1028. $\zeta(x)$, $\Gamma(x)$ ニ関スル函数方程式ニ就イテ

春木　博（神高商船）

りーまんノζ函数ノ函数等式トシテ有名ナル次ノ式ガアル。

$$\zeta(1-x)=2(2\pi)^{-x}\cos\frac{\pi x}{2}\,\Gamma(x)\,\zeta(x)$$

今逆ニ $f(x)$ ガ有限平面ニ於テ $x=1$ ニ於テ一位ノ極ヲモツ外、正則ナリトスルトキ

$$(1)\quad f(1-x)=2(2\pi)^{-x}\cos\frac{\pi x}{2}\,\Gamma(x)\,f(x)$$

ヲ充ス $f(x)$ ハ如何ナル函数カ？

先ヅ $f(x)=\dfrac{c}{1-x}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(1-x)^n$ トスルトキ (1) ニ於テ $x\to 0$ トスルコトニヨリ，容易ニ $f(0)=\dfrac{c}{2}$ ナルコトガ判ル。

又 $\varphi(x)$ ヲ $\varphi(1-x)=\varphi(x)$ ヲ充ス整函数トスルトキ $f(x)=\varphi(x)\,\zeta(x)$ ト書ケルコトモ容易ニ判ル。例ヘバ $\sin\pi x\,\zeta(x)$ ノ如キハ (1) ノ解デアル。

シカラバ，次ニ $f(x)$ ニ如何ナル條件ヲ與ヘタナラ $f(x)=\zeta(x)$ トナルカ。之ハ仲々ムヅカシイ問題デアル。Γ函数ノ函数方程式

$$f(x+1)=x\,f(x)$$

ニツイテハ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+n)}{(n-1)!\,n^{x}} = 1$$ ナラバ $f(x) = \Gamma(x)$ トナリ、又

$f(1)=1$、$f(x)$ ガ對數的凸函數ナラバ $f(x)=\Gamma(x)$ トナル（Artin）ト云フコトガ知ラレテ井ル。(1) ニ對シテモコノヤウナ條件ガ望マシイ。

又、Γ 函數ノ函數方程式

$$(2) \quad f(x)f(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

ニツイテモ、上記ノヤウナ問題ガ考ヘラレル。$f(x)=e^{\alpha(-\frac{1}{2}+x)}\Gamma(x)$ 等モ (2) ノ解デアル。更ニ又、(1) ニ於テ x ノ代リニ $1-x$ トスルコトニヨリ (2) ノ Γ 函數ノ函數方程式ガ得ラレルコトニ氣ガ付ケバ、$f(x)$ ハ有限平面ニ於テ $x=1$ ヲ一位ノ極トシテ持ツ外正則 $g(x)$ ハ $x=0$ ヲ一位ノ極トシテ持ツ外正則トスルトキ、函數方程式

$$f(1-x) = 2(2\pi)^{-x}\cos\frac{\pi x}{2}\, g(x)\, f(x)$$

ヲ充ス函數 $f(x)$, $g(x)$ ニ如何ナル條件ヲ與ヘレバ $\zeta(x)$, $\Gamma(x)$ トナルカ？ノ如キ一般的問題モ生ズル。

（完）