)ニヨッテ

(11) $$G(\eta,\zeta)=\overline{\Gamma}^*(\eta,\zeta)-\lambda\int_a^b G(\eta,x)\,\overline{\Gamma}^*(x,\zeta)\,dx$$

トナリ, コレヘGト$\overline{\Gamma}^*$トノ相互関係ヲ示スモノデ(6)ト全ク同一ノ式デアル. 即チ $\overline{\Gamma}^*\equiv\Gamma$.

$$\therefore\quad \frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}=-\int_a^b\Gamma^*(x,x;\lambda)\,dx+\mu^{-1}\int_a^b\rho^2(x)\,dx$$

$$=\frac{g'(\lambda)}{g(\lambda)}-\lambda^{-1}$$

トナルカラデアル。

§3. 例トシテ Vivanti-Schwank, 頁213/216 (§120)ヲ採用シヲミヨウ。

$$\begin{cases}\Omega(y)\equiv y''\\ R[y;a,b]\equiv\{y(-1)-y(1)\}^2+\{y'(-1)-y'(1)\}^2\end{cases}$$

$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ トスレバ，(3)，(4) ガ満足サレル．コノトキ(2)ハ

$$y''=\frac{1}{2}$$

(10) トシテハ

$$\Xi(y)\equiv y''+\lambda y=0 \quad (\text{但シ}\lambda=k^2>0\text{ノ場合})$$

ヲ採ル．$G.\Gamma^*$，Γ ヲ計算スルト

$$\begin{cases} G(x,\xi)=\pm\dfrac{x-\xi}{2}+\dfrac{(x-\xi)^2}{4}+\dfrac{1}{6}, & (x\gtrless\xi) \\ \Gamma^*(x,\xi)=-\dfrac{1}{2k\sin k}\cos k(x-\xi\pm 1), & (x\gtrless\xi) \\ \Gamma(x,\xi)=\Gamma^*(x,\xi)+\dfrac{1}{2\lambda} \end{cases}$$

斯クシテ $D(\lambda)$ ヲ計算スレバ

$$D(\lambda)=\lambda^{-1}\sin^2\sqrt{\lambda},\quad g(\lambda)=\sin^2\sqrt{\lambda},\quad c_0=1$$

Vivanti 及ビ Hilbert ノ計算シタ $D(\lambda)$ ハ上述ノ $g(\lambda)$ = 外ナラナイ。

§4. 次ニ $\rho(x)$，従テ $G(x,\xi)$ ノ存在ニツイテ考ヘヨウ、出発点ニ戻ッテ

$$\Xi(y)=0,\quad R[y;a,b]=0$$

ノ解トシテ $\rho(x)$ ノ存在ハ許シテイル．又(3)ノ假定ヲ許サレル．従ッテ(4)ヲ満足スル $\rho(x)$ ニツイテハマヅ考ヘネバナラナイ。

ρ ト $G(x,\xi)$ トノ間ニハ（G ノ對称條件ガヲ除ケバ）

$$\rho(\xi)\int_a^b G(x,\eta)\rho(x)\,dx-\rho(\eta)\int_a^b G(x,\xi)\rho(x)\,dx$$

$$= -G(\eta,\zeta)+G(\zeta,\eta)$$

ナル関係が成立シテオル、ソコデ G が対称ナルタメノ条件ニツイテ考ヘヨウ。(4)が十分条件デアルコトハ明ラカデアル。ソコデ必要条件ヲサガシテミヨウ。$G(\eta,\zeta)=G(\zeta,\eta)$ ナラバ

上記ノ関係式カラ

$$(12)\quad \rho(\eta)=\nu\int_a^b G(x,\eta)\rho(x)\,dx \qquad (\nu=\text{const.})$$

ナル如キ const ν ガ存在セネバナラナイ。$\nu=0$ トスレバ $\rho\equiv 0$ トナルカラ、$\nu\neq 0$、(12)ガ成立スレバ、タシカニ G ハ対称トナル。

(5)ハ(4)ヲ用ヒナイデ成立スル。(6)ハ

$$-\lambda\int_a^b G(x,\eta)\Gamma(x,\zeta)\,dx+\nu^{-1}\rho(\eta)\rho(\zeta)$$

$$=-\Gamma(\eta,\zeta)+G(\zeta,\eta)$$

トナル。今

$$(13)\quad G^*(\eta,\zeta)\equiv G(\eta,\zeta)-\nu^{-1}\rho(\eta)\rho(\zeta)$$

トオケバ上ノ関係式ハ

$$(14)\quad -\lambda\int_a^b G^*(\eta,x)\Gamma(x,\zeta)\,dx=-\Gamma(\eta,\zeta)+G^*(\eta,\zeta)$$

トナッテ Γ ガ G^* ノ相反核トナル。

且ツ明ラカニ $G^*(x,\xi)$ ハ

$$\text{重}(G^*)=\rho(\xi)\rho(x)$$

及ビ

$$\int_a^b G^*(x,\xi)\,\rho(x)\,dx=0$$

トナルカラ，§2 ニ於ケルGノ代リニ G^* ヲ以テ置キ換ヘルコトが出来ル．即チ $\lambda=0$ ヲ除イテ

$$\overline{L}(y)+\lambda y=0,\quad R[y;a,b]=0$$

ノ固有値及ビ固有函数ハ G^* ノソレラト全ク相一致スルニ到ル。

茲ニ注意スベキハ G^* ハタシカニ (1) ヲ満足スルモ境界條件

$$R[y;a,b]=0$$

ヲ満足スルモノトハ，断定出来ナイ．併シ満足スルトキモ有リ得ル．タトヘバ homogeneous デ linear ノトキナドデアル．斯クノ如キトキハ Green 函数が結局確定シ得ナイトキデアル．仍テ次ノ如ク云フコトが出来ル．

$\overline{L}(y)-\rho(\xi)\rho(x)=0$ ニゾクスル Green 函数が峡ヘラレタ境界條件ノ下ニ唯一的ニ決定サレルタメニハ $\nu^{-1}=0$ 即チ (4) ヲ成立セシメネバナラナイ。但シ茲ニ境界條件ハ任意 α,β ニ対シテ

$$R[\alpha y+\beta z;a,b]=0,\quad R[y;a,b]=0,$$
$$R[z;a,b]=0$$

ナル如キ性質ヲ有スルモノトス。〔未完〕