



Title	Vector latticeニ於ケル作用素ノ擴大定理
Author(s)	小笠原, 藤次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 234, p. 989-994
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74967
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1036. Vector lattice = 於ける 作用素ノ擴大定理

小笠原 藤次郎 (広島文理大)

汎函数ノ諸種ノ擴大定理ハ vector 値函数ノソレヘ
適當ノ修正ニヨツテ一般化ノ可能性ハ Kantorovitch =
於テ 既知ノコトデアルガ同氏ノ論分ガ未発表デアリ又コレ等
ノ問題ハ一應ハ考ヘラレルベキモデアリ 自分ノ「ノート」
ノ整理ノタメニコレニ纏リテ見タイ。 Hahn-Banach
ノ定理。正作用素ノ擴大。或ル種ノ連続性ヲ保存スル擴大。
大体コレニツキ分ケテ論ズル。

§ 1. Hahn-Banach ノ定理。

定理 1. X ヲ線型空間, Y ヲ complete vector
lattice トスル。 $f(x)$ ヲ X 上ヲ定義サレ Y ヲ値域トスル

函数ノ次ノ性質ヲモツモノトスル。

$p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$, $t \geq 0$ ノトキ $p(tx) = tp(x)$
今 $f(x)$ が X ノ部分線型空間 X_0 上ヲ定義サレタ Y ノ値域ト
スル additive, homogeneous + 函数デ且ツ X_0
上ヲ $f(x) \leq p(x)$ が成立スルトスル。コノトキ X 上ヲ定義
サレタ Y ノ値域トスル 次ノ性質ヲモツ additive homo-
geneous + 函数 $F(x)$ が存在スル。

$x \in X$ ノトキ $F(x) \leq p(x)$, $x \in X_0$ ノトキ $F(x) = f(x)$

(証) Banach 1 本 27-29 頁参照。

定理2. 定理1ニ於テ X が vector lattice デ
 $p(x)$ が更ニ次ノ條件ヲ満足スルトキ $F(x)$ ハ regular
トナル。

$$|x_1| \leq |x_2| \text{ ノトキ } p(x_1) \leq p(x_2)$$

(証) x ノ任意ノ正要素トシ, $0 \leq |x| \leq x$ ノトキ
 $|F(x_1)| \leq p(x)$ が成立スルカラ $\{F(x_n)\}$ ハ (0)-有界トナ
ルヲ $F(x)$ ハ regular トナル。

Y ノ complete vector lattice トスルトキ
 $y_1 + y_2 i$ ノ全体ヲ $Y + iY$ 或ハ Z ト書ク。茲ニ $y_1, y_2 \in Y$
且ツ y_1 ノ $y_1 + iy_2$ ノ実部分ト云ヒ

$$|y_1 + iy_2| = \bigvee_{c_1^2 + c_2^2 = 1} (c_1 y_1 + c_2 y_2)$$

即チ $\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ デ定義スル。

定理3. X ノ complex normed space, Y ノ complete
vector lattice, $Z = Y + iY$ トスル。

$p(x)$ は次の条件を満足する γ の値域とする函数とする。

$$p(x) = p(\|x\|), \quad p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2), \quad t > 0 \\ \text{のとき } p(tx) = t p(x).$$

今 $f(x)$ が X の複素部分線型空間 X_0 上で定義され
 Z の値域とする複素線型函数で $|f(x)| \leq p(x)$ を満足
 するものとする。このとき X 上で定義され Z の値域とする
 複素線型函数 $F(x)$ が存在して $x \in X$ のとき $|F(x)| \leq p(x)$,
 $x \in X_0$ のとき $F(x) = f(x)$ 。

(証) Bochnerblust, Sobczyk, Bull. A.
 M. S. 44 (1938) 参照。 $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$, $f_1(x)$,
 $f_2(x)$ が $f(x)$ の実部と虚部とすれば $f_2(x) = -f_1(ix)$
 $x \in X$ が容易に合ふ。而して $|f_1(x)| \leq |f(x)| \leq p(x)$ が成
 立つから定理 1 による $f_1(x)$ の拡大 $F_1(x)$ を置

$F(x) = F_1(x) - i F_1(ix)$ と置くと $x \in X$ の問題、 $F(x)$ が
 上の条件を満足する。

$x \in X_0$ のとき $f(x) = F(x)$ は自明。 $F_1(e^{i\alpha}x) = \cos \alpha \cdot F_1(x)$
 $+ \sin \alpha \cdot F_1(ix)$ より

$$|\cos \alpha \cdot F_1(x) + \sin \alpha \cdot F_1(ix)| \leq p(e^{i\alpha}x) = p(x) \\ \text{従って l. u. b. } \alpha \text{ に対して } |F(x)| = \sqrt{F_1^2(x) + F_1^2(ix)} \leq p(x) \\ \text{となる。}$$

定理 4. X が σ -complete vector lattice,
 $W = X + iX$ として Y が complete vector lattice
 $Z = Y + iY$ とする。 $p(w)$ が W 上で定義せられ Y の値
 域とする次の性質をもつ函数とする。 $p(w) = p(|w|)$,

$$p(w_1 + w_2) \leq p(w_1) + p(w_2), \quad t \geq 0 \quad \text{トキ} \quad p(tw) = tp(w)$$

$\wedge f(w)$ γ W 複素部分線型空間 W_0 上 γ 定義サレ γ 値域トスル複素線型函数トシ $|f(w)| \leq p(w)$ が成立スルモノトスル。コノトキ W 上 γ 定義サレタ γ 値域トスル複素線型函数 $F(w)$ が存在シテ $w \in W_0$ ノトキ $F(w) = f(w)$,
 $w \in W$ ノトキ $|F(w)| \leq p(w)$

(証) 定理3ノ証明ト同様。

定理3ノ証明カラ分ルヤウニ X が複素線型空間ガ $p(x) = p(e^{i\alpha}x)$ が満足サレルコトが此等ノ定理ノ証明ニ充分デアル。

§ 2.

定理5. X γ vector lattice, X_0 γ X ノ部分線型空間, X ノ任意ノ要素ハ X_0 ノ要素 γ majorize サレル (即チ $x \in X$ ノトキ $x'_0 \leq x \leq x''_0$ ナル $x'_0, x''_0 \in X_0$ が存在スル) コノトキ X_0 上ノ正要素ニ対シ正値 (0ヲ含メテ) γ トル complete vector lattice γ 値域トスル additive homogeneous + 函数 $f(x)$ ハ X 上ノ $\mathbb{R}$ ノ additive, homogeneous + 函数ニ拡大サレル。

(証) Krein, Smulian: Annals of Math. 41 (1940) 558頁 lemmaノ証明参照。

定理6. Archimedean vector lattice X 上 γ 定義サレタ $\mathbb{R}$ ノ additive homogeneous + 函数 (complete vector lattice γ 値域トスル) ハ X γ 含

最小 complete vector lattice 上, 正, additive homogeneous + 函数 = 拡大される。

§ 3.

X を σ -complete vector lattice, Y を regular vector lattice. $X_0 \rightarrow X$ / sub-vector lattice (σ -complete と假定し + イコト = 注意) トスル. X_0 上 で定義せられた Y へ値域トスル regular + additive homogeneous + 函数 $f(x)$ が X_0 で (0)-有界 + $\{x_n\}$ が X で $0 = (0)$ -収斂スルトキ $\{f(x_n)\}$ が $0 = (0)$ -収斂スルトキ $f(x)$ / 正部分及び負部分ニツイテモ同様ノ性質ヲモツコトガ証明サレル (Y が実数空間ノトキ Kantorovitch が証明シタ). 従ッテ $f(x)$ を最初カラ正トスル。

Saks ノ本ノ終リノ積分ノ部分ハ泉, 中村氏ニヨッテ lattice term が翻訳リレタガ, コレハ値域空間ヲ regular vector lattice トシテモ成スルコトガ容易ニ確メラレル. 即チ泉, 中村氏ノ形デ次ノ定理が成立スル。

定理 1. $f(x)$ ハ部分 vector lattice X_0 上デ正 / additive homogeneous + Y へ値域トスル函数ヲ次ノ意味デ連続トスル. $x_n \in X_0$, $\{x_n\}$ が X_0 で (0)-有界, X で $x_n \rightarrow 0(0)$ / トキ $f(x_n) \rightarrow 0(0)$. コノトキ次ノ性質ヲモツ X_0 へ含ム σ -complete vector lattice L が存在シ $f(x)$ ハ次ノ性質ヲモツ L 上ノ正 / additive

homogeneous + 函数 $F(x) =$ 拡大出来 ν . $z \in L$,
 $F(z) = 0$, $|x| \leq z$ + ラバ $x \in L$. $z_n \in L$. $z_n \uparrow z$
 且ッ $\{F(z_n)\}$ が有界ノトキ $z \in L$ 且ッ $F(z_n) \rightarrow F(z)(0)$

(注) X ヲ σ -complete lattice-ordered group
 トシテ 對應スル定理が得ラレル。