



Title	條件附確率法則ノ定義ニ就テ
Author(s)	伊藤, 清
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 234, p. 965-971
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74964
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1033. 條件附確率法則ノ定義ニ就テ

伊 藤 清 (内閣統計局)

differential テ + *stochastic process*
ヲ研究スルニハ、條件附確率法則トイフ概念ガ極メテ
重要デアル。コノデハソノ嚴密ニ定義ノ仕方ヲ述ベテ見ヨウ
ト思フ。條件附確率ニツイテハ P. Lévy⁽¹⁾ノ定義ガアリ、
Kolmogoroff⁽²⁾ノ著ニモ載ツテアルガ、ソノ基礎ト
シテ條件附確率法則ヲ定義スルコトハサ程無造作ニモ出
来ナイト考ヘラレルノデ、ソレニ就テ述ベテ見ヨウト思フ。
最初注意スベキコトヲノベル。

I. 確率変數ニ關スル「許サレル」概念構成ニ就テ

(1) P. Lévy: *Théorie de l'addition des variables aléatoires* P. 68

(2) Kolmogoroff: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* P. 45

§1. 確率ノ場. Ω ヲ抽象空間トシ, $\mathcal{F}$ ヲ Ω ノ部分集合ノ加法族⁽³⁾トスル. P ヲ集合 $(\mathcal{F})$ ⁽⁴⁾ノ加法函数⁽⁵⁾デ, 且ツ

$$P(E) \geq 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

トスルトキ, P ヲ $(\Omega, \mathcal{F})$ ノ上ノ確率ト呼ブ. E ヲ Ω ノ任意ノ部分集合トスル時.

$$\overline{P}(E) = \sup \{ P(E') ; E' \in \mathcal{F}, E' \subset E \}$$

$$\underline{P}(E) = \inf \{ P(E') ; E' \in \mathcal{F}, E' \supset E \}$$

トシ, $\overline{P}(E) = \underline{P}(E)$ ノトキ, E ヲ P -可測ト云ヒ, コノ共通ノ値ヲ再ビ $P(E)$ ト書クト, P ハ前ノ P ノ拡張ニナツテナル. $\Omega = \mathcal{F}$, P ヲ結ビツケテ考ヘル時之ヲ確率ノ場ト云フ.

E_1, E_2 ヲ P -可測集合トシ

$$P(E_1 \sim E_2) = 0$$

ノトキ, $E_1 \sim E_2$ ト定義シ, E_1 ト E_2 トハ同等ナリト呼ブ事ニスルト

$$E \sim E$$

$$E_1 \sim E_2 \longrightarrow E_2 \sim E_1$$

$$E_1 \sim E_2, E_2 \sim E_3 \longrightarrow E_1 \sim E_3$$

(3) S. Saks: *Theory of the integral* p. 7

(4) 集合 $(\mathcal{F})$ トイフ, ハ集合族 $\mathcal{F}$ =属スル集合トイフ意ニ同フルコトニスル.

(5) S. Saks: *loc. cit.* p. 8.

デアッテ「 $\sim$ 」ハ一種ノ *equivalence relation* ト考ヘ得ル。

§2. 確率変数. X ヲ抽象空間トシ、 F_X ヲ X ノ部分集合ノ加法族トスル。今 Ω ノ上ノ殆ンド到ル所 $(P)^{(6)}$ ニテ定義セラレタ X ノ上ノ値ヲトル函数 $x(\omega)$ ガアッテ、集合 $(F_X) \in$ ノ原像 $x^{-1}(E)$ ガ常ニ P -可測ナルトキ $x(\omega)$ ガ P -可測ト云ヒ、カ、ル函数ヲ (Ω, F, P) 上ノ (X, F_X) -値ヲトル確率変数ト云フ。

ニツノ確率変数 x_1, x_2 ガアッテ、 $P(x_1 = x_2) = 1$ ナルトキ、 $x_1 \sim x_2$ トイフコトニスルト、「 $\sim$ 」ハ一種ノ *equivalence relation* デアル。同等ノ確率変数ハ區別シテイ方が妥當デアル。ソレ故確率変数ノ属性トシテハ同等ノ確率変数ニハ同じ結果ヲ出ヘルモノノミガ「許サレル」。

$x^{-1}(E)$ 即チ $E \{ \omega; x(\omega) \in E \}$ ヲ表ハスノ $= \{ x \in E \}$ ナル命題ソノモノヲ以テスルコトガ *conventional case* ト一致スル。 $E \in F_X$ ノトキ $\{ x \in E \}$ ハ「許サレル」概念デアル。 $x \sim x'$ トラバ $\{ x \in E \} \sim \{ x' \in E \}$ ナル故。又 $P(x \in E)$ モ亦「許サレル」概念デアル。

§3. 確率変数ノ函数. x ヲ (Ω, F, P) 上ノ (X, F_X) -値ヲトル確率変数トシ、 f ヲ (X, F_X, P_x) 上ノ殆ンド到ル所 (P_x) ヲ定義セラレタ (Y, F_Y) -値ヲトル

(6) 「 P -測度0ノ例外ヲ除イテ」トイフコトヲ「殆ンド到ル所 $(P) = 1$ 」トイフ。

P_{α} -可測+函数トスル。 $f(x)$ ハ $(\mathcal{G}, F, P)$ 上ノ確率変数ト考ヘルコトが出来ルガ、 $x \sim x' (P)^{(17)}$, $f \sim f' (P_{\alpha})$ + ラバ $f(x) \sim f'(x') +$ ル故, $f(x)$ ハ「許サレル」概念デアアル。

§4. 確率変数ノ結合. A ヲ可附番集合トシ、
 $x_{\alpha} (\alpha \in A)$ ヲ夫々 (X_{α}, F_{α}) -値ヲトル確率変数トスル。
 $\alpha \in A$ ニ對スル X_{α} ノ積空間ヲ X トシ、 X ノ端集合ヲ含ム最小ノ加法族ヲ F_X トスルト、 $x \equiv (x_{\alpha}; \alpha \in A)$ ハ (X, F_X) -値ヲトル確率変数ト考ヘルコトが出来ル。蓋シ x_{α} ノ定義サレタイ ω ノ集合ヲ N_{α} トシ、 $\bigcup_{\alpha \in A} N_{\alpha} = N$ トスレバ

$$P(N) \leq \sum_{\alpha \in A} P(N_{\alpha}) = 0$$

(A ガ可附番集合+ルコトニ注意!!)

故ニ x ハ $\mathcal{G} - N$ デ即チ $\mathcal{G}$ ノ上ノ殆ンド到ル所 (P) ニテ定義サレテキル。又 F_X ノ定義ニヨリ、ソノ P -可測性ハ明ラカデアアル。又 $x_{\alpha} \sim x'_{\alpha} (\alpha \in A)$ + ラバ $(x_{\alpha}; \alpha \in A) \sim (x'_{\alpha}; \alpha \in A)$ トル故, $x_{\alpha} (\alpha \in A)$ リテ $(x_{\alpha}; \alpha \in A)$ ノ作ルコトハ「許サレル」概念構成デアアル。コレヲ $x_{\alpha} (\alpha \in A)$ ノ結合ト呼ブコトニスル。結合ヲ作ル概念、 A ガ可附番+ルコトガ決定的+役割ヲ演ジテ居ル。

後ニ非可附番個ノ確率変数ノ結合モ考ヘルガ、ソノ場合特別ノ條件ガ必要デアアル。

§5. 確率変数ノ極限值

(1) $x \sim x'$ ハ P ニ關シテ $x \sim x'$ ノ意。

$x_1, x_2, \dots$ 及び x を或る距離空間, 値をとる確率変数とスル時

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{ P(x_n, x) < \frac{1}{k} \right\} \text{は } P\text{-可測デアル。}$$

∨, 確率が1+スル時 =

" $x_1, x_2, \dots$ は x = 殆んど確実 = 収斂スルトイヒ
 $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ = テ表ハス"

$x_1 \sim x'_1, x_2 \sim x'_2, \dots, x \sim x'$ デアルトキ,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ + ラバ } x' = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n, \text{ 又}$$

$$P \left\{ \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{p, q > m} \left(P(x_p, x_q) < \frac{1}{k} \right) \right\} = 1$$

ナルトキ $x_1, x_2, \dots$ = 殆んど確実 = 収斂スル確率変数
 ト云フ。 $x_1 \sim x'_1, x_2 \sim x'_2, \dots$ + ラバ $x'_1, x'_2, \dots$
 モ亦 殆んど確実 = 収斂スル変数列トナル。而シテコノ
 時

$$\lim x_n = x$$

+ル x が必ず存在シ、而シテ equivalence を除イテ
 一義的ニ定マル。殆んど確実 = 収斂スル変数列, 極限変数
 モ亦「併ハレル」概念デアル。

任意ノ正数 ε = 対シテ

$$P \left\{ P(x_n, x) > \varepsilon \right\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

ノ時, x_n は x = 確率収斂スルト云ヒ,

$$x = P\text{-}\lim x_n$$

ヲ表ハスコト=スル。 $x_n \sim x'_n (n=1, 2, \dots)$ $x \sim x'$ デ $P\text{-}\lim x_n = x$ + ラ バ $P\text{-}\lim x'_n = x'$

次=

$$P\{P(x_m, x_n) > \varepsilon\} \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

+ ルトキ, $\{x_n\}$ ヲ確率収斂スル変数列トイフ。コノトキ $P\text{-}\lim x_n$ + ル x ハ必ず存在シ且ツ equivalence ヲ除イテ一意的ニ定マル。

「確率収斂スルトイフ事」, 「確率収斂スル変数列ノ極限值」ハイツレモ「許サレル」概念デアアル。

収斂, 極限值ノ定義ハ経数カ有理数ノ場合ニモトサレ得ル。例ヘバ有理数 r = 依存スル。確率変数 x_r ガアリ、 S ヲ任意ノ実数トスルトキ $r \rightarrow S$ = 対シテ x_r ガ収斂スルトイフノハ

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{\substack{|r-s| < \frac{1}{k} \\ |r'-s| < \frac{1}{k}}} (P(x_r, x_{r'}) < \frac{1}{k})\right) = 1$$

トイフコトデアアル。之ガ「許サレル」概念タル事ハ明カデアアル。(有理数ガ可附番集合ナル事ニ注意!!)

II. 条件付確率法則

§ I. 条件付確率 $x \in (X, F_x)$ - 値ヲトル確率変数トシ, $A \in \mathcal{B}$ ノ P -可測集合トスル。 $E \in \mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ -可測ノ任意ノ集合トスル時

$$P\{(x \in E), A\}$$

ハ E / 加法 函数デ

$$0 \leq P\{(x \in E) \cdot A\} \leq P\{x \in E\} = P_x(E)$$

故ニ X / 上 / 上 / 殆ンド到ル所 (P_x) デ定義セラレタ点函数
 $\psi(\lambda)$ ガアツテ

$$P\{(x \in E) \cdot A\} = \int_E \psi(\lambda) P_x(d\lambda)$$

今 $\psi(x)$ + ル「確率変数」 X / 函数」ヲ考ヘ、之ヲ $P(A/x) = P_x(A)$ 表ハシ、 X / 定マツタトキ A / 成立スル条件付確
~~率~~ 率云フ。

$$x \sim x' \quad A \sim A'$$

サレバ $P(A/x) \sim P(A'/x')$ + ル故、之ハ「許サレル」
 概念デアル。

§2. separable + 加法族

$\mathcal{G}$ / 上 / 集合 / 加法族 $\mathcal{F}$ / 部分集合 G 中含ム最小 /
 加法族 $B(G)$ ガ $\mathcal{F}$ ト一致スルトキ、 G ヲ $\mathcal{F}$ / base ト云フ
 事ニスル。 $\mathcal{F}$ ガ enumerable base ヲモツトキ、 $\mathcal{F}$ ヲ
 separable ト云フ。

今 0 / 1 / 間 / 有理数 r = 依存スル $\mathcal{F}$ / 元 E_r ガアツ
 テ、 $\mathcal{F} = \{E_r\}$ / $\mathcal{F}$ / base デアリ、且ツ

(1) E_r / r = 関シテ單調非減少

(2) $\lim_{r \rightarrow 1-} E_r = \mathcal{G}$ $\lim_{r \rightarrow +0} E_r = \emptyset$ ($\emptyset$ / 空集合ヲ表ス)

(3) $\lim_{s \rightarrow r+} E_s = E_r$

ナルトキ、 $\{E_r\}$ ヲ normal base トイフ。 v. here-