



Title	ヒルベルトノ既約定理ニ就テ
Author(s)	稲葉, 榮次
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 234, p. 977-985
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74965
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1034. ヒルベルトノ既約定理ニ就テ

稻 葉 榮 次 (海兵)

係数体ヲ種々変ズルコトハ *Van der Waerden*
船ノ代数幾何ノ特色ノ一ツデアル。此ハラレタ係数体ニ不定
元ヲイクツカ添加シテ代数的ニ拡大シ、ソノ後 *relations* -

treue Spezialisierung を行フコトハ代数函数体ニ就テ常数体擴大を行ツク後 *Restbildung* を行フコトニ相當スル。

サテ「ヒルベルト」ノ既約定理ハ代数幾何ニ於テ或ル役割ヲ演ズルガ、ソレハ後日ニ述ベルコトニシテ、ココデハコノ定理ノ純代数的ナ証明ニ就テ述ベル。

Eichler ハソノ特別ナ場合ニ純代数的ナ証明ヲ與ヘテオレガ (*Math. Ann.* 116) ノ *Lemma* ノハ小生ノ本紙第227号ニ述ベタ定理ノ特別ナ場合ニ他ナラヌ。コノ証明ハ私ノモ *Eichler* ノモ稍々面倒デアツタガ、ココデハ *Eliminationstheorie* を用ヒテ簡單ナ証明ヲ述ベル。同時ニ「ヒルベルト」ノ既約定理ノ *Eichler* ノ証明ヲモット簡易化シ結果ヲ一般ニシテミル。

[*Lemma*] Λ が代数数体或ハ代数函数体ニシテ $f(x, y) = 0$ が係数体 Λ ニ於ケル絶対既約方程式ナルトキ、 Λ ノ *Hauptordnung* = 於ケル *Primideal* $\mathfrak{p}$ = ヲル *Restbildung* = ヲツテ $\overline{f(x, y)} = 0$ が Λ ニ於テ絶対既約トナル。(但シ有限個ノ $\mathfrak{p}$ を除ツ)

(証) $f(x, y)$ を y ノ多項式ト考ヘタトキ、ソノ最高係ノ係数ハ 1 ニシテ他ノ係数ハ $\Lambda[x]$ = 係数トシテモ一般性ヲ失ハス。 $f(x, y)$ ノ y - 關スル次数ヲ n 、係数ノシテ $0C$ = 關スル次数ノ最大ナルモノ M 次トス。

サテ $f(x, y)$ が可約ナラバ、ソノ既約因子ハ y ノ多項式トシテ係数ハ $\Lambda[x]$ = 屬シ、ソノ x = 關スル次数ハ M ヨリ

大デ + 1. 何ト + レバ

$$f(x, y) = \varphi(x, y) \psi(x, y)$$

トシ $\varphi(x, y) \Rightarrow y$ の多項式トシ γ の係数、 x = 関スル次数最大ナル $\in$ 、ハ M_1 次デ、カ γ の係数ヲ有スル y の最高幂ヲ $y^{\wedge}$ 、同様ニ $\psi(x, y)$ の x = 関スル最大次数 M_2 +
ル係数ヲ有スル y の最高幂ヲ y^{μ} トスル。

シカラバ $f(x, y) =$ 於ケル $y^{\wedge + \mu}$ の係数、 x = 関スル次数ハ $M_1 + M_2$ デアツテ

$$M_1 + M_2 \leq M, \quad \therefore M_1 \leq M, \quad M_2 \leq M$$

デアルカラデアアル。

サテ u_i, s, v_j, t ハスベテ不定元デアアルトシテ

$$\Phi(x, y) = k_0(u, x) + k_1(u, x)y + \dots + k_{n-1}(u, x)y^{n-1}$$

$$k_i(u, x) = u_{i0} + u_{i1}x + \dots + u_{iM}x^M$$

$$\Psi(x, y) = l_0(v, x) + l_1(v, x)y + \dots + l_{n-1}(v, x)y^{n-1}$$

$$l_j(v, x) = v_{j0} + v_{j1}x + \dots + v_{jM}x^M$$

トオリ。

$$\Phi(x, y) \cdot \Psi(x, y) = f(x, y)$$

トオケバ u, v = 関スル代数方程式ノ system ガ得ラレル。コレヲ

$$Z_i(u, v) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

トスル。

$f(x, y)$ が絶対既約ナルトキハ $\exists$ system ハ解ヲ有セヌカラ

$$\sum_{i=1}^l A_i(u, v) Z_i(u, v) = 1 \text{ ----- (1)}$$

＋ル關係が成立ツ。但シ $A_i(u, v)$ ハ u, v ノ多項式デアル。サテ *Primideal* $\mathfrak{P}$ フ $Z_i(u, v)$ ノ係數スベテ $\mathfrak{P}$ -*ganzi* ナル如ク且ツ (1) ノ係數スベテ $\mathfrak{P}$ -*ganzi* ナル如ク撰ビバ $\text{mod. } \mathfrak{P} =$ 於テ

$$\sum_{i=1}^l \overline{A_i(u, v)} \overline{Z_i(u, v)} = 1$$

トナリ $\overline{Z_i(u, v)} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, l$) ハ $\overline{\Lambda}$ ノ代數的拡大ニ於テ解ヲ有セヌコトニナルカラ $\overline{f(x, y)}$ ハ $\overline{\Lambda}$ ノ代數的拡大ニ於テ既約デアル。

———— (証終) ————

[ヒルベルトノ既約定理]

Λ ハ任意ノ有限次代數數體トシ

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_m, Z_1, Z_2, \dots, Z_\nu)$$

($i = 1, 2, \dots, n$) ガスベテ係數體 $\Lambda =$ 於ケル $x_1, x_2, \dots, x_m, Z_1, Z_2, \dots, Z_\nu$ ノ既約多項式ナルトキ $Z_1, Z_2, \dots, Z_\nu =$ 適當ノ $\Lambda =$ 於ケル値 $a_1, a_2, \dots, a_\nu$ フ撰ハテ

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_m, a_1, a_2, \dots, a_\nu)$$

ガスベテ $\Lambda =$ 於テ既約ナル如クシ得ル。カナル a_i ノ撰ビ方独立ニ無數ニアル。

($\square =$ 独立 = 無數 = アリトハ

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_m; a_1, a_2, \dots, a_\nu)$$

がすべて既約ナルトキ $a_1, a_2, \dots, a_v$ ノうちノ任意ノ
 $v-1$ 個ヲ変セズシテ残りノ一ノ個ヲ無数ニ値ヲ変セシメテ
 f_i が常ニすべて既約ナル如クシ得ルコトヲ意味ス)

(証) f_i ハ x_1 スデテス, x_1 ノ最高次ノ係数が
 1 デ他ノ係數ハ

$$\wedge \{x_2, \dots, x_m; z_1, z_2, \dots, z_v\}$$

ニ屬ストシテモ一般性ヲ失ハズコトハ容易ニワカル。

$m > 1$ ナル場合ハ $x_2, \dots, x_m$ ヲ $z_1, z_2, \dots$ ノうち
 m 個ヲ考ヘレバ $m=1$ ナル場合ニ帰着スルコトモスグワ
 カル。

次ニ $m=1, v > 1$ ナル場合ハ $m=1, v=1$ ナル場
 合ニ帰着スル。何トナレバ $\wedge(z_1, z_2, \dots, z_{v-1})$ ナル体
 ヲ k_1 トオケバ $f_i(x, z_1, z_2, \dots, z_v) \equiv F_i(x, z_v)$
 ハ係數體 k_1 ニ於テ既約ナルガ k_1 ノ代數的開拡大ニ
 於テ $\oplus(x, z_v)$ ナル既約因子ヲ有スルトスルト

$$F_i(x, z_v) = \prod_{\sigma} \oplus^{\sigma}(x, z_v)$$

但シ σ ハ $\oplus(x, z_v)$ ノ係數ヲスベテ k_1 = 添加シタ體
 k_1 上ノ Automorphism ヲ示ストス。シカラバ
 $z_i = a_i \ (i=1, 2, \dots, v-1)$ トシタトキ
 $\oplus(x, z_v)$ が $\wedge$ = 於テ既約デ $\oplus^{\sigma}(x, z_v)$ スベテ異ル
 如クシテ得ルカラ $F_i(x, z_v)$ が $\wedge$ = 於テ既約トナルカ
 ラデアレ。

$m=1, v=1$ ナル場合ノ証明ハ次ノ如クスル。

$f_i(x, Z)$ がすべて *galoisch* と假定シテ一般性を失ハス。何トナレバ $f_i(x, Z) = 0 =$ ヨツテ定義サレル $\Lambda(Z)$ / 上ノ代数函数体ヲ含ム $\Lambda(Z)$ / 上ノ最小ガロア体ヲ定義スルガロア方程式カ $G_i(x, Z) = 0$ デアルトスレバ $f_i(x, Z) = 0$ ノ根 B ハ $G_i(x, Z) = 0$ ノ根 $A =$ ヨツテ $\Lambda(Z) =$ 於テ *linear* = 表ハサレル。

$$B = a_{10} + a_{11} A + a_{12} A^2 + \dots$$

$$B^2 = a_{20} + a_{21} A + a_{22} A^2 + \dots$$

$Z = \Lambda$ / 値 a ヲ映ヘテ *matrix* (a_{ij}) / *Rang* が変ラヌ如ク且ツ $G_i(x, a)$ 既約ナルヲ = スレバ $f_i(x, a) \mid \Lambda =$ 於テ既約トナレカラ, (コノ際 *Relations-trene Spezialisierung* ナルコト = 注意)。

サテ $f_i(x, Z)$ スベテ *galoisch* トシ, Λ ヲ代数的 = 拡大シテ $f_i(x, Z)$ が $\varphi_i(x, Z)$ ナル絶対既約因子ヲ有ストス。 $\varphi_i(x, Z) =$ 於ケル係数ヲスベテ $\Lambda =$ 添加シタ体ヲ Λ'_i トスル。

Λ'_i ハ Λ / 上ノ代数的拡大, σ_i / 任意ノ *Automorphism* ヲ σ_i ヲ示セバ

$$f_i(x, Z) = \prod_{\sigma_i} \varphi_i^{\sigma_i}(x, Z)$$

$\varphi_i(x, Z)$ ハ勿論 *galoisch* デアル。

$\varphi_i(x, Z) = 0$ / x / 一根 A_i ヲ $\Lambda'_i(Z) =$ 添加

シク体ヲ K_i トス。 K_i ハ $A'_i(\mathbb{Z})$ / 上ノ「ガロア」体デ、
ソノ「ガロア」群ヲ G_i トス。

$$\varphi_i(x, \mathbb{Z}) = \prod_{S_i \in G_i} (x - A_i^{S_i})$$

G_i ノ任意ノ元 T_i デ生ズル群ヲ $\{T_i\}$ デ示ス。

$\{T_i\} =$ 對應スル K_i ノ部分体ヲ $K_i^{(T_i)}$ トスル。

T_i ノ *Ordnung* ヲ λ_i トスルトキ

$$\varphi_i^{(T_i)}(x, \mathbb{Z}) = \prod_{r=0}^{\lambda_i-1} (x - A_i^{T_i^r})$$

トオケバ、コレハ $K_i^{(T_i)}$ = 属スル係数ヲ有スルルノ既約多
項式デアール。

サラスベテノ A'_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ノ合成体ヲ Λ_0

トスルトキ、 $\Lambda =$ 開スル相對次數 l ナル $\Lambda_0 =$ 於ケル

Principleal 無数 = 多クアルガ、ソノウケデ *Lemma*

= コリ $\overline{\varphi_i(x, \mathbb{Z})}$ 盡ク $\Lambda_0 =$ 於テ絶対既約トナル如キヲ

無数 = 多クアル。且ツ $\overline{\varphi_i^{(T_i)}(x, \mathbb{Z})}$ スベテ $\overline{K_i^{(T_i)}}$ = 於
テ既約トラシメ得ル。

(ソレニハ $\overline{K_i^{(T_i)}}$ が体トナル如ク擬ベバイ)

サラコノ際 i , T_i 異ルトキ $\overline{f_{T_i}}$ 異ル如ク擬ビ

$\varphi_i^{(T_i)}(x, \mathbb{Z})$ ハ $\text{mod } \overline{f_{T_i}}$ $\overline{K_i^{(T_i)}}$ / 上ニ於テ既
約トス。

$\overline{\varphi_i^{(T_i)}(x, \mathbb{Z})} = 0$ ノ根 $\overline{A_i}$ ハ $\overline{K_i^{(T_i)}}$ / 上ノ

cyclic 体 $\overline{K_i}$ ヲ生ゼシムルカラ、類体論ニ於ケル定

理ニコリ $\overline{K_i^{(T_i)}}$ = 於ケル l -次ノ素因子ニシテ $\overline{K_i}$ 素因子

ノマントナルモノ無数ニ多クアル。カナル素因子ヲ $\mathbb{Z}$ ノ分母
 及ビ $\overline{\varphi_i(x, z)}$ ノ判別式ニ素ナルモノヲ $\overline{\varphi_i^{(T_i)}}$ トスル。
 シリテハ $\overline{\varphi_i^{(T_i)}(x, z)} \bmod \overline{\varphi_{i\mathbb{Z}}^{(T_i)}} = \text{ツイテ } \overline{K_i^{(T_i)}}$
 ノ上デ既約ナル。 ($\overline{\varphi_{i\mathbb{Z}}^{(T_i)}} \wedge \overline{\varphi_i^{(T_i)}} = \text{對應スル Ideal}$
 デアル)。

$\overline{\varphi_i^{(T_i)}} \wedge \mathbb{Z} - \overline{a_i^{(T_i)}} \quad (\overline{a_i^{(T_i)}} \in \overline{\Lambda_0})$ ノ分子ニ
 含マレルトスルト、スベテノ i 及ビ T_i ニツイテ $a \equiv \overline{a_i^{(T_i)}}$
 $\bmod \overline{\mathcal{P}_{T_i}}$ トナル如キ Λ ノ元 a が無数ニ存在スル。カ
 クノ如ク a ヲ撰ベバ $\varphi_i(x, a)$ スベテ Λ'_i ニ於テ既約ナル
 コトガ証セラレル。

モシ $\varphi_i(x, a)$ 何レカ一ツ可約ナラバ $\varphi_i(x, z)$
 ノ既約数デ $\mathbb{Z} - \Lambda_i$ ヲ含ム $\varphi_i^*(x, z)$ ガ $\mathbb{Z} = a$ トシ
 タトキ $\varphi_i^*(x, a)$ ガ Λ'_i ニ於ケル式トナル。

$$\varphi_i^*(x, z) = \prod_{S_i} (x - A_i^{S_i})$$

コトニ $S_i \wedge G_i$ ノ一部 C_i ヲdurchlaufenスル。

C_i ニ属セズ G_i ノ元ノ一ツ T_i ヲトレバ $\mathcal{P}_{T_i} = \text{ツイテノ}$
 $\text{Res.bildung} = \text{ヨツテ } \overline{\varphi_i^{(T_i)}(x, z)} \bmod \overline{\varphi_{i\mathbb{Z}}^{(T_i)}} = \text{ツイテ } \overline{K_i^{(T_i)}}$
 ノ上デ既約デアル。シカルニ
 $\varphi_i^*(x, z) \bmod (z - a) \wedge \Lambda'_i$ ノ上ノ式デアルカラ
 $\overline{\varphi_i^*(x, z)} \bmod \overline{\varphi_{i\mathbb{Z}}^{(T_i)}} \cdot \overline{K_i^{(T_i)}}$ ノ上ノ式デアル。

$\overline{\varphi_i^*(x, z)} \wedge \overline{\varphi_i^{(T_i)}(x, z)}$ ト $x - \overline{A_i}$ ナル共通因
 子ヲ有スルカラ $\overline{\varphi_i^*(x, z)} \bmod \overline{\varphi_{i\mathbb{Z}}^{(T_i)}} = \text{ツイテ}$

$\overline{\varphi_i^{(T_i)}(x, z)}$ デ割レルコトニナルガ $\overline{\varphi_{iz}^{(T_i)}} \wedge \overline{A_i}$
 1判別式ニ素デアルカラ

$$\overline{A_i^{T_i}} \equiv \overline{A_i^{S_i}} \pmod{\overline{\varphi_{iz}^{(T_i)}}}$$

$$S_i \subset C_i$$

トナルコトハナク、不体理トナル。カクレテ $\varphi_i(x, a)$
 ハスベテ $\wedge'_i$ ニ於テ既約デカール a ハ無数ニ多クアルガ、
 $\varphi_i^{\sigma_i}(x, z)$ ハ i ガ同一ナルトキ σ_i ガ異レバ異ナル式
 デアルカラ、有限個ノ a ヲ除キ $\varphi_i^{\sigma_i}(x, a)$ ハ i ガ同ジ
 ナルトキ σ_i ガ異レバスベテ異ル。ソコデカク a ヲ撰ベバ
 $f_i(x, a)$ ノ $\wedge$ ニ於ケル既約因子ハ $\prod_{\sigma_i} \varphi_i^{\sigma_i}(x, a)$ デ
 割レネバナラスカラ、 $f_i(x, a)$ ハ $\wedge$ ニ於テ既約デア
 ル。
 (証終)

[附記] $m=1, v>1$ ナル場合ガ $m=1, v=1$ ナル場
 合ニ帰着スル証明ニ於テ $\mathcal{O}$ ヲ生ズル元ノ k_1 ノ上ノ方程式
 $S(n; z_1, z_2, \dots, z_{v-1}) = 0$ トシタトキ $z_i = a_i$ ト
 シテ $S(n; a_1, a_2, \dots, a_{v-1})$ ガ $\wedge$ ニ於テ既約ナル如ク
 セネバナラヌコトヲ言ヒ落シタ。