



Title	Vector latticeニ於ケル積分論 II
Author(s)	小笠原, 藤次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 234, p. 1002-1013
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74972
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1040. Vector lattice = 於ケル積分論 II

小笠原 滋次郎 (広島文理大)

vector lattice を値域トスル集合函数ノ Radon-Nikodym 型定理ヲ論ズル. Banach 空間ヲ値域トスルモノニツイテハ別ノ題目ノ下デ論ズルコトニシタ (紙数誌 "vector 値集合函数ノ Radon-Nikodym 型定理ニツイテ" 参照). 問題説明ノタメ §7ヲ更ニ続ケル。

§7. 以下コノ §デハ X ヲ ℓ_2 空間トスル. $x(t)$, $a \leq t \leq b$ ヲ X ヲ値域トスル可測函数 (Bochner, モノト對

等ニナルコトニ注意) トシテ次ノ定義ヲ思ヒ出ス。

定義. 任意ノ可測集合 $E = \Omega \times X$ ヲ値域トスル集合函数 $F(E)$ ガ定マリ如何ナル $f \in \overline{X} = \text{対シテモ常}$

$f(F(E)) = \int f(x(t)) dt$ ガ成立スルトキ $x(t)$ ハ Dunford

ノ意味ヲ可積分トイヒ、 $F(E)$ ヲ E 上ノ $x(t)$ ノ積分トイフ。

可測函数ニ対シテハ Dunford, Birkhoff ノ積分定義ハ對等ナルコト又 Bochner 積分ハ上ノ不定積分 $F(E)$ ガ強有界変動或ハ $\|x(t)\|$ ノ可積分ナルコトニヨリ特性ハケラレル。我々ノ積分ハ ℓ_2 空間デハコノ中間ニイル。

即チ次ノ定理カラ $F(E)$ ガ order sense デ有界変動或ハ $\|x(t)\|$ ノ Dunford ノ意味デノ可積分云ハバ彼ノ意味デ絶対可積分ト同義ニナルコトが知ラレル。

定理. ℓ_2 空間ヲ値域トスル可測函数 $x(t)$, $a \leq t \leq b$ ノ可積分条件ハ $x(t)$ ト共ニ $\|x(t)\|$ ガ Dunford ノ意味デ可積分デアルコト且ツコノトキ兩定義ノ積分ノ値ハ一致スル。

(証) $x(t)$ ガ可積分ノトキ積分定義列ノ存在カラス($x(t)$, $\|x(t)\|$ ハ Dunford ノ意味デ可積分ナルコトガ分ル。コノ逆ヲ考ヘル。 $x(t)$ ガ本質的ニ可分値ナルコト及ビ

$\left\| \int_E x(t) dt \right\|$ ガ $|E|$ ト共ニ 0 ニ収斂スルコトカラ次ノ性質

(1), (2) ヲモツ單函数列 $\{f_n(t)\}$ ノ存在ヲ確メルコト

ハ困難デナイ。

$$(1) \text{ 商々測度 } \frac{1}{2^n} \text{ , 集合 } F \text{ 除イテ } \|x(t) - s_n(t)\| \leq \frac{1}{2^n}$$

$$(2) \left\| \int_a^b |x(t) - s_n(t)| dt \right\| \leq \frac{1}{2^n} \text{ (積分ハ Dunford}$$

ノ意味)

コレコリ $\{s_n(t)\}$ が積分定義列ナルコト両従義ノ積分値ノ一致ガ分ル。

$[0, 1]$ 上ノ L_2 空間ヲ X トスルトキ $x(t)$ ハ Dunford ノ意味デ可積分ナルモ $|x(t)|$ ハ然ラザルモノヲ容易ニ作ルコトガ出来る。

$x(t)$ が可積分ノトキ不定積分 $F(E)$ ハ $|E| \rightarrow 0$ ノトキ $F(E) \rightarrow 0(0)$ が成立スル。或ハコノ條件ハ正要素ヒガ存在シテ任意ノ正数 ϵ ニ対シテ正数 δ が定マリ $|E| \leq \delta$ ノトキ $F(E) \leq \epsilon$ トシテモヨイ。何レニシテモコノトキ $F(E)$ ハ (0) - 全連続 (或ハ (0) - 絶対連続) トイフ。(0) - 全連続加法的乗数函数ハ不定積分ナリノ問題カ起ル。例 1. 公定答案ヲ, 例 2. 不定積分必ズモ可微分ナラザルコトヲ示ス。

例 1. (Pettis, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1952) 303 例 9. 41 modification). $X = l^2$ トシ $\{x_{ij}\}$ ヲ正要素ヨリナル完全正規直交系トシ $0 \leq t \leq 1$ ガ $x_n(t)$ ヲ次ノ如ク定メル。

$$\frac{i-1}{2^n} \leq t < \frac{i}{2^n} \quad (i = 1, 2, \dots, 2^n) \quad , \quad \text{トキ } x_n(t) = x_{ni},$$

$x(t) = 0$. 各、 $x_n(t)$ は単函数で可積分 $\int_E x_n dt$

が存在スル。 $F(E) = \sum_1^\infty \int_E x_n dt$ と置クトキ $F(E)$ は正

(0)-全連続加法的集合函数ナルモ不定積分デナリ。

例2. (Birkhoff Trans. Amer. Math. Soc. 38 (1935) 375 例2, modification). $X = l^2$ トシ $\{x_{ij}\}$ を例1, 如クトル。

$$0 \leq t \leq 1 \text{ 上デ } x_n(t) \text{ ヲ } \frac{i}{2^n} \leq t < \frac{i}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} \text{ ノトキ}$$

$$x_n(t) = 2^n x_{ni} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1), \quad x_n(1) = 0$$

ト定メルトキ $\sum x_n(t)$ は殆んど到ル処デ収斂スル。コレヲ

$x(t)$ ト置フ。コノトキ $\sum_{i=0}^n x_{ij}(t)$ が積分定義列トナリ $x(t)$

ハ可積分ナルモ $F(E)$ は各處デ強可微分デナリ。

此等ノ例カラ $F(E) =$ 條件ヲ設ケテ不定積分トノ關係ヲ調べリトレバナラヌ。茲デハ簡單ナ場合即チ $F(E)$ が強有界変動ノ場合ヲ主トシテ取扱フ。

IV. Radon-Nikodym 型定理(其一)

§8. X ヲ σ -complete vector lattice トシテ、条件ヲ満足スルモノトスル。

高々可附無個ノ (0)-連続正線型汎函数列 $\{f_n\}$ が存在シ正要素ハイヅレカノ f_n デ正値ガ映ヘラレル。

従ッテ $x \geq 0$ ノトキスベテ $n = 1, 2, \dots$ デ $f_n(x) = 0$ ナラバ $x = 0$ トナル。可分 ℓ_2 空間ハ常ニコノ条件ヲ満足シ且 $n = 1$ トシテコイ。

$F(E)$ が X 上値域トスル $[0, 1]$ 上ノ可測集合 E , (0) -
全連続 正ノ加法的集合函数即チ正要素 e が存在シ正数 $\epsilon =$
対シ δ が定マリ $|E| \leq \delta$ ノトキ $F(E) \leq \epsilon e$ が成立スルト
スル (X が *regular* ノトキ $|E| \rightarrow 0$ ノトキ $F(E) \rightarrow 0$
(0) トシテヨイ) $F(t) = F([0, t])$ ト定義シ $F(1) \leq e$
トシテ一般性ヲ失ハナイ。

又以下ノ議論デ e が X ノ単位トシテヨイ。何者然ラザル
トキハ e ヲ生成要素トスル主 *ideal* ヲ考ヘレバヨイ。 X ノ
主 *ideal* ノ作ル *Boole* 代数ノ表現 *Boole* 空間 Ω ヲ考
ヘ $x =$ 應ズル連続函数 $f(x)$ デ表ス。但シ e ハ恒等的 $=$
 1 ナル様ニ表現スルモノトスル。 $F(t)_{(f^*)}$ ハ (t, f^*) ノ連
続函数デアアル。次ノ如ク置リ。

$$F(t, h, f^*) = \frac{F(t+h)_{(f^*)} - F(t)_{(f^*)}}{h} \quad \overline{D} F(t, f^*) \\ = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} F(t, h, f^*), \quad \underline{D} F(t, f^*) = \underline{\lim}_{h \rightarrow 0} F(t, h, f^*)$$

但シ $t=0$, Δ ノ点デハ $F(t)$ ノ定義 γ 区間外ヲ適當ニ定メ
タモノトスル。

何レモ (t, f^*) ニツイテ *Baire* ノ函数デアアル。各 $f^* =$
對シ殆ンドスベテ t ニツイテ $\overline{D} F(t, f^*) = \underline{D} F(t, f^*)$
が成立スル。

$f_n(x)$ ニヨリ導入サレル測度函数 μ_n トスレバ
Fubini ノ定理ニヨッテ殆ンドスベテノ点 t デ μ_n 測度ノ
ノ集合ヲ除イテ上ノ等式が成立スル。 $X =$ 測スル假定カラ
第一種集合ヲ除イテトシテヨイ。從ツテカゝル t ニ於テ

$\left\{ \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \right\}$ が (0)-有界ノトキ (0)-可微分トナ

ル。 $F(E)$ が正トハ記述ノ便宜上ノ制限デアルコトハ容易ニ
分ルカラ次ノ定理ヲ得。

定理. $F(E)$ ヲ X ノ値域トスル *Lipschitz* 條件ヲ
満足スル加法的集合函数即チ正要素 E が存在シテ $|F(E)| \leq$
 $|E|$ ト成ニスルトスル。

$F(E)$ ハ殆ンドスベテ $t =$ 於テ (0)-可微分且ツコノ
導函数ノ不定積分デアル。

(証) 定理ノ前半ハ上ノ所論カラ自明。後半ハ $\Delta_n(t)$
ヲ $\frac{i-1}{2^n} \leq t < \frac{i}{2^n}$ ($i=1, 2, \dots, 2^n$) ノトキ $2^n \left\{ F\left(\frac{i}{2^n}\right) - F\left(\frac{i-1}{2^n}\right) \right\}$
トスルハ導函数ノ積分定義列トナルコトノ証明ハ困難デ
タイ。

定理. 前定理ニ於テ殆ンドスベテノ点デ *Lipschitz*
條件ヲ満足スル (0)-全連続加法的集合函数トシテソノ結
果ヲ成立スル。従ッテ殆ンドスベテノ点デ可微分 + (0)-全連続
加法的集合函数ノ不定積分デアル。

§9. コノ § デハ X ヲ $\mathcal{H}_2$ 空間トシテ論ズル。

定理 (0)-全連続加法的集合函数 $F(E)$ ガ Bochner
積分ノ意味デ不定積分ナルヲソノ條件ハ強有界変動ナルコ
トナリ。

(証) 定理ノ前半ハ自明。 $F(E)$ ガ強有界変動ノトキ
ソノ絶対部分 (集合函数トシテノ) ハ強有界変動デ且ツ

定理 / 假定ヲ満足スル。従ツテ最初カヲ $F(E)$ ヲ正トシテ論ズレバ充分デアアル。 E ヲ $F(E) / (0) -$ 全連続ノ定義ニ表ハレル正要素トシ $F(E)$ ト $n|E|E$ ノ集合函数トシテ、*meet* ヲ $F_n(E)$ トスレバ“表現論”ヲ使ツテ次ノコトガ分ル。
 $F_n(E) \leq F_{n-1}(E)$, $\lim F_n(E) = F(E)$, $F_n(E) \leq n|E|E$
 最後ノ式カラ $F_n(E) = \int_E x_n(t) dt$ (Bochner 積分)
 最初ノ式カラ殆ンドスベテノ t デ $0 \leq x_n(t) \leq x_{n+1}(t)$
 残りノ式カラ $\{\|x_n(t)\|\}$ ハ殆ンドスベテノ t デ t ヲ固定シタトキ有界。従ツテ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$ ガ殆ンドスベテノ t デ存在スルカラ $x(t)$ トスルトキ $\int_E x(t) dt$ ナルコトガ分ル。

定理. (0) - 全連続加法的集合函数 $F(E)$ ガ不定積分 (Dunford / 意味ノ積分トナルコト = 注意) ナル X ノ条件ハ任意ノ正数 $\varepsilon =$ 對シ高々測度 ε ノ可測集合が存在シテソノ補集合ノ上デ $F(E)$ ガ強有界変動トナルコトデアアル。

(証) 前定理ヲ使フ。

Bochnerノ積分ト可積分。Dunford 積分ト弱可積分ノ關係ニツイテハ Bochnerノ空間ヲ値域トスル場合ニ論ビラレヲトルカラ益ニハ述べナイ。

§10. X ヲ Bochnerノ条件即チ §8ノ条件ヲ強ノ次ノ条件ヲ満足スル vector lattice トスル。

(0) - 連続正線型汎函数列 f_n ガ存在シ X ノ單調増加要素列 $\{x_n\}$ ガ各 $f_n =$ ツイテ $\{f_n(x_m)\}$ ガ有界ノトキ $\bigvee_m x_m$ ガ存在スル。

カル vector lattice は regular デアル。 k_2 空間デハ X は抽象 L 空間ト isomorphic ナモノトナル。コノトキハ $F(E)$ ノ 強有界変動 = 相当スルモノヲ假定スル必要ハナク次ノ定理が成立スル。

定理. Bochner 条件ヲ満足スル vector lattice X ノ値域トスル (0) -全連続加法的集合函数 $F(E)$ ハ不定積分デアル。

(証) $F(E)$ ノ正トシテ論ジテ一般性ヲ失ハナイ。 §9 ノ定理ノ証明ト同様ノ方法ヲ証明サレル。

V. Radon - Nikodym 型定理 (其二)

抽象集合 S ノ S ノ含ム Borel 族 γ = 非負ノ有限ノ実数值ヲトル完全加法的測度 $\alpha(E)$ ノ存在ヲ假定スル。 ($\alpha(E)$ が有限値ヲトラナク $t \in S$ が可附番個ノ可測集合ニ分解サレソノ各 s ノ上デ α が有限値ヲトル場合ハ上ノ場合ニハ本質的ニハ上ノ場合ヲ考ヘレバ充分デアルカラ記述ヲ簡單ニスルタメ $\mu(S) = \text{有限トシタ}$)

$F(E)$ ノ (0) -全連続加法的集合函数トシタトキ如何ナルトキ不定積分トナルカヲ問題トスル。(積分ノ定義ハ今マデ区間ヲ考ヘタガコレヲ一般化スルコトハ trivial タカラ繰返シテ述べナイコトニスル)。 γ が測度 α = 関シテ可分距離空間ヲ作ルトキ Radon 以来ノ方法ニヨッテ atomic element ヲ除外シタモノハ半区間ノ Lebesgue 測度ニ関スルモノト metric lattice isomorphic トナル。従ッテ Bochner 条件ヲ満足スル vector lattice

或ハ $\tilde{E}_2$ 空間デハ前章ノ定理カラ直ニ結果ヲ引キ出スコトガ
出来ル。従ツテ茲デハコノ方法ニ依ラナイデ述ベルコトニ
スル。

§11. X ヲ $\tilde{E}_2$ 空間トスル。 $|F(E)| \leq \alpha(E)$ ヲ満足
スル正要素 e ガ存在スル場合 $F(E)$ ハ Lipschitz 条件 (order
dense ナ) ヲ満足スルトイフ。

定理. $\tilde{E}_2$ 空間 X ヲ値域トスル Lipschitz 条件ヲ満
足スル加法的集合函数 $F(E)$ ノトル値ノ集合 $\{F(E)\}$ ハ
norm topology ヲ conditionally compact 従テ
 $F(E)$ ハ可分値函数デアール。

(証) $F(E)$ ヲ正トシテ論ズレバ充分。 $\alpha(E)$ ニ関シ可
積分実函数空間ヲ $L(\alpha)$ ト書クコト、スル。 $L(\alpha)$ ヨリ X へノ
作用素 U ヲ次式デ定義スル。

$$U\varphi = \int_S \varphi(\lambda) dF, \quad \varphi \in L(\alpha)$$

U ハ H_b° 型作用素トナル。従ツテ $L(\alpha)$ ノ conditionally
weakly compact set ヲ X ノ conditionally
compact set ニ移ス。一方可測集合ノ特性函数ハ
conditionally weakly compact デアル。従テ
定理ノ成理ヲ知ル。

定理. $\tilde{E}_2$ 空間 X ヲ値域トスル (0) -全連続加法的集合
函数 $F(E)$ ハ可分値集合函数デアール。

(証) $F(E)$ ヲ正トシテ論ジテ充分。 §9 ノ定理ノ証明
中ノ $F_n(E)$ ヲ考ヘ前定理ヲ使フ。

定理. $F(E)$ が *Lipschitz* 条件ヲ満足スル加法的集合
函数ノトキ $F(E)$ ハ不定積分デアアル。

(証) $F(E)$ ハ可分値ナルコト X ノ各区間が *weakly compact* ナルコトカラ Phillips (Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940) 534-535) ノ方法ニヨッテ $F(E)$ が不定積分ナルコトヲ知ル。

コノ定理ハ更ニ次ノ定理ニ含マレテアル。

定理. $F(E)$ が (0) - 全連続加法的集合函数ノトキ
Bochner 積分ノ意味デ不定積分トナル条件ハ強有界変動
ナルコトナリ。

(証) 前定理ヲ使ッテ §9 ノ定理ト同論法。

定理. $F(E)$ が (0) - 全連続加法的集合函数ノトキ不
定積分 (*Dunford* ノ意味) モノニナルコトニ注意) ナル
タメノ条件ハ任意ノ正数 ε ヲ與ヘタトキ測度が高々 ε ノ可測
集合が存在シテソノ補集合ノ上デ強有界変動トナルコ
トデアアル。

(証) 略

X が *locally weakly compact* ノトキ強有界
変動全連続加法的集合函数ハ皆 (0) - 全連続デアアル。(紙
数誌 "vector 値集合函数ノRadon-Nikodym 型定
理ニ就テ" ヨリ)

§12. X ヲ Bochner 条件ヲ満足スル vector
lattice トスル。

定理. Bochner 条件ヲ満足スル vector lattice X

ヲ値域トスル (0)-全連続加法的集合函数 $F(E)$ ハ 不定積分
デアル。

(証) $F(E)$ ヲ且ツ *Lipschitz* 条件ヲ満足スルトキノ
証明ヲ行ハバ充分デアル。(§10ノ証明法カラ)。 E ヲ *Lip-*
schitz 条件ニ表ハレル正要素トスル。 X ハ E ヲ単位トスル
vector lattice ト考ヘテヨイ。 X ヲ表現 *Boole* 空間ノ
連続函数ヲ表現シスニハ $x(f)$ が應ナルモノトスル。 f_n
ニ依ツテ導入サレル測度函数 μ_n トシ正数 C_n ヲ適當ニト
ツテ $\sum C_n \mu_n$ ガ収斂スル様ニトリコレヲ μ ト定義スル
 μ 測度 O ノ集合ト第一種集合トガ一致スル。 μ ニ関シテ可
積分函数ノ空間ヲ $L(\mu)$ トシ $X = L(\mu)$ トシテヨイ。此理ヲ証
明シコレヲ $X = \text{還元シテ定理ノ証明ヲ得。}$

§13. X ヲ §8ノ条件ヲ満足スル *complete vector*
lattice トスル。(σ-complete トシテ σ complete ト
ナル §8デハ著キ忘レマシタ)

定理. *Lipschitz* 条件ヲ満足スル加法的集合函数
ハ不定積分デアル。

(証) §12ノ定理ノ証明ト同論法。

以上ノ理論ノ作用素ノ積分作用素ノ表現ニ関スル問題
ヘノ適用ハ他ノ機會ニ譲ル。又積分論(I)デノベタ考ヘ方
ニ従ツテ積分ノ基本的性質ニ充分注意ヲ向ケナカッタ。此ニ
ツイテハ他ノ積分論ト比較研究シテ補ヒタイト思フ。(ツ
ツク)

〔補正〕 紙数誌1004. 定理3. 系, *weakly*

$complete$ は不要。抽象 L , 空間が廣義ノ列空間 (座標ノ
 數が可附番トハ限ラナイ) + ルタメノ條件ハ弱收歟即チ強收
 歟トナルコト。抽象 L_2 空間デハコノ條件ハ正要素ヨリナル
 完全正規直交系ノ存在ヲスル $x > 0, y > 0, x \sim y = 0$ /
 トキ $\|x+y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$ ヲ満足スル §1ノnorm-
 ed spaceハ $bicomact$ 空間ノ連續函数デ表現シ
 normが連續函数ノnormヲ實現サレル (L_p 空間ノ
 表現ニツイテハ中野氏ノ博士院記事 1941ヲ参照サレタ
 イ)。