



Title	一次連結群ノ定義ニ就テ
Author(s)	岩村, 聯
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 234, p. 948-960
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74962
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1031. 一次連結群ノ定義ニ就テ

岩 村 聯 (東大學生)

§1. *Topological group* = 於テハ実数ノ開
區間ノ連續像ニヨツテ二點ガ結ビレルコトニヨツテ
connectedness ガ定義サレテキル (Pontryagin),
従ツテ一般ノ *Haüsdorff space* = 於ケル *con-*
nectedness ヨリモ條件が強イ: *Haüsdorff*
space H / 開集合族, 閉集合族及ビ任意, 部分集
合ヲ夫々 $\mathcal{O}_H, \mathcal{F}_H$ 及ビ M トシ, *subspace* M / 開集
合族 $\{G \cap M; G \in \mathcal{O}_H\}$, 閉集合族 $\{F \cap M; F \in$
 $\mathcal{F}_H\}$ ヲ夫々 $\mathcal{O}_M, \mathcal{F}_M$ トスルトキ $\mathcal{O}_M = \mathcal{E} \quad \mathcal{F}_M = \mathcal{E}$ 属

スル集合が M 及び空集合 Γ ノミデアル, 即チ $\mathcal{O}_M \in \mathcal{F}_M$
 $= \{M, \Gamma\}$ デアルトキ M ハ connected デアルトイ
 フノ一般ノ定義デアッタ。

一次連結群 = 於テハ單位元ノアル近傍 = linear
 order がツイテ, order topology ヲ以テ始メ =
 順ヘタ topology = 置キ換ヘルコトが出来ルカラ, コ
 ノ connectedness ノ條件ヲ一般ノ Hausdorff
 space = 於ケル條件ヲ置キ換ヘテ, 一次連結群ノ定
 義 = 実数が表ハレテ来タイ様 = スルコトが出来ル。

コレヲ示スノガツノ定理! デアルガ, ソレヲ述ベル前
 = 定義ヲ一ツ下シテ置ク。

〈ナル linear order が定義サレタ集合 L = 於
 テ $x \in L \rightarrow x \leq a$ ナル $a \in L$ が存在スレバ a ヲ
 $\text{Max } L$ トシ, $\text{Min } L$ モコレニ準ジ, $a < b$ ナル a, b
 = 付シテ $a < x < b$ ナル x ノ集合 $(x; a < x < b)$
 ヲ L ノ開区間 (a, b) トスレバ, $\text{Max } L \in \text{Min } L$ モ
 存在シタイトキハ L ノスベテノ開区間ヲ以テ L ノ近傍系
 トスルト L が Hausdorff space = ナル。コレガ L
 ノ order topology デアル。

定義. Linearly ordered set L = 於テ
 $\text{Max } L \in \text{Min } L$ モ存在セズ, L が ノ ノ order
 topology = ツイテ connected, 即チ $\mathcal{O}_L \in \mathcal{F}_L$
 $= \{L, \Gamma\}$ ナルトキ L ヲ linear continuum
 トイフ。

定理1. Linear continuum L が (order topology = 就て) local group となれば L は実数加法群 $\mathbb{R}$ と locally isomorphic であり、特 = L が (topological) group となれば L は $\mathbb{R}$ と isomorphic である。

コ = local group L の定義は Pontryagin: Topological group = 就て、特 = 単位元 e の右ノ単位元トシテハ、(この近傍ノミナラズ) L 全部 = 對シテ 通用スルモノトスル。又右ノ逆元 x^{-1} ノ存在スル x が L ノ開集合ヲ作り、ソレが e ノ或ル近傍ヲ含ミ、 x^{-1} が x ノ連続函数デアアルコトヲ假定スル。コノ点ヲハッキリサセルタメ = L ヲ 右 local group トイフコト = スル。

x ノ左ノ逆元 x^* ノ存在ハ假定シナイ。又 x^* が存在シテ x ノ連続函数デアアルコトハ假定シナイノデアアル。シカレ e ノ十分小さい近傍デハ、 e ハ左ノ単位元デモアリ、 x^* が存在シテ、 $x^{-1} = x^*$ イコトハ証セラレル。定理1 (1 始メノ部分) デハ単位元 e ノ近傍タケヲ問題 = スルカラ L が 右 local group デアルコトハ特 = 重要デハナシ。

次ノ定理2 デハ L が 右 local group デアルコトノ外 = x^* がスベラノ x = 對シテ存在スルコトヲ假定スル。(x^* ノ連続性ハ假定シナイ)

定理2. Linear continuum L が 右 local

group デアリ, スベテノ $x_0 \in L$ = 對シテソ, 左ノ逆元 x_0^{-1} が存在スレバ, L ノ任意ノ閉区間ハ separable デアリ, L ハ ω_1 -separable デアル. (即チ, L ノアル濃度 $\leq \omega_1$, ノ部分集合デ L デ dense + ε / ガアル.)

Linearly ordered set L ノ部分集合 M = 對シテ $x \in M \rightarrow x \leq a$ + ル a が存在スレバ $M \leq a$ ト記シ, $\min(x; M \leq x)$ が存在スレバソレヲ $\sup M$ ト記シ, $a \leq M$ 及ビ $\inf M$ モコレニ準ズル.

Linear continuum L = 於テハ R ト同様 = 次ノ 1) ~ 5) が成立スル, 但シ $L \neq \Gamma$ トスル.

1) L ハ dense デアル, 即チ $L \ni a < b \in L \rightarrow (a, b) \neq \Gamma$

2) L ノ上ニ有界 + 部分集合 M が空デ + ケレバ $\sup M$ が存在スル.

即チ $L \ni M \neq \Gamma$ デ, $M \leq a$ + ル a が存在スレバ $\sup M$ が存在スル. $\inf$ = ツイテモ同様.

3) $L \ni M \ni a < b \in M$ デ M が connected + $\rightarrow (a, b) \subset M$.

4) $L \ni a < b \in L$ + テ (a, b) ハ connected デアル.

5) L^* が linear continuum, $f(x), g(x)$ が L テ continuous ナ常 = $L^* \ni f(x) \neq g(x) \in L^*$ + テ, 常 = $f(x) < g(x)$ 又ハ 常 = $f(x) > g(x)$

1) ~ 5) の証明.

$$\text{定義} \quad \begin{cases} (a, +\infty) = (x; a < x), & (-\infty, a) = (x; x < a), \\ (a, +\infty) = (x; a \leq x), \\ (-\infty, a) = (x; x \leq a), & [a, b] = (x; a \leq x \leq b) \end{cases}$$

$$\text{明カ} = (a, +\infty) \in \mathcal{O}_L \ni (-\infty, a)$$

$$\text{故} = (-\infty, a] \in \tilde{f}_L \ni [a, +\infty)$$

$$\text{従ッテ } [a, b] \in \tilde{f}_L.$$

1), 3) のコレヲ既ニ明カデアール。

$$2) \quad \overline{M} = (x; M \leq x), \quad \underline{M} = \bigcup_{x \in M} (-\infty, x)$$

$$\text{トムルト } \overline{M} \cup \underline{M} = L, \quad \overline{M} \cap \underline{M} = \Gamma, \quad \underline{M} \in \mathcal{O}_L \quad \text{従}$$

$$\text{ツテ } \overline{M} \in \tilde{f}_L. \quad \sup M \text{ が存在シタケル, } \therefore \min \overline{M} \text{ が}$$

$$\text{存在シタケル, 従ッテ } \overline{M} = \bigcup_{M \leq x} (x, +\infty) \in \mathcal{O}_L. \quad \text{ソレハ,}$$

$$M \neq \Gamma, \quad M \leq a \text{ カラ } \overline{M} \neq L, \quad \overline{M} \neq \Gamma' \text{ が出来ルカラ,}$$

$$L \text{ の connectedness を示スル. 故ニ } \sup M \text{ の}$$

存在スル。

$$4) \quad L \ni a_1 < b_1 \in L \text{ トスル. } [a_1, b_1] \text{ が dis-} \\ \text{connected} \text{ ヲアルト假定スルト } F_1, F_2 \text{ がアツテ } F_1, \\ F_2 \in \tilde{f}_L, \quad F_1 \cup F_2 = [a_1, b_1], \quad F_1 \cap F_2 = \Gamma$$

$$\text{ソコヲ } \{i, j\} = \{1, 2\} \text{ トシテ, } a_1 \in F_i \text{ タラ}$$

$$F_i(a_1) = (-\infty, a_1], \quad a_1 \notin F_i \text{ タラ } F_i(a_1) = \Gamma$$

トスル。

$$F_i(b_1) \text{ モコレニ違ズル (} F_i \ni b_1 \text{ タラ } F_i(b_1) = [b_1, +\infty) \text{)}.$$

$F_i(a_i) = I \Leftrightarrow F_j(a) \neq I, F_i(b_i) = I \Leftrightarrow F_i(b_i) \neq I$
 ソコデ $F_i^* = F_i \cup F_i(a_i) \cup F_i(b_i)$ トスル $F_1^* \cup F_2^*$
 $= L, F_1^* \cap F_2^* = I, F_1^* \in \mathcal{F}_L \ni F_2^*$. 所カ $F_1^* \neq I \neq F_2^*$ カラ L が disconnected ナル.

結局 $[a, b]$ は connected ナケレバナラナイ. ソ
 コデ $L \ni a < b \in L$ トスル $a < c < b$ ナル c カアル.

$(a, b) = \bigcup_{a < a_1 < c < b_1 < b} [a_1, b_1]$ デアルカラ (a, b) は con-

nected デアル.

5) $M_1 = \{x; f(x) < g(x)\}, M_2 = \{x, f(x) <$
 $g(x)\}$ トスル $M_1 \cup M_2 = L, M_1 \cap M_2 = I$. ソコ
 デ1列ハ $M_1 \in \mathcal{U}_L$ フ証明スレバ $M_1 = I$ スハ $M_1 = L$
 ナルナラソレデコイ.

$x_0 \in M_1$ トスル $f(x_0) < g(x_0)$ 従ッテ $f(x_0) <$
 $c < g(x_0)$ ナル $c \in L^*$ カアル. f, g が continuous
 カカラ x_0 ノ適當ナ近傍 ∇ フ取レバ $x \in \nabla \rightarrow f(x) <$
 $c < g(x)$, 即チ $\nabla \subseteq M_1$. x_0 ハ M_1 ノ任意ノ ele-
 ment カラ結局 $M_1 \in \mathcal{U}_L$.

§3. 定理1ノ証明. Linear continuum
 L が local group ナシ, x, y ノ積ガ xy ト書カ
 レアルトスル. e フ含ム或ル1周區間が separable ナ
 ラ4.) = コツテソノ區間ハ R ト同シ順序型ヲ有スルカラ
 order topology = 因シテ R ト homeomorphic
 ナル, 従ッテ L が普通ノ意味ノ一次局所連結群 = ナッ

定理が成立スル。ソノマウ+開区間ノ存在ヲ証明シヨウ。

e ノ近傍 U ヲ次ノマウ=取ルコトが出来ル。

I) $x, y, z \in U$ ナラ $xz, yz, (xz)z = x(yz)$ が定義サレテキル。

II) $x \in U$ ナラ x^{-1} が存在シテ $x^{-1} \in U$ 。

U ハ同位簡, 従ッテ 4) =ヨッテ *connected* ナル。

$x, y, z \in U$ ナラ $(xz)z^{-1} = x, (yz)z^{-1} = y$ 。

従ッテ $x \neq y$ ナラ $xz \neq yz$ ナル。

5) =於テ L ノ代リ = U , L^* ノ代リ = $xU \cup yU$.
 $f(z), g(z)$ ノ代リ = xz, yz ナオクハ端 = $xz < yz$
 スハ端 = $xz > yz$ ナル。ソコデ $x < y$ スルト $xe < ye$
 ナルカラ端 = $xz < yz$ ナル。

$x, y, z, u \in U$ トシテ 夫々特殊ノ条件ヲツケルト
 容易ニ次ノ関係が得ラレル。コレヲ演算ノ単調性トイフコ
 ト=スル。

$$x < y \text{ \& } z < u \longrightarrow xz < yu$$

$$x^{-1} < 0 \iff 0 < x \iff x < x^2$$

$$x^{-1} < y^{-1} \iff y < x \iff y^2 < x^2$$

ナテ $f(x) = x^2$ トスルト $f(x)$ ハ U デ *continuous*
 ナリ, U ハ *connected* ナカテ $f(U) = (f(x);$
 $x \in U)$ ハ *connected* ナル。従ッテ 3) =ヨッ
 テ $f(U) \ni a < b \in f(U) \longrightarrow (a, b) \subset f(U)$ 。

所ガ $x < e$, $x = e$, $e < x$ = 従ッテ 演算ノ 單調性カ
ヲ夫々 $f(x) < x < f(e) = e$, $f(x) = x$, $e = f(e)$
 $< x < f(x)$ デアルカラ $x \in U \rightarrow x \in f(U)$.

ソレテ $f(x) < f(y) \Leftrightarrow x < y$.

故ニ U = 於テ 逆函数 $f^{-1}(x)$ が存在スル. $f^{-1}(U) \subseteq U$.

$e < a \in U$ トシ $f^{-1}(a) = a(\frac{1}{2})$, $a \neq a(1)$ ト記ス
ル. $e < a(\frac{1}{2}) < a(1)$, $a(\frac{1}{2}) \in U$. ソコデ $e \neq a(0)$
ト記シ, 一般ニ $f^{-1}(a(\frac{1}{2^n})) = a(\frac{1}{2^{n+1}})$ デ $a(\frac{1}{2^n})$
ヲ定義スル. ($n = 1, 2, \dots$).

$$e = a(0) < \dots < a(\frac{1}{2^n}) < a(\frac{1}{2^{n-1}}) < \dots < a(\frac{1}{2})$$

$$< a(1), \quad a(\frac{1}{2^n}) \in U$$

従ッテ $\inf(a(\frac{1}{2^n}); n = 0, 1, \dots)$ が存在スル.
(2) = ヨッテ. ソレヲ b トスルト $e \leq b$ デアルガ, $e < b$
ト假定スルバ $b < b^2$. 従ッテ 或ル n = ツイテ $e < a(\frac{1}{2^n}) <$
 b^2 , 従ッテ $a(\frac{1}{2^{n+1}}) < b = f^{-1}(b^2)$. ソレハ b ノ 性
質ニ 反スル. 故ニ $e = b$, $a(0) = \inf a(\frac{1}{2^n})$.

次ニ $n = 0, 1, 2, \dots$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ト
シ $|\frac{m}{2^n}| \leq 1$ ナルスベテ $\frac{m}{2^n}$ ノ 集合ヲ A トスル. 但シ $[$

ガ group ヲナストキハ $\times$ 下スベテ 絶対値 = 同スル 條件ヲ
除イテ 考ヘル. $\frac{m}{2^n} \in A$ トキ $(a(\frac{1}{2^n}))^m \neq a(\frac{m}{2^n})$

ト記スト, $(a^{-1}, a) \in U$ デアルカラ, 演算ノ 單調性ニヨッ
テ $a(\frac{m}{2^n})$ ハ 定義サレテキテ, $a^{-1} \leq a(\frac{m}{2^n}) \leq a$.

従って $a\left(\frac{m}{2^n}\right) \in U$. $\therefore a^{-1} = a(-1)$ である. 又

明らか, $\frac{m}{2^n} = \frac{k}{2^e} \in A$ かつ $a\left(\frac{m}{2^n}\right) = a\left(\frac{k}{2^e}\right)$ である

り, $A \ni \frac{m}{2^n} < \frac{k}{2^e} \in A$ かつ演算の単調性から $a\left(\frac{m}{2^n}\right)$

$< a\left(\frac{k}{2^e}\right)$ である. 又, $\frac{m}{2^n}, \frac{k}{2^e}, \frac{m}{2^n} \pm \frac{k}{2^e} \in A$

トスルト,

$$a\left(\frac{m}{2^n}\right) = a\left(\frac{m 2^e}{2^{n+e}}\right), \quad a\left(\frac{k}{2^e}\right) = a\left(\frac{k 2^n}{2^{n+e}}\right)$$

$$\text{かつ } a\left(\frac{m}{2^n}\right) \cdot \left(a\left(\frac{k}{2^e}\right)\right)^{\pm 1} = a\left(\frac{m}{2^n} \pm \frac{k}{2^e}\right) \text{ ト}$$

スル.

以上を要約スルベ, $x \in A$ かつ $a(x)$ が一致的 = 決

定サレ

$$A \ni x_1 < x_2 \in A \Rightarrow a(x_1) < a(x_2)$$

$$\{x_1, x_2, x_1 + x_2\} \subset A \rightarrow a(x_1) a(x_2) = a(x_1 + x_2)$$

$$\{x_1, x_2, x_2 - x_1\} \subset A \rightarrow a(x_2) (a(x_1))^{-1} = a(x_2 - x_1)$$

かつ $a^{-1} < b < c < a$ 任意, b, c を取り,

$$A_b = (x; a(x) < b),$$

$$A_c = (x; c < a(x)) \text{ トスルト } A_b \neq \Gamma \neq A_c. \text{ かつ}$$

$$x_1 \in A_b, x_2 \in A_c \text{ かつ } a(x_1) < a(x_2) \text{ 従って } x_1 < x_2.$$

今決ニツノ場合ガ考ヘラレル,

$$*) \quad x_1 \in A_b, x_2' \in A_c \text{ かつ } x_2 - x_1 \notin A, \text{ トキ,}$$

$$\text{コノトキハ } A \neq A_b \cup A_c.$$

$$**) \quad x_1 \in A_b, x_2 \in A_c, x_2 - x_1 \in A \text{ トキ } x_1, x_2$$

が存在する場合。

コノトキハ、コノヤウナ $\epsilon_1, \epsilon_2 = \text{ツイテノミ考ヘレバ}$

$e < c b^{-1} < a(\epsilon_2)(a(\epsilon_1))^{-1} = a(\epsilon_2 - \epsilon_1)$ デアルガ

$\inf a(\frac{1}{2^n}) = e$ デアルカラ 適當ナ n ヲ取ルトコノヤ

ウナスベラノ $\epsilon_1, \epsilon_2 = \text{對シテ}$ $e < a(\frac{1}{2^n}) < a(\epsilon_2 - \epsilon_1)$

能ツテ $\frac{1}{2^n} < \epsilon_2 - \epsilon_1$. 一方 $\epsilon_2 - \epsilon_1 \in A$ ハ $1 < \epsilon_2 - \epsilon_1$

ヲ意味スルカラ、或ル $\epsilon_0 \in A$ ヲ取ルト $\epsilon_1 \in A_\delta$ & $\epsilon_2 \in A_c$

$\rightarrow \epsilon_0 < \epsilon_2 - \epsilon_1$ ソシテ $\epsilon_0 > 0$. 結局 $A \neq A_\delta \cup A_c$.

*) , **) ヲ綜合レテ $A \neq A_\delta \cup A_c$. 一方 $A \supseteq A_\delta \cup A_c$.

ソコデ A ヲ $A_\delta \cup A_c$ ナルルが存在スル. ソノル

=ツイテハ $b < a(\epsilon) < c$. 故ニ集合 $a(A)$ ハ (a^{-1}, a)

dense デアル. $e \in (a^{-1}, a)$ デアリ, $a(A)$ ノ濃度ハ

$\leq \kappa$. デアルカラコレデ求メル開区間が得ラレタ. $A =$ 於テ

絶対値ニ關スル條件ヲ除キ得ルトキ即チ L が group

ヲナストキハ上ノ b, c ノ範圍ヲ限定シナクテヨイカラ L が

separable = ナル.

尚、コノ迄証明スレバ A ノ上ノ函数 $a(\epsilon)$ が降調

連続函数デアリ, $a(A)$ が (a^{-1}, a) ノ上ハ L デ dense デ

アルコトカラ直チニ $a(\epsilon)$ が $\mathbb{R}$ ノ上ハ $[0, 1]$ ノ上ニ連続

單調函数ニ拡張シテコレが $L \rightarrow \mathbb{R}$ トノ (local) iso-

morphism トナルコトガワカル。

§4. 定理2ノ証明. $x_0 \in L$ ナラ $x_0 e$ が定

ムベラキテ $x_0 e = x_0$, 又 x_0^* が存在シテ $x_0^* x_0 = e$.

従って e / 或る近傍 V 上, x_0 を含む 或る 開集合 G 上が
 $x = x_0$ 且, $y = x^*$. $x, y \in V$, $x \in G$ であることは
 homeomorphically = 対応する。

4) = 従って V は connected, 従って G は
 connected + 開集合である。 $\inf G \in \sup G$ 存
 在すると仮定してよいから G は 3) = 従って 開区間。 又定
 理 1 = 従って V は separable としてよいから G は
 separable + 開区間 $(\inf G, \sup G)$ である。
 結局 任意 $x_0 \in L$ = として separable + 開区間 I_{x_0}
 が存在して $I_{x_0} \ni x_0$ 。

又, = 対応する 始数 ω を用いる。

0] $M_0 = I_e$ と置く。

ξ] $I \leq \xi < \omega$ 対し, $0 \leq \eta < \xi$ なるすべての順序数
 η = として M_η が定義されておるとき $L_\xi = \bigcup_{\eta < \xi} M_\eta$ と
 置く。

$\sup L_\xi = a_\xi$ が存在すれば $M_\xi^+ = I_{a_\xi}$, 存在し
 なければ $M_\xi^+ = \Gamma$ とする。 $\inf L_\xi = b_\xi$ が存在すべ
 ば $M_\xi^- = I_{b_\xi}$, 存在しなれば $M_\xi^- = \Gamma$ とする。 最
 後 $M_\xi = M_\xi^- \cup L_\xi \cup M_\xi^+$ と置く。

ω] $M = \bigcup_{\xi < \omega} M_\xi$ と置く。

コレがすべての ξ ($0 \leq \xi < \omega$) = として M_ξ が定義
 され, M が定義される。 2) = 従って, a_ξ が存在して
 $I \leq \eta < \xi$ なら, a_η が存在して $a_\eta < a_\xi$ となる。 従って

テ a_ξ は L の order $<$ に関シテ整列集合ヲナス.

$\sup M = x_0$ が存在スルト假定スルト a_ξ は x_0 = 收斂
スル Ω 型ノ列ヲナスガ, シレハ x_0 ノ近傍 I_{x_0} が *sepa-*
rable デアルコト = 反スル. 故 = $\sup M$ ハ存在シ + イ.
同様 = $\inf M$ 存在シ + イ.

I_{x_0} ガ閉区間デアルカラ 4) = 注意スレバ, M_ξ ハソノ
作り方カラ見テ ϵ ヲ含ム *connected* + 集合デアル. 従
ツテ M ハ *connected*, ヲシテ $\sup M \in \inf M$ 存
在シ + イカラ 3) = ヲツテ $M = \bar{L}$ トナル.

M_ξ ハ *separable* + 集合ノ高々可算個ノ和デ
アルカラソノ自身 *separable* デアリ, M ハ M_ξ ノ ξ 個
ノ和デアルカラ $\xi_0, \xi_1 = \xi_2$ = ヲツテ ξ_1 - *separable*
デアル.

サテ L ノ任意ノ閉区間 (b, a) ヲ取ルト, $\eta < \xi_0$
 $\rightarrow M_\eta \subseteq M_\xi, M = \bigcup_{\xi < \Omega} M_\xi = \bar{L}$ デアルカラ適當ノ

$\xi < \Omega$ = 對シテ $M_\xi \supseteq (b, a)$, 従ツテ (b, a) ハ *sepa-*
rable デアル.

(定理 2, 証明終リ)

(附記) 定理 1 デ除法ガ ϵ ノ近傍デ一意 = 可能 + コ
トハ必要デアル. 例ハバ任意ノ *linear continuum*
 L = 於テ $xy = \text{Max}\{x, y\}$ トスレバ xy ハ x ト y トノ
連続函数デアリ L ハコノ乗法 = 關レテ *semi-group* ヲ
ツクルヲケデアルガ, L ノ如何ナル閉区間 $\in R$ ト *homeo-*

moribund = + ラ + イマリ = Lヲ取ルコトが出来ル (ソ
 レハ Maximoff "a continuum of power $2^{\aleph_1}$ "
 = 於テ $1 \leq i$ トスルバヨイ. Ann. of Math. 41)