



Title	超フックス群トエルゴード定理
Author(s)	小平, 邦彦
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 234, p. 915-948
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74961
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1030. 超フックス群トエルゴード定理

小平 邦彦(東京)

近頃清原先生ニヨッテ一般フックス群ノ理論ガ展開サレ
ヲキル。¹⁾ ソノ尤モ特段ナル場合ハ“超フックス群”ノト
キデアレガ,²⁾ コノ場合ニハ容易ニ一種ノ“Poisson
積分”ヲ導入スルコトガ出来, コレヲ用ヒルコトニヨッテ,
負定曲率面ニ於ケル測地的流レノ測度可遷性ノ証明ヲ普
々ノ場合ニ拡張スルコトガ出来。

以下コレヲ述ベル。

§1. 運動群トソノ不変式. n 次元ノ旗素数ヲ成分
トスル Vektor 全体ノ作ル空間 $\mathcal{R}$ ヲ考ヘ, 一般ニ $\mathcal{R}$ ノ
Vektorヲ $z, w, \zeta, \alpha, \dots$ ヲ表ハスコトトシ, 内積
 (z, w) Normヲ, unitär空間ト考ヘテ

$$(z, w) = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + \dots + z_n \bar{w}_n$$

$$|z| = \sqrt{(z, z)}$$

ト定義スル. $\mathcal{R}$ ハ又 $2n$ 次元 Euklid 空間ト考ヘラレ
ル. カク考ヘタトキ, Vektor z ノ長サハ $|z|$ デアリ,

1) M. Sugawara: Über eine allgemeine
Theorie der Fuchs'schen Gruppen und Theta
Reihen, Ann. Math. 41, 488-494; 等参照。

2) K. Morita: A Remark on the Theory of
General Fuchsian Groups, Proc. Imp.
Acad. Tokyo. Vol. 17, 233-237.

z と w の間の角 $\hat{z}w$ は

$$\cos \hat{z}w = \frac{\operatorname{Re}(zw)}{|z||w|}$$

と一致する。

超フック群の理論では $\mathcal{H}$ の "単位球"

$$\mathcal{U} = \{z; |z| \leq 1\}$$

が基礎となる。 $\mathcal{U}$ の条件:

$$U^* S U = S \quad S = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix}$$

を満足する。 $n+1$ 階の matrix:

$$U = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

を用いて作られる変換

$$(1.1) \quad z \rightarrow w = (Az+B)(Cz+D)^{-1}$$

が $\mathcal{U}$ の自身を写す。変換 (1.1) は逆-線的である。コレが $\mathcal{U}$ の運動と名付ケル。 $\mathcal{U}$ の運動の全体は群を作ル。コレが $\mathcal{U}$ の運動群とコブ。コレは内シテ次の基本的な定理が成立ツ。

定理1. $\mathcal{U}$ の内点 α ($|\alpha| < 1$) を任意の内点 β へ移ス運動が存在スル。この運動ハスベテ次式と一致する:

$$z \rightarrow w: \frac{\sqrt{1-|\beta|^2}}{1-(w\beta)} (1-\beta\beta^*)^{-\frac{1}{2}} (w-\beta)$$

$$= \frac{\sqrt{1-|\alpha|^2}}{1-(\alpha\alpha^*)} U(1-\alpha\alpha^*)^{-\frac{1}{2}} (\alpha-\alpha).$$

但し、コゝデ U ハ或ル unitar 行列、 $1-\alpha\alpha^*$ 等ハ
 (j, k) -Element が $1-\alpha_j \bar{\alpha}_k$ ナル行列ヲ現ハ
 ス。³⁾

コノ定理カラ、特ニ 0 ヲ変ヘトイ運動ハ unitar 変
 換:

$$z \rightarrow w = U z, \quad U^* U = 1$$

ヲ導ケラレルコトガ分ル。任意ノ運動 $z \rightarrow w$ ガ導ケラレ
 クトキ、 0 = 移サレル点ヲ α トスルナラバ、又直チニ次ノ定
 理が得ラレル。

定理 2. 任意ノ運動ハ

$$z \rightarrow w = \frac{\sqrt{1-|\alpha|^2}}{1-(\alpha\alpha^*)} U(1-\alpha\alpha^*)^{-\frac{1}{2}} (z-\alpha),$$

$$U^* U = 1$$

ナル形ニ現ハサレル。

又定理 1 カラ直ニ分ル如ク

$$(1.2) \quad dS^2 = \frac{|(1-zz^*)^{-\frac{1}{2}} dz|^2}{1-|z|^2}$$

ハ運動ヲ変ラナイ。今コゝデ座標軸ヲ適當ニ廻轉シテ

$z = (z, 0, 0, \dots, 0)$ ナルヤウニスレバ (1.2) ハ

$$dS^2 = \frac{1}{1-|z|^2} \left\{ |dz|^2 + \frac{|z|^2 |dz_1|^2}{1-|z|^2} \right\} \quad \text{トナル。元ノ座}$$

3) 上記赤田氏ノ論文参照。

標軸 = 左に書けば $|z|^2 |dz|^2 = |(dz \cdot z)|^2$ デアル
カラ:

定理 3. 線素

$$(1.3) \quad ds^2 = \frac{1}{1-|z|^2} \left\{ |dz|^2 + \frac{|dz \cdot z|^2}{1-|z|^2} \right\}$$

ハ運動群ノ不変式デアル。

次ニ運動ニヨツテ D 内ノ Euklid 的 Volumen-
element が如何ニ交換サレルカラ調べヨウ。コノ α =
ハ unitär 変換デハ Volumenelement ハ変ラナ
イカラ

$$(1.4) \quad z \rightarrow w = \frac{\sqrt{1-|\alpha|^2}}{1-\bar{\alpha}z} (1-\alpha\bar{z})^{-\frac{1}{2}} (z-\alpha)$$

ナル運動ヲ考へレバヨイ。座標軸ヲ適當ニ選ンデ $\alpha = (\alpha, 0, \dots, 0)$ ナル様ニシテオケバ, (1.4) ハ

$$(1.5) \quad \begin{cases} z_1 \rightarrow w_1 = \frac{z_1 - \alpha_1}{1 - \bar{\alpha}_1 z_1} \\ z_j \rightarrow w_j = \frac{\sqrt{1-|\alpha_1|^2}}{1 - \bar{\alpha}_1 z_1} \cdot z_j \quad (j \geq 2) \end{cases}$$

ト書カレル。コレヨリ

$$(1.6) \quad \begin{cases} dw_1 = \frac{1 - \alpha_1 \bar{\alpha}_1}{(1 - \bar{\alpha}_1 z_1)^2} dz_1 \\ dw_j = \frac{\sqrt{1-|\alpha_1|^2}}{(1 - \bar{\alpha}_1 z_1)^2} \cdot (dz_j + \bar{\alpha}_1 (z_j dz_1 - z_1 dz_j)) \end{cases}$$

故ニ簡單ナ計算ニヨツテ

$$\left| \frac{\partial w}{\partial z} \right| = \left(\frac{\sqrt{1-|\alpha_1|^2}}{1-z_1 \bar{\alpha}_1} \right)^{n+1}$$

得 ν . z, w = 於 ν Euclid 的 Volumenelement τ
夫 ν dV_z, dV_w トスルバ

$$dV_w = \left(\text{abs.} \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right| \right)^2 dV_z$$

デアルカラ, 一般1座標系ニ戻シテ書ケバ

$$(1.9) \quad dV_w = \left(\frac{1-|\alpha|^2}{|1-(z\zeta)|^2} \right)^{n+1} dV_z$$

スナハチ

定理4. Volumenelement:

$$\left(\frac{1-|z|^2}{|1-(z\zeta)|^2} \right)^{n+1} dV_z$$

ハ運動群ノ不変式デアル。

特 $\zeta = z$ トオケバ

$$(1.8) \quad d\sigma_z = \frac{dV_z}{(1-|z|^2)^{n+1}}$$

カ不変式ナルコトガ分ル。 $d\sigma_z$ ハ Linielement (1.

3) ノ計量基本式ト考ヘタトキ, Riemann 空間 $\mathcal{O}$ ノ
Volumenelement = 他ナラナイ。

最後 = $\mathcal{O}$ ノ Oberflächenelement, 変換ヲ考
ヘル。コノタメニ $\mathcal{O}$ ノ表面上ニ点 z ヲトツテ, z = 於 τ
normal + Linielement

$$dz = z \cdot dr, \quad (dr > 0)$$

ヲ作ル. (1.5) ナル運動=ヨツテ z ガ w =移サレタトス
ルト, dz ハ

$$dw: \begin{cases} dw_i = \frac{1 - \alpha_i \bar{\alpha}_i}{(1 - z_i \bar{z}_i)^2} z_i \cdot d\gamma \\ dw_j = \frac{\sqrt{1 - |\alpha_i|^2}}{(1 - z_i \bar{\alpha}_i)^2} z_j \cdot d\gamma \end{cases}$$

トナル. $\angle dw$, normal + 成分ハ

$$d\rho = |dw| \cos \widehat{dw w} = \operatorname{Re}(dw \bar{w})$$

ヲ映ヘラレル. コレヲ計算スレバ

$$d\rho = \frac{1 - |\alpha|^2}{|1 - (z\alpha)|^2} d\gamma$$

サテ dz / Euklid 的 Oberflächenelement dF_z

ガ (1.5) ナル運動=ヨツテ dF_w トナツタトスルト,

$$dV_z = dr dF_z, \quad dV_w = d\rho dF_w \quad \text{デアールカラ,}$$

(1.7)=ヨツテ

$$(1.9) \quad dF_w = \left(\frac{1 - |\alpha|^2}{|1 - (z\alpha)|^2} \right)^n dF_z$$

ヲ得ル. Oberflächenelement モ亦 unitär 変換ヲ
変ラナイカラ:

定理 5. Oberflächenelement...

$$\left(\frac{1 - |z|^2}{|1 - (z\zeta)|^2} \right)^n dF_\zeta$$

ハ運動群ノ不変式デアール,

§ 2. 非ユークリッド幾何. 運動群ノ不変者トレテ

Ω の内部ニーツノ幾何が定メラレル。コレヲ非ユークリッド幾何。(N.E. - Geometry)トヨブ。

$$dS^2 = \frac{1}{1-|z|^2} \left\{ |dz|^2 + \frac{|(dz \cdot z)|^2}{1-|z|^2} \right\}$$

ハ不変式デアルカラ、コレヲ N.E. - 空間 Ω ノ計量基本式ト考ヘルコトが出来ル。

カク考ヘルコトニスレバ Ω ハスナハチ Riemann 空間トナル。 Ω ノ測地線ハスベテ O ヲ通ル Euklid 的直線ト「合同」デアリ、逆ニ O ヲ通ル Euklid 的直線ト合同ナル曲線ハスベテ測地線デアル。⁴⁾ 吾クハコレヲ N.E. - Gerade トヨブ事ニスル。

N.E. - 空間トシテ Ω ニハ Oberfläche ハ含まレナイケレドモ、N.E. - Gerade ハ Oberfläche マデ連続的 (Euklid 空間トシテ) ニ延長セラレル。

定理 6. Ω ノ内部又ハ表面ニアルニ点が與ヘラレタトキ、コレヲ通ル N.E. - Gerade が必ず存在シテ唯一通りニ定マル。

証明. 與ヘラレタニ点 w 、 z ノ一方が Ω ノ内部ニアル場合ニハ明白デアイル。此、 z 共ニ表面上ニアル場合ヲ考ヘルタメニ、表面上ニ一点 z ヲトッテ、運動 (1.5) ニヨル z 及ビ $-z$ ノ像ヲ z^+ 、 z^- トスル。一般ニ (1.5) ニヨ

*) G. Fubini: The distance in general fuchsian geometries, Proc. N.A.S., Vol. 26, (1940) 700-708.

ツテ z, z' がソレゾレ w, w' = 移サレタトスレバ

$$(2.1) \quad (ww') = 1 - \frac{(1-zz')(1-|\alpha|^2)}{(1-(z\alpha))(1-(\alpha z'))}$$

デアル故 =

$$(z^+ z^-) = 1 - \frac{2(1-|\alpha|^2)}{(1-(z\alpha))(1+(\alpha z))}$$

サテココデ $z = (1, 0, \dots, 0)$ トオキ, $\alpha = (ix, y, 0, \dots, 0)$ トスレバ

$$(z^+ z^-) = 1 - \frac{2(1-x^2-y^2)}{1-x^2+2ix}$$

或ハ

$$(2.2) \quad \frac{1-x^2+2ix}{1-x^2-y^2} = \frac{2}{1-(z^+ z^-)}$$

△ $(z^+ z^-)$ が始メ任意 = 興ヘラレタトスルト, $|z^+ z^-| \leq 1$,
又 $z^+ \neq z^-$ トスレバ $(z^+ z^-) \neq 1$ デアルカラ,

$$\frac{2}{1-(z^+ z^-)} = \rho e^{i\theta} \text{ トオケバ, } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \text{ 且 } \rho \geq \frac{1}{\cos \theta}$$

デアル. 従ツテ (2.2) ハ $x^2+y^2 < 1$ + ル real + 解 (x, y) ヲ有ツ. ストハチ $(z^+ z^-)$ が $\neq 1$ + ル任意ノ指定サレタ値トナル様ナ運動が存在スル.

サテ w, z が興ヘラレタトシ $z = (1, 0, \dots, 0)$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ トオク. $w \neq z$ ト考ヘテキルカラ
 $(wz) = w_1 \neq 1$ デアル. 従ツテ $(z^+ z^-) = w_1$ トナル様
ナ運動が存在スル. 更ニ unitary 変換ヲ行ツテ $z^- \rightarrow z =$

移ス。コノトキ α^+ / 像ヲ w' トスレバ $w' = (w'_1, w'_2, \dots, w'_n)$ デアル。コノ α 於テ $|w| = |w'| = 1$ デカラ

$$\sum_{j \geq 2} |w_j|^2 = \sum_{j \geq 2} |w'_j|^2. \quad \text{故ニ } \alpha \text{ 変ヘナイ unitär 変}$$

換ヲ行ツテ $w' \text{ 7 } w = \text{移スコト}$ が出来ル。スナハチ $\alpha, -\alpha$ 7 任意ノ二点 $w, \bar{w}$ = 移ス運動が存在スル / デアル。コノ事カラ w ト $\bar{w}$ 7 結ブ N.E.-Grade が存在スルコトハ直チニ分ル。コレが一義的ニ定マルコトヲ示スニハ、又 α ト $-\alpha$ 7 変ヘナイ運動ニヨツテ α ト $-\alpha$ 7 結ブ Grade が変ラナイコトヲ示セバヨイ。

今コノ α 及ビ $-\alpha$ 7 変ヘナイ運動ヲ整理シテ述ベク形ニ現ハシタトスレバ、内積ハ $(\alpha, \alpha) = 1$ ニヨツテ変ラナイカラ (2.

1) カラ

$$1 - \frac{2(1 - |\alpha|^2)}{(1 - (\alpha, \alpha))(1 + (\alpha, \alpha))} = -(\alpha, \alpha) = -1$$

スナハチ

$$|\alpha|^2 + 2i \Im(\alpha, \alpha) - |(\alpha, \alpha)|^2 = 0$$

デナケレバナラヌ。コレヨリ

$$\alpha = a \alpha, \quad a \text{ 實}$$

ナリコトが分ル。 $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$ トスレバ α ノ運動ハ

$$\begin{cases} \alpha_1 \rightarrow w_1 = \frac{\alpha_1 - a}{1 - \alpha_1 a} \\ \alpha_j \rightarrow w_j = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{1 - \alpha_1 a} \cdot \alpha_j \end{cases}$$

$$l = \frac{1}{2} \log \frac{1+r}{1-r}$$

デアル。球殻 $K_{r+dr} - K_r$ の N.E. - Volume は, (1.8) カラ明カナル如ク

$$d\sigma = \frac{\Omega r^{2n-1}}{(1-r^2)^{n+1}} dr$$

デ與ハラレル。但シコソデ Ω は單位球ノ Euklid 的表面積ヲ現ハス。 dr ヲ N.E. - Metrik デ計レバ

$$dl = \frac{dr}{1-r^2}$$

デアル。従ツテ K_r ノ N.E. - 表面積 $w_r = d\sigma/dl$ は

$$(2.5) \quad w_r = \frac{1}{(1-r^2)^n} \Omega r^{2n-1}$$

吾々ハ K_r ヲ γ ノ N.E. - 半径 l ヲ用レテ $K(l)$ ト書ク事トシ, γ ノ表面ヲ $O(l)$ デ現ハス。 $1-r^2 = (\cosh l)^{-2}$

デアルカラ, $O(l)$ ノ N.E. - 面積 $w_r = w(l)$ は

$$w(l) = (\cosh l)^{2n} \Omega r^{2n-1}$$

一般ニ $O(l)$ 上ノ Flächenelement, Euklid 的面積 dF ト N.E. - 面積 $d\omega$ ノ関係ハ

$$(2.6) \quad d\omega = (\cosh l)^{2n} dF$$

デ映ヘラレル。

§3. Poisson 積分。吾々ハ Flächenelement

(1.9) ヲ用ヒテ作ツタ積分:

$$u(z) = \frac{1}{\Omega} \int_{|\zeta|=1} \left(\frac{1-|z|^2}{|1-(z\zeta)|^2} \right)^n u(\zeta) dF_\zeta$$

7 Poisson 積分トヨブコトニスル。以下簡単ノタメ

$$P(z, \zeta) = \frac{1}{\Omega} \left(\frac{1-|z|^2}{|1-(z\zeta)|^2} \right)^n$$

トオイテ, コノ積分ヲ

$$(3.1) \quad u(z) = \int_{|\zeta|=1} P(z, \zeta) u(\zeta) dF_\zeta$$

ト現ハス。 $u(\zeta)$ が Ω ノ表面デ Lebesgue 可測, 且

$$\int |u(\zeta)| dF_\zeta < +\infty \text{ ナラバ, 積分 (3.1) ハ } |z| \leq r < 1$$

デ絶対且ツ一様ニ収斂シ, $u(z)$ ハ $|z| < 1$ デ連続デアール。

定理5ヲ示シタ如ク $P(z, \zeta) dF_\zeta$ ハ運動デ変ヲタイ。

従ッテ今ニツノ運動ヲ $z \rightarrow w = S(z)$ ト表ハセバ

$$\begin{aligned} u(S(z)) &= \int P(S(z), \zeta) u(\zeta) dF_\zeta \\ &= \int P(z, S^{-1}(\zeta)) u(\zeta) dF_{S^{-1}(\zeta)} \end{aligned}$$

トナル。コノニ於テ $S^{-1}(\zeta)$ ヲ新シク ζ ト書クコトニスレバ

次ノ定理ヲ得ル:

定理7. Ω ノ運動ヲ $z \rightarrow S(z)$ ト現ハセバ

$$(3.2) \quad u(S(z)) = \int_{|\zeta|=1} P(z, \zeta) u(S(\zeta)) dF_\zeta$$

コノ (3.2) ニ於テ $u(\zeta) \equiv 1$ オケバ $u(S(z)) = \int_{|\zeta|=1} P(z, \zeta) dF_\zeta$

ヲ得ルカ, $S(z) = 0$ ナル如ク S ヲ定メレバ, 一般ニ定義カ
ラ明ラカナル如ク

$$(3.3) \quad u(0) = \frac{1}{\oint_{|z|=1}} \int u(z) dF_z$$

デアールカラ

$$(3.4) \quad \int_{|z|=1} P(z, z) dF_z = 1$$

ヲ得ル。

定理8. (平均値ノ定理). Poisson 積分 $u(z)$
ノ N.E.-球面上ニ於テ作ツタ平均値ハソノ中心ノ値ニ等
シイ。スナハチ $O(\alpha, l)$ ヲ以テ中心トスル半径 l ノ N.E.-
球面トスレバ

$$\frac{1}{\omega(l)} \int_{O(\alpha, l)} u(z) d\omega_z = u(\alpha)$$

コレヲ証明スルタメニハ, 定理7ニヨツテ明ラカナル如ク
 $\alpha = 0$ ナル場合ヲ考ヘレバヨイ。コノ場合 $O(0, l) = O(l)$
ハ Euklidノ意味デモ球面デアール。一般ニ $O(l)$ 上ノ平均
値ヲ考ヘルタメニ, ソノ Flächenelement, "Winkel-
maß": $|z|^{1-2n} dF_z$ ヲ $d\Omega_z$ デ表ハスコトニスル。
 $d\Omega_z$ ハスナハチ dF_z ヲ半径1ノ球面上ニ射影シタトキノ
面積デアール。

Unitär 変換: $z \rightarrow uz$ ノ全体ハ運動群ノ
kompaktノ部分群ヲ作ル。コレヲ O_f デ表ハスコトニ
シヨウ。 $O(l)$ ハ明ラカニ O_f ニヨツテ $O(l)$ 自身ニ移サ

レ, 而 $\mathcal{O}_f$ = 閉シテ transitive ナル.

故ニ $D(l)$ 上ノ連続函数 $f(z)$ 任意ニ映ヘラレタ
 1キ, $\therefore$ 平均値ハ $f(S(z))$ ナ $S \in \mathcal{O}_f$ ノ函数ト考ヘテ
 作ツタ $\mathcal{O}_f$ 上ノ平均値ト一致スル.

$$\frac{1}{\partial B} \int_{|z|=const} f(z) d\partial B_z = M_{S \in \mathcal{O}_f} f(S(z))$$

コノ関係ハ容易ニ $f(z)$ が Lebesgue 可測 + 有限ニ振舞
 ヲラレル, 7. + ハチ コノ場合 $f(S(z))$ = S ノ函数トシテ
 $\mathcal{O}_f$ ノ不変測度 m = 閉シテ可測ナラツテ

$$(3.5) \quad \frac{1}{\partial B} \int_{|z|=const} f(z) d\partial B_z = \frac{1}{m(\mathcal{O}_f)} \int_{\mathcal{O}_f} f(S(z)) dm_S$$

コノ (3.5) = ヨツテ 定理 8 が 次ノ如ク 証明サレル: 殆
 ヅ

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega(l)} \int_{D(l)} u(z) d\omega_z &= \frac{1}{\partial B} \int u(z) d\partial B_z \\ &= \frac{1}{m(\mathcal{O}_f)} \int u(S(z)) dm_S \\ &= \frac{1}{m(\mathcal{O}_f)} \int dm_S \int P(z, z_1) u(S(z_1)) dF_{z_1} \end{aligned}$$

然ルニ $S(l)$, S, z_1 = 有限ニツイテ連続, 従リテ可測ナ
 アレカラ, $u(S(z_1)) \in S, z_1$ = ツイテ可測ナル. 従ツテ

$\int dm_S$ ト $\int dF_{z_1}$ が交換セラレル. 故ニ (3.4) ト (3.

3) = ヨツテ

$$\frac{1}{\omega(l)} \int_{O(l)} u(z) d\omega_z = u(0)$$

得ル。

$P(z, \zeta)$ ハソノ形カラ明カナル如ク, $|z|$ が充分
1 に近ヅケバ, z カラ離レタ ζ = 對シテハ極メテ小サイ。
實際簡單ナ計算が示ス如ク

$$|1 - (z\bar{\zeta})| \leq \frac{1}{2} |z - \zeta|^2$$

デアルカラ

$$(3.6) \quad \Omega \cdot P(z, \zeta) \leq r^n \left(\frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^4} \right)^n$$

コノ事カラ直チ = 次ノ定理ヲ得ル。

定理9. $u(\zeta)$ が $|\zeta| = 1$ デ連続ナラバ

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} u(z) = u(\zeta)$$

一般ノ $u(\zeta)$ = 對シテハ次ノ定理が成立スル。

$$\text{定理10. } \int_{|\zeta|=1} |u(\zeta)|^2 d\Omega_\zeta < +\infty \text{ ナルトキハ}$$

$$(3.7) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \int_{|\zeta|=1} |u(r\zeta) - u(\zeta)|^2 d\Omega_\zeta = 0$$

証明. $u(z)$ ハ (3.5) カラ明カナル如ク

$$u(z) = \frac{\Omega}{m(\sigma)} \int_{\sigma} P(z, S(\zeta)) u(S(\zeta)) dm_\zeta$$

ト書カレル。従ツテ

$$|u(r\zeta) - u(\zeta)|^2 \\ = \left| \frac{\Omega}{m(o_f)} \int_{o_f} P(r\zeta, S(\zeta)) \{u(S(\zeta)) - u(\zeta)\} dm_S \right|^2$$

コゝ = 於て $P(r\zeta, S(\zeta)) dm_S$ 7 o_f = 於ケル Volumen-element と考へて Schwarz の不等式ヲ用ヒレバ,

$$\frac{\Omega}{m(o_f)} \int_{o_f} P(r\zeta, S(\zeta)) dm_S = 1 = \text{ヨツテ}$$

$$|u(r\zeta) - u(\zeta)|^2 \\ \leq \frac{\Omega}{m(o_f)} \int_{o_f} P(r\zeta, S(\zeta)) |u(S(\zeta)) - u(\zeta)|^2 dm_S$$

ヲ得ル。従ツテ

$$\int_{|\zeta|=1} |u(r\zeta) - u(\zeta)|^2 d\Omega_\zeta \\ = \frac{\Omega}{m(o_f)} \int_{o_f} |u(rT(\zeta)) - u(T(\zeta))|^2 dm_T \\ \leq \left(\frac{\Omega}{m(o_f)} \right)^2 \iint_{o_f \times o_f} P(rT(\zeta), ST(\zeta)) |u(ST(\zeta)) - u(T(\zeta))|^2 dm_S dm_T$$

然ルニ一般ニ $f(S, T)$ が $o_f \times o_f$ 7 可測ナルトキハ

$$\iint f(ST, T) dm_S dm_T = \iint f(TS, T) dm_S dm_T$$

が成立ツ。上ノ式 = コノ変換ヲ行ヘバ

$$P(rT(\zeta), TS(\zeta)) = P(r\zeta, S(\zeta))$$

デアルカラ, コレハ

$$\left(\frac{\Omega}{m(\mathcal{G})}\right)^2 \int_{\mathcal{G}} P(rz, S(z)) dm_S \int_{\mathcal{G}} |u(TS(z)) - u(T(z))|^2 dm_T$$

トナル。然ルニ又 $\mathcal{G}$ 上ノ函数 $u(T(z)) = u(TS(z))$ ノ對應カセル寫像ハ *stark-stetig* デアル。⁵⁾ 従ツテ

$$\lim_{S \rightarrow 1} \int_{\mathcal{G}} |u(TS(z)) - u(T(z))|^2 dm_T = 0 \text{ デアルガ,}$$

z = 收歛スル点列 (n = 對シテ $S_n(z) = \gamma_n$, $\lim S_n = 1$ ナル $S_n \in \mathcal{G}$ ノ選ビ得ルコトカラ

$$\lim_{\gamma \rightarrow z} \int_{\mathcal{G}} |u(T(\gamma)) - u(T(z))|^2 dm_T = 0$$

ナルコトガ得ル。故ニ (3.4) ト (3.6) カラ定理 9 ノ証明ト
同ジ考ヘニヨツテ

$$\begin{aligned} & \lim_{\gamma \rightarrow 1, |z|=1} \int_{|z|=1} |u(rz) - u(z)|^2 d\Omega_z \\ & \leq \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{\Omega}{m(\mathcal{G})} \cdot \int_{|r|=1} P(rz, \gamma) d\Omega_r \int_{\mathcal{G}} |u(T(\gamma)) - u(T(z))|^2 dm_T = 0 \end{aligned}$$

ヲ得ル。

———— 吾々ハ「調和函数」ヲ次ノ如ク定義スルコト
ニシヨウ。

定義. 区内ノ領域 G デ定義サレタ連續實數 $u(z)$

5) K. Kodaira: Über die Gruppe der meßbaren Abbildungen, Proc. Imp. Acad. Tokyo Vol. 17, 18-23.

ハ G 内ノスベテノ N.E.-球面 $O(\alpha, l)$ = 於テ

$$\frac{1}{\omega(l)} \int_{O(\alpha, l)} u(z) d\omega_z = u(\alpha)$$

ヲ満足スルトキ N.E.-調和デアルト云フ。

コノ意味ニ於テ、如何ナル幾何ニ對シテモ、ソレニ屬スル「調和函数」ヲ考ヘルコトが出来る。 $\Delta u = 0$ デ定義スル通常ノ調和函数ハカ、ル考ヘ方カラスレバ Euclid 的調和函数トヨバルベキデアラウ。 $n=1$ 場合ニハ N.E.-調和函数ハ Euclid 的調和函数ト一致スルカラ、コノ様ニ區別ノ必要ガ表ハレナカッタノデアアル。

定義カラ明ラカナル如ク、N.E.-調和函数ガ常数デナイナラバ、ソレハ定義領域ノ内点デ最大値及ビ最小値ニ達シ得ナイ。従ツテモソレガ領域ノ境界ヲ入レテ連続ナラバ、ソレハ境界値ヲ映ヘレバ一義的ニ定ラル。全領域内ニ於ケル境界値問題ハ定理 9 及ビ 10 ニヨツテ解カレタホル。一般ノ領域ニ於ケル境界値問題ヲ解クコトハ可成困難デアラウ。⁶⁾

定理 11. G 内ノ領域 G デ定義サレタ解析函数 $f(z)$ ノ実数部及ビ虚数部ハ其ニ N.E.-調和デアル。

6) コレヲ解クニハ次ノ方法ガ相知デアラウ: 先ツ G (Riemann) デ此ハラレク函数ヲ G 内ニ連続的ニ延長シ、次ニソノ各点ニ於ケル値ヲソノ点ヲ中心トスル N.E.-球面上ノ平均値デ置き換ヘテ新シイ函数ヲ作ル。コレヲ繰返シテ極限ヲ取ルナラバ、ソレハ正ニ境界値問題ノ解ヲ映ヘルデアラウ (第 6 節ニヨル)

証明. G 内ノ N.E. - 球面 $O(\alpha, l)$ を考へ, O を α へ移入運動ヲ S トスル. 然ルトキハ

$$\frac{1}{\omega(l)} \int_{O(\alpha, l)} f(z) d\omega_z = \frac{1}{\omega(l)} \int_{O(l)} f(S(w)) d\omega_w$$

然ルニ $f(S(w))$, w ニツイテ *analytisch* デアルカラ, ソノ $O(l)$ 上ノ平均値ハ中心ニ於ケル値ニ等シイ. スナハチ

$$\frac{1}{\omega(l)} \int_{O(\alpha, l)} f(z) d\omega_z = f(\alpha)$$

定理12. $f(z)$ が $|z| \leq 1$ デ *analytisch* ナラ

バ

$$f(z) = \int_{|z|=1} P(z, \zeta) f(\zeta) d\Omega_\zeta$$

証明ハ $\operatorname{Re} f(z)$ 及ビ $\operatorname{Im} f(z)$ が N.E. - 調和ナルコトカラ明カデアラウ。

§4. 超 Fuchs 群トエルゴード定理. 運動群ノ *discret* ナル部分群ヲ超 Fuchs 群トヨブ. 超 Fuchs 群ハ *eigentlich diskontinuierlich* デアル. 7) ニツキ超 Fuchs 群ガ與ヘラレシトシテ, コノ群ニ屬スル運動ニヨツテ互ニ移リ得ル凡ノ点ヲ *identifizieren* スレバ, ニツノ空間 $\mathbb{H}$ ガ得ラレル. $\mathbb{H}$ ハ明ラカニ *analytisch* ナ *Mannigfaltigkeit* デアツテ, (1.3) デ與ヘラレル dS^2 ノ計量基本式ト

7) M. Sugawara 1) 及ビ K. Morita 2) 参照.

考へれば, *lokal* = *homogeneous* + *Riemann*
空間トナル。コレ = 関シテ $n=1$ 場合ト全ク同様ニ次ノ定
理が成立ツ。

定理13. N.E. - Volum σ (さ) が有限ナルトキ
ハ, σ 上ノ測地的流れハ測度可遷性ヲ有スル。

先ヅ Ω 内ノ *Linienelement*:

$$(z, \varphi), \quad \varphi = dz/|dz|$$

ノ作ル空間 $\mathcal{L}$ ヲ考へル。 Ω ノ運動: $z \rightarrow S(z) = \text{ヨツテ}$
 $\mathcal{L} = \text{ハ"接触変換"}$

$$(4.1) \quad (z, \varphi) \rightarrow (w, \psi), \quad w = S(z),$$

$$\psi = dS(z)/|dS(z)|$$

が惹キ起サレル。 $\mathcal{L}$ ハ明ラカ = コノ (4.1) + ψ 変換 = 関シテ
transitiv テアルガ, 一方コノ中 $z=0$ ヲ変へ + i 変換:

$(z, \varphi) \rightarrow (uz, u\varphi)$ ハ $0 = \text{於ケル Volumen-}$
element:

$$d\sigma \circ d\Omega_{\varphi}$$

ヲ変へ + i . コノ事カラ $\mathcal{L} = \text{於テ}$, $z=0$ テハ $d\sigma \circ d\Omega_{\varphi}$
ト一致シ変換 (4.1) テ変へ + i *Volumenelement* du
が存在レテ一意的ニ定マルコトガナル。

Linienelement (z, φ) ヲ映ヘルト z ヲ通リ

$dz = \varphi|dz| = \text{切スル測地線}$ が一意的ニ定マル。従ツテ

コノ測地線ノ始点ト終点ヲ夫々 η_1, η_2 トシ, 測地線上

ノ *Euklid* 的中点カラ $z = \text{到ル N.E. - 距離ヲ } S \text{ ト入}$

レバ, 定理6 デ示シタ如ク η_1 ト η_2 ヲ通ル測地線ハ一意的

ニ定フルカラ, *Lie's element* (z, φ) ハ "座標"
 η_1, η_2, S ヲ用ヒテ

$$(\eta_1, \eta_2, S) \quad (|\eta_1| = |\eta_2| = 1, -\infty < S < +\infty)$$

ト現ハサレル。変換 (4.1) ハ, コノ座標ヲ用ヒテ書ケ
 バ

$$(4.2) \quad (\eta_1, \eta_2, S) \rightarrow (S(\eta_1), S(\eta_2), S'),$$

$$S' = S + S_0(\eta_1, \eta_2, S)$$

サレ形ヲトル。サテ今コノデ $S = 0$ ヲ移サレル迄ヲ
 α トシ, $S(\eta_1) = \zeta_1, S(\eta_2) = \zeta_2$ トオケバ, $(\zeta_1,$
 $\zeta_2)$ ハ 回転⁸⁾ デ変ヲタイカラ, (2.1) カラ

$$\frac{1 - (\zeta_1, \zeta_2)}{1 - (\eta_1, \eta_2)} = \frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - (\eta_1, \alpha))(1 - (\eta_2, \alpha))}$$

ヲ得ル。コレヲ *Oberflächenelement* 1 変換 1 式
 (1.9) ト比べルコト = ヨツテ

$$(4.3) \quad \frac{dF_{\zeta_1} dF_{\zeta_2}}{|1 - (\zeta_1, \zeta_2)|^{2n}} = \frac{dF_{\eta_1} dF_{\eta_2}}{|1 - (\eta_1, \eta_2)|^{2n}}$$

ヲハテ $dF_{\eta_1} dF_{\eta_2} / |1 - (\eta_1, \eta_2)|^{2n}$ ハ運動群ノ不変式
 ナルコトガ分ル。従ツテ (4.2) ノ形カラ明ラカナル如ク
 = 於ケル *Volumenelement* :

$$\frac{dF_{\eta_1} dF_{\eta_2} dS}{|1 - (\eta_1, \eta_2)|^{2n}}$$

ハ変換 (4.2) = ヨツテ変ヲタイ。故 = 不変測度ノ一意性⁹⁾ カラ

2) unitary 変換ヲ回転トイフコト = スル。

3) Haar 測度ノ一意性ノ一般化 !!

$$(4.4) \quad d\mu = c \cdot \frac{d\tilde{\eta}_1, d\tilde{\eta}_2, dS}{|1 - (\eta_1, \eta_2)|^{2n}}$$

デナケレバナラナイ。

よ上ノ測地的流レニ對スル *Phasenraum* ハ、超 *Fuchs* 群ニ屬スル S カラ生ジタ接触変換ニヨツテ互ニ移リ得ル $\mathcal{L}$ ノ点ヲ *identifizieren* スルコトニヨツテ $\mathcal{L}$ カラ作ラレル。測地的流レハ (η_1, η_2, S) ガ現ハセバ

$$T_t : (\eta_1, \eta_2, S) \rightarrow (\eta_1, \eta_2, S+t)$$

ガ興ハラレル。(4.4) デ興ハラレタ $d\mu$ ガコノ T_t ナル変換デ不変ナルコトハ明ラカデアラウ。定理13ノ測度可遷性ハコノ(4.4)ナル測度ニツイテ言ツテオロノデアル。

サテ吾レハ $n=1$ ノ場合ニ就ツテ空間:

$$H = \{(\eta_1, \eta_2); |\eta_1| = |\eta_2| = 1\}$$

ヲ考ヘ、コノ H ニ

$$d\tau = \frac{1}{\sigma_2^2} d\Omega_{\eta_1} d\Omega_{\eta_2}$$

ニヨツテ測度デヲ導入スル。然ルトキハ定理13ハ $n=1$ ノ場合ト全ク同様ニシテ次ノ定理14ト同値デアルコトガ知ラレル。10)

定理14. $\sigma(\frac{\eta}{t}) < +\infty$ ナルトキ H ノ可測部分集合 A ガ超 *Fuchs* 群ノ下ニテノ変換: $(\eta_1, \eta_2) \rightarrow (S(\eta_1), S(\eta_2))$ ニ對シテ不変ナラバ $\tau(A) = 0$ カ然ラザレバ $\tau(H-A) = 0$ デアル。

10) コノ点ハ $n=1$ ノ場合ト全ク同ツデアルカラ省略スル。

E. Hopf: *Ergodentheorie*, 72頁参照。

コレヲ証明スルタメニ一般ニハテ定義サレタ可測函数

$u(\eta, \eta_1) = \text{対シテ}$

$$(4.5) \quad u(z, w) = \iint_{|z|=|v|=1} P(z, \zeta) P(w, v) u(\zeta, v) d\Omega_\zeta d\Omega_v$$

= コレニ函数 $z, w \in \mathbb{N}, \mathbb{C}$ -調和函数 $u(z, w)$ ヲ定義スル。然レキハ

$$(4.6) \quad u(S(z), S(w))$$

$$= \iint_{|z|=|v|=1} P(z, \zeta) P(w, v) u(S(\zeta), S(v)) d\Omega_\zeta d\Omega_v;$$

且 $\iint |u|^2 d\Omega_\zeta d\Omega_v < +\infty$ ヲラバ

$$(4.7) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \iint_{|z|=|v|=1} |u(r\zeta, r\gamma) - u(\zeta, \gamma)|^2 d\Omega_\zeta d\Omega_\gamma = 0$$

ガ成立スル。証明ハ一変数ノ場合ト全ク同ジデアールカラ省略スルコトニシヨウ。")

(4.7) カラ $u(z, w)$ ガ $|z| < 1, |w| = 1$ デ $\equiv 0$ ヲラバ $u(\zeta, \gamma)$ ハ H^2 ノ基底列ニ至ル所 $= 0$ デアルコトガ分ル。一方 A ハ invariant デアルカラ, $u(\zeta, \gamma)$ ノ所ハ A ノ charakteristische Funktion ヲ置イテ見レバ明白ナカナル如ク, 定理 14 ヲ証明スルタメニハ次ノ定理 15 ガ成立ツコトヲ示セバヨイ:

定理 15. $u(\eta, \eta_2)$ ハ有界, 可測, ≥ 0 , $\sigma(\eta) < +\infty$ ナルニツキ超 Fuchs 群ノスミテノ変換デ不変デア

1) 定理 7 及 10 参照。

ルトスル。コトキ $u(\eta_1, \eta_2)$ が 0 トナル部分集合ノで一測度
が > 0 ナラバ

$$u(z, w) = \iint_{|z|=|w|=1} P(z, \zeta) P(w, \gamma) u(\zeta, \gamma) d\Omega_\zeta d\Omega_\gamma \equiv 0$$

デアル。

コノ定理ハ $n=1$ ノ場合ト全ク同ジ順序ニ従ツテ証明セラレル。¹²⁾ 先ツ準備トシテ

$$\text{定理 16. } u(\zeta) \geq 0, \int_{|\zeta|=1} u(\zeta) d\Omega_\zeta < +\infty \text{ ナルト}$$

キ Poisson 積分:

$$u(z) = \int_{|\zeta|=1} P(z, \zeta) u(\zeta) d\Omega_\zeta \text{ ハ "Harnack" 不等式}$$

式":

$$u(z) e^{-2nS(z, z')} \leq u(z') \leq u(z) e^{2nS(z, z')}$$

ヲ満足スル。

証明. $S(z, z')$ ハ運動ヲ受ラナイカラ $z=0$ ナルハ $z'=0$ ナル場合ヲ証明スレバヨイ。(2, 3) カラ明カナル如ク

$$\max_{\zeta} P(z, \zeta) = \frac{1}{\Omega} \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^n = \frac{1}{\Omega} e^{2nS(0, z)}$$

デアル。故ニ

$$u(z) \leq e^{2nS(0, z)} \frac{1}{\Omega} \int u(\zeta) d\Omega_\zeta = u(0) \cdot e^{2nS(0, z)}$$

12) E. Hopf: Ergoden theorie, 73-81 参照。以下述ベル証明ハ Hopf, 証明ノ全ク直接ナル一般化デアル。

コレ即チ $z=0$ 又ハ $z'=0$ ナル場合、*Idarnach*、不等式= 細ヲヲナイ。

Lemma 1. 0 ノ部分集合 B ガ 充分大キナ l ニ對シテハ

$$\frac{\sigma(B, K(l))}{\sigma(K(l))} < a \cdot \sigma(B, R) \quad (a \text{ハ常数})$$

ガ成立スル。但シコ、 R ハ超フックス群、*Fundamentalbereich*ヲ現ハス。

コ、Lemmaヲ証明スルタメニハ $\sigma(K(l))$ ノ“大キサ”ヲ知ル必要ガアル。簡單ノタメ $\sigma(K(l)) = \sigma(l)$ ト書クコト、シ、(2.4)ト(2.6)カラコレヲ計算スレバ

$$(4.8) \quad \sigma(l) = \sigma(K(l)) = \int_0^l \omega(l) dl = \frac{d\sigma}{2n} (\sinh l)^{2n}$$

ヲ得ル。—— コ、(4.8)ヲ用ヒテ、Lemma 1ハ $l=1$ ノ場合、全ク同様ニ証明セラレル。スナハチ $K(l)$ 内ニアル z ト合同ナ点ノ數ヲ $N(z, l)$ トスレバ、一ツノ常数 a ガアツテ

$$N(z, l) < \frac{\sigma(l+b)}{\sigma(b)}$$

トナル。然ルニ (4.8) カラ $\sigma(l+b) < \text{const} \times \sigma(l)$ ガ成立スルカラ

$$N(z, l) < a \cdot \sigma(l)$$

— $\int_{RB} N(z, l) d\sigma_z$ ハ $\sigma(B, K(l))$ ニ等シイ。コレヨリ直チ

= Lemma 1 が成立ッコトが分ル。⁽³⁾

Lemma 2. $\sigma(\frac{1}{z}) < +\infty$ トスル. $u(z)$ は $|z|=1$ デ有界, 可測, ≥ 0 , 且ツ超 Fuchs 群ノスベテノ変換デ変ラナイトスル. コノトキ $u(z) = 0$ トナル z ノ集合が positiv + Euklid 測度ヲモツトラバ

$$u(z) = \int_{|z|=1} P(z, \zeta) u(\zeta) d\Omega_{\zeta} \equiv 0$$

デアル.

証明. 定理 9 カラ明カナル如ク $u(z)$ ハ超 Fuchs 群ニ属スル運動ニヨツテ変ラナイ. 従ッテ, 特ニ超 Fuchs ノ *fundamentalbereich* R ノ Rand カル CR ノ内部ニ含ッレル場合ニハ, $u(z)$ ハ CR ノ内部デ maximum ニ達スルコトニナルカ¹, konstant デナケレバナ²ス. 故ニ定理 10 ニヨツテ $u(z) \in \text{konstant}$, スナハテ $\equiv 0$ トナル. 故ニ $u(z) \equiv 0$ デナケレバナ²ス.

R が $|z|=1$ ノ上ニ Rand-punkt ヲ有スル場合ニハ

$$h_2(t) = \begin{cases} (1 - \frac{t}{2})^2 & (0 \leq t < \varepsilon) \\ 0 & (t \geq \varepsilon) \end{cases}$$

ヲ考ヘル. 一般ニ Ω が $m(\Omega) < +\infty$ ナル *map* m ノ定義サレタ空間, $h(t)$ が有界且ツ一樣連続ナルトキ, 任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $\delta_\varepsilon > 0$ ヲ選ンデ, Ω ノ上ノ *quadrat-*

1) 詳シクハ E. Hopf: *Ergänzungswort.* 75-76 頁参照.

summierbar + 函数 $u(P), v(P) = \text{ツイテ}$

$$\int |u(P) - v(P)|^2 dm_P < \delta_\varepsilon + \text{ラバ}$$

$$\int |h(u(P)) - h(v(P))| dm_P < \varepsilon$$

ラベタルコトが出来る。¹⁴⁾ 従ッテ定理 10 カラ

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int |h_\varepsilon(u(r\zeta)) - h_\varepsilon(u(\zeta))| d\sigma_\zeta = 0$$

故 =

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int h_\varepsilon(u(r\zeta)) d\sigma_\zeta = \int h_\varepsilon(u(\zeta)) d\sigma_\zeta$$

デアル。然ルニ, (2.4) ト (2.6) カラ $d\omega = (\sinh l)^{2n-1} \cosh l d\sigma$ デアルカラ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma(l)} \int_{K(l)} h_\varepsilon(u(z)) d\sigma_z \\ &= \frac{1}{\sigma(l)} \int_0^l (\sinh l)^{2n-1} d \sinh l \int_{|\zeta|=1} h_\varepsilon(u(r\zeta)) d\sigma_\zeta \end{aligned}$$

トナル。故 =

$$(4.9) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma(l)} \int_{K(l)} h_\varepsilon(u(z)) d\sigma_z = \frac{1}{\sigma} \int_{|\zeta|=1} h_\varepsilon(u(r\zeta)) d\sigma_\zeta$$

14) 何トナレバ假定 = ヨッテ $\varepsilon_1 > 0 = \text{對シテ } |u-v| < \delta_1 + \text{ラバ}$

$|h(u) - h(v)| < \varepsilon_1$ ナル δ_1 が存在ナル。コトキ

$m(P; |u(P) - v(P)| \geq \delta_1) < \frac{\delta_\varepsilon}{\delta_1^2}$ デアル。故 =

$$\begin{aligned} & \int |h(u(P)) - h(v(P))| dm_P \\ &= \int_{|u-v| < \delta_1} + \int_{|u-v| \geq \delta_1} < \varepsilon_1 m(\sigma) + \frac{\delta_\varepsilon}{\delta_1^2} \cdot 2 \sup |h| \end{aligned}$$

今コゝデ $B_\varepsilon = \{z; u(z) \leq \varepsilon\}$ 1 オケバ B_ε ハ明シカニ超 Fuchs 群デ不変デアツテ $\sigma(B_\varepsilon K(l)) / \sigma(l) \sim (4.9)$ ノ左辺ヨリ 大キイ. 故ニ Lemma 1 = ヨツテ

$$\begin{aligned} & \text{map}(\zeta; u(\zeta) = 0) \\ & \leq \int h_\varepsilon(u(\zeta)) d\sigma_\zeta < a \sigma \cdot \sigma(B_\varepsilon R) \end{aligned}$$

假定ニヨツテ $\sigma(R) < +\infty$ デアルカラ, コレヨリ

$\sigma(\bigcup_\varepsilon B_\varepsilon R) > 0$ ナルコトガ分ル. スナハチ $u(z)$ ハ Ω ノ内部デ 0 トナル. 故ニ $u(z) \equiv 0$ デナケレバナラヌ.

Hauptlemma. $u(\eta_1, \eta_2)$ ガ定理 15 ノスベテノ假定ヲ満足スルナラバ, $u(0, \gamma) = \frac{1}{\sigma} \int_{|\zeta|=1} u(\zeta, \gamma) d\sigma_\zeta$

ヲ 0 ナラシメル $|\gamma| = 1$ ノ上ノ γ ノ集合ノ Euklid 的測度 $\mu > 0$ デアル.

証明. 初メ Fundamentalbereich R ガ全ク Ω ノ内部ニ含マレル場合ヲ考ヘル. 超 Fuchs 群ノ Element $\gamma S_0 = 1, S_1, S_2, \dots, S_\nu, \dots$ トシ $R_\nu = S_\nu^{-1}(R)$ (従ツテ $R_0 = R$) トオク. R_ν ハスベテ同シ N. E.-Durchmesser $D (< +\infty)$ ヲモツ.

サテ 吾々ハ $n=1$ ノ場合ニ依ツテ

$$(4.10) \quad M_\varepsilon(l) = \frac{1}{\sigma^2(l)} \iint_{K(l) \times K(l)} h_\varepsilon(u(z, w)) d\sigma_z d\sigma_w$$

ノ評價ヲ試ミヨウ. R_ν ノ直径ハ D デアルカラ $K(l-D)$ ハ $K(l)$ ニ含マレル R_ν デ全ク蔽ハレル. 故ニ

$$M_\varepsilon(l-D) \leq g(l) \frac{1}{\sigma^2(l)} \sum_\nu \sum_\mu \iint_{R_\nu R_\mu} h_\varepsilon(u(z, w)) d\sigma_z d\sigma_w;$$

他シコトヲ

$$g(l) = \left[\frac{\sigma(l)}{\sigma(l-D)} \right]^2$$

トシテ、 $\sum_\nu \sum_\mu$ ハ $K(l)$ = 全マレルスベテノ R_ν, R_μ = ツイ
テトルモノトスル。今コトヲ

$$u(z, w) = \int P(w, \nu) u(z, \nu) d\Omega_\nu$$

トオケバ、コノ積分ハ殆ンドスベテノ z = 對シ收斂シテ

$$u(z, w) = \int P(z, \zeta) u(\zeta, w) d\Omega_\zeta$$

ト表ハサレル。從ツテ w = 一定トシテオケバ $u(z, w)$ =
對シテ z ノ函数トシテ Harnack ノ不等式が適用セラレ
ル。 $z \in R_\nu$ トスルト $S_\nu(z) \in R$ デアルカラ、 $S(0,$
 $S_\nu(z)) \leq D$ トナル。故ニ

$$u(z, w) = u(S_\nu(z), S_\nu(w)) \geq e^{-2nD} u(0, S_\nu(w))$$

從ツテ h_ε ハ單調デアルカラ

$$h_\varepsilon(u(z, w)) \leq h_\varepsilon\{e^{-2nD} u(0, S_\nu(w))\},$$

($z \in R_\nu$)

ヲ得ル。コトヲ $v(w)$ = 次ノ如ク定義スル:

$$v(w) = \int_{|\nu|=1} P(w, \nu) h_\varepsilon\{e^{-2nD} u(0, \nu)\} d\Omega_\nu$$

然ルニ $h_\varepsilon(t)$ ハ *concave* デアルカラ一般ニ

$$h_\varepsilon\left(\int u(p) dm_p\right) \leq \int h_\varepsilon(u(p)) dm_p$$

が成立スル。¹⁵⁾ 故に

$$e^{-2nD} u(o, w) = \int_{\partial H} P(w, v) e^{-2nD} u(o, v) d\sigma_v$$

ト $v(w)$ の定義カラ

$$h_\varepsilon(e^{-2nD} u(o, w)) \leq v(w)$$

ナルコトが分ル。能ッテ

$$h_\varepsilon(u(z, w)) \leq v(S_\nu(w)), \quad z \in R_\nu$$

コノ式カラ

$$\begin{aligned} M_\varepsilon(L-D) &\leq \frac{g(L)}{\sigma^2(L)} \sum_\nu \sum_{\mu \neq \nu} \iint_{R_\nu R_\mu} v(S_\nu(w)) d\sigma_z d\sigma_w \\ &\leq \frac{g(L)}{\sigma(L)} \sum_\nu \int_{R_\nu} \left\{ \frac{1}{\sigma(L)} \int_{K(L)} v(S_\nu(w)) d\sigma_w \right\} d\sigma_z \end{aligned}$$

ヲ得ル。然ルニ $v(S_\nu(w))$ は N. E. - harmonisch であるカラ、平均値ノ定理ニヨッテ

アルカラ、

コノ式ハ

$$M_\varepsilon(L-D) \leq \frac{g(L)}{\sigma(L)} \sum_\nu \sigma(R_\nu) v(S_\nu(o))$$

15) $h_\varepsilon(u(z, w))$ の言ハル "subharmonic" である。こ

様ノ意味ヲ subharmonische Funktion, 一般論ヲ

考ヘルコトが出来ルが、吾々ノ本題ニハ

$$h_\varepsilon\left(\sum m_j u_j\right) \leq \sum m_j h_\varepsilon(u_j)$$

ノ直接ナル一般化ニスヤナリ。

$$= \frac{g(l)}{\sigma(l)} \sigma(R) \sum_{\nu} v(S_{\nu}(0))$$

トナル. $S(0, S_{\nu}(0)) = S(S_{\nu}^{-1}(0), 0) \leq l$ デアルカ
ヲ $S_{\nu}(R) \cap K(l+D) = \emptyset$ ナル.

$$M_{\varepsilon}(l-D) \leq \frac{g(l)}{\sigma(l)} \sum_{\nu} \int_{S_{\nu}(R)} v(S_{\nu}(0)) d\sigma_z$$

然ルニ, $v(z) = \text{harmonic}$, 不等式ヲ適用スルニ

$$v(S_{\nu}(0)) \leq e^{2nD} v(z), \quad z \in S_{\nu}(R)$$

ヲ得ル. 故ニ

$$\begin{aligned} M_{\varepsilon}(l-D) &\leq \frac{g(l)}{\sigma(l)} e^D \sum_{\nu} \int_{S_{\nu}(R)} v(z) d\sigma_z \\ &\leq \frac{g(l)}{\sigma(l)} e^D \int_{K(l+D)} v(z) d\sigma_z = e^D g(l) \frac{\sigma(l+D)}{\sigma(l)} v(0) \end{aligned}$$

コトヲ $l \rightarrow \infty$ 極限ヲ考ヘルニ

$$\lim_{l \rightarrow \infty} M_{\varepsilon}(l) \leq c \cdot v(0), \quad c = c(D)$$

ナルコトが分ル.

(4.7) カラ, (4.9) ト同様ニシテ

$$\lim_{l \rightarrow \infty} M_{\varepsilon}(l) = \frac{1}{\sigma^2} \iint_{|z|=|v|=1} h_{\varepsilon}(u(z, v)) d\sigma_z d\sigma_v$$

ヲ得ルガ, コノ右辺ハ明カニ $u(z, v) = 0$ ナラシトル (z, v) 集合ノ σ -測度ヨリ大キイ. 一方

$$v(0) = \frac{1}{\sigma} \int_{|v|=1} h_{\varepsilon} \{ e^{-2nD} u(0, v) \} d\sigma_v$$

ハ $u(0, \gamma) \leq \varepsilon$ ナル γ ノ集合ノ測度 $\frac{1}{\partial B}$ ノ越エナシ。故ニ
上ノ結果カラ

$$\text{Meas}(\gamma; u(0, \gamma) \leq \varepsilon) \geq \frac{\partial B}{c} \tau(1, \gamma; u(1, \gamma) = 0)$$

コノデ $\varepsilon \rightarrow 0$ トスレバ

$$\text{Meas}(\gamma; u(0, \gamma) = 0) > 0$$

ナルコトガ分ル。

以上ニ於テハ R ガ全ク D ノ内部ニ含マレルト假定シタ。
 R ガ $|z|=1$ ノ上ニ Randpunkt ヲ有スル一般ノ場合ハ
 $n=1$ ノトキト全ク同ジ技巧ニヨッテ、始メノ場合ニ帰着セ
シラレル——。

定理15ノ証明。始メ $E_z = (\gamma; u(z, \gamma) = 0)$
ガ(測度0ヲ除ケバ) z ニ関係シナイコトヲ示サウ。定理
10ヲ示シタ如ク

$$\lim_{r \rightarrow 1, |\gamma|=1} \int |u(z, r\gamma) - u(z, \gamma)|^2 d\Omega_\gamma = 0$$

ナル故、コノ積分ノ範圍ヲ E_z ニ限レバ

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{E_z} |u(z, r\gamma)|^2 d\Omega_\gamma = 0$$

ヲ得ル。然ルニ Harnack ノ不等式ニヨレバ、 $z'(|z'| < 1)$
ヲ任意ニ選ビタトキ

$$u(z', w) \leq e^{2nS(z', z)} u(z, w)$$

ヲ得ル。故ニ

$$\lim_{Y \rightarrow 1} \int_{E_Z} |u(z', \gamma V)|^2 d\Omega_Y = 0$$

従って再び定理 10 をヨツテ

$$\int_{E_Z} |u(z', \gamma)|^2 d\Omega_Y = 0$$

スナハチ $\text{Map} (E_Z - E_{Z'}) = 0$ デアル。 Z ト Z' ヲ入
 レ換ヘレバ、コレヨリ直チ $E_Z = E_{Z'}$ ナルコトが分ル。
 ソコデ $E_Z = E$ トオクコトニナル。 $\text{Hauptlemma} =$
 ヲレバ $E \neq 0$ ナル Map ナモツ。

一方 $u(z, \gamma)$ ハ超 Fuchs 群ニ対スル不変性カラ

$$u(z, \gamma) = u(S(z) \quad S(\gamma))$$

ヲ満足スル。故ニ

$$S(E_Z) = E_{S(Z)} = E$$

スナハチ E ハ超 Fuchs 群ノ変換デ不変デアル。従ツ
 テ E ノ charakteristische Funktion ヲ $e_E(\gamma)$
 トスレバ、Lemma 2 ニヨツテ $1 - e_E(\gamma) = 0$ デナ
 レレバナラヌコトが分ル。故ニ $u(z, \gamma) \equiv 0$ 。従ツテ
 $u(z, \gamma) \equiv 0$ デアル。

—— コレデ Engelen theorie ノ証明ヲ終ル。

コニ至ツテ以上ノ証明ヲ終リミルトキ、吾々ハ空間 Ω
 トソノ運動群ノ真ニ具体的ナ形ヲ示シモ利用シナカッタヨト
 ニ氣が付ク。上記ノ証明ハ能ツテ形式的ニハモット抽象化
 セラレ得ルデアラウ。

一般ニ Fuchs 群ノ場合ニハ Poincaré 空間 Ω ハ

吾々の場合ト根本的ニ異ナル構造ヲモツ。吾々の空間の
 ハ *homogeneous* ナルミナラズ「等方性」ヲ有ス
 ル。又ハチの $N.E.$ -球面ハソノ中心ヲ動カサナイ運
 動ニ因シテ *transitiv* デアツタノデアル。一般ノ
Poincaré 空間デハコレが成立シナイ。定理15ハ一般
 ノ *Poincaré* 空間デハ恐ラク成立シナイノデハナイカト
 思ハレル。