OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Vector 値集合函數ノ Radon-Nikodym 型定理ニ就イテ
Author(s)	小笠原, 藤次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 235, p. 1014-1018
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74973
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1041. Vector 値集合函数ノ Radon-Nikodym 型定理ニ就イテ

小笹原 藤次郎(廣島文理大)

作用素表現論ヘノ應用ヲ目的トシテ Banach 空間ヲ値域トスル強有界変動完全加法的連續集合函数ト Bochner 積分ノ意味ニ於テ可測点函数ノ不定積分トノ関係ニツイテ論ズル。具体的空間ノ線型作用素ノ核表現ヘノ應用ハ他ノ機會ニ於テ述ベル。

§1. Banach 空間論ニ於テハ特ニ複素 Banach 空間論ヲ目的トスルモノハ極メテ少イ。ソレハ複素 Banach 空間ソレ自体ガ實 Banach 空間トシテ考察サレルコトト實 Banach 空間ノ定理ハ多クハソノ証明ノ必要ナ修正ニ依ッテ複素 Banach 空間ニ於ケル對應定理トナルコトニヨルト思ハレル。其ノ限界ヲ明ニスルコトハ無駄ナ努力トハ思ハレナイガ兎ニ角放置サレタマヽデアル。茲ニ於テ以下ノ§デ表レル概念ニツイテーニノ注意ヲ加ヘタイ。Z ヲ複素 Banach 空間トシ之レヲ實 Banach 空間トシテ考察スルトキ X_Z デ表ス。從ッテ $\overline{Z}$ ハ Z ノ線型汎函数ノ複素共軛 Banach 空間ヲ $\overline{X}$ ハ X ノ線型汎函数ノ實共軛空間ヲ表スコトニナル。コノトキ次ノ命題

(1) Z ハ weakly complete デアル。

(2) Z ハ locally weakly compact デアル。

(3) $\overline{Z}$ ハ locally weakly compact デアル。

(4) Z ハ regular デアル。

ハ夫々ニ於テ Z ヲ X デ置換シテ得ラレル命題ト對等デアル。(2) ト (3) ハ對等ナ命題デアリ、(4) ガ成立スルトキ (2) ガ成立スル。可分ナ Z ニツイテ (2) ガ成立スルトキ (4) ガ成立スル。尚 Idelly ノ定理，線型作用素トソノ共軛作用素ニツイテ弱完全連続ノ双對性等ガ成立スル。從ッテ記述ヲ簡単ニスル爲カラ集合函數ノ値域ヲ実 Banach 空間トシテ述ベルコトガ知ラレル。

S ヲ抽象集合，γ ヲ S ヲ含ム S ノ部分集合ヨリナル Borel 族，$\mu(E)$，$E\in\gamma$ ヲ γ 上ノ非負完全加法的集合函數（或ハ測度函數）トスル．以下ニ於テハ $\mu(S)$ ヲ有限トシテヨイ．何者 S ガ有限測度ノ可附番可測集合ノ和トシテ表ハルトキ本質的ニ S ガ有限測度トシテ論ズレバ充分デアルカラ。

§2. X ヲ Banach 空間トシ $F(E)$，$E\in\gamma$ ガ X ヲ値域トスル γ 上ノ完全加法的集合函數トスル．モシ $\mu(E)=0$ ノトキ常ニ $F(E)=0$ トナルトキ $F(E)$ ハ $\mu(E)$ ニ関シテ全連続或ハ單ニ全連續トイフ。

定理1. X ガ regular ノトキ μ ニ関シテ全連続ナ完全加法的集合函數 $F(E)$ ハ強有界変動ノトキ Bochner 積分デ，不定積分デアル。

定理2. 定理1ハ〝X ガ regular〟ノ代リニ〝X ガ locally weakly compact〟トシテモ成立スル。

(注意) 定理2ハ定理1ノ拡張デアルカラ定理2ヲ証明

スレバ充分。 $F(E)$ が可分値函数ノ場合ニハ既ニ Dunford-Pettis (Trans. Amer. Math. Soc. 47 (1940) 323—392). Phillips (A 48 (1940) 516—540) が本質的ニ証明サレル.

維ッテ定理2ノ証明ハ $F(E)$ が可分値ナルコトヲ証明スレバ充分デアル。

(注意) X ニ仮定ヲ置ク代リニ $\left\{\frac{F(E)}{\alpha(E)} \mid E \in \mathfrak{F}\right\}$ が conditionally weakly compact トシテモヨイ。

(注意) X ニ定理ノ仮定ノ代リニ $\{F(E) \mid E \in \mathfrak{F}\}$ ヲ含ム最小ノ部分閉空間ノ determining manifold Γ が可分且ツ Γ ニ関シテ X が locally weakly compact 換言スレバ X が可分空間ノ共軛空間トナッテオルトキハ一般ニハ Bochner ノ不定積分ニハナラナイガ此ノ場合ニハ Dunford-Pettis (上掲論文) ガ論ジテオル。

定理2ノ証明. $\|F(E)\| \leqq \alpha(E)$ ノ場合ヲ証スレバ充分. 何者 $\sigma(E)$ ヲ E 上ニ於ケル $F(E)$ ノ強全変分トスレバ $\|F(E)\| \leqq \sigma(E)$ ガ成立スル. コノトキ $F(E) = \int_E x(\lambda)\, d\sigma$ トナッタトスル. 一方 $\sigma(E) = \int_E \sigma'(\lambda)\, d\lambda$ トカケルカラ $F(E) = \int_E \sigma'(\lambda) x(\lambda)\, d\lambda$ トナリ $\sigma'(\lambda) x(\lambda)$ ノ代リニ新ニ之レヲ $x(\lambda)$ ト書ケトキ $F(E) = \int_E x(\lambda)\, d\lambda$ トナル. 故ニ上ノ仮定ヲ置ク. α ニ関シテ可積分実函数ノ作ル L 空間ヲ $L(\alpha)$ トスルトキ

$$U_\varphi = \int_S \varphi(\lambda)\, dF, \quad \varphi \in L(\alpha)$$ トスレバ

U ハ $L(\alpha)$ ノ単位球ヲ X ノ単位球ノ部分ニ移スカラ U ハ弱完全連続、従ッテ $L(\alpha)$ ノ weakly compact set ヲ X ノ compact set ニ移ス。(Phillips, 上掲論文定理5.5) 然ルニ可測集合ノ特性函数ノ全体ハ $L(\alpha)$ デ weakly compact. 従ッテ $\{F(E)\,|\,E\in\gamma\}$ ハ compact (compact ハ conditionally ノ意デアル) 即チ $F(E)$ ハ可分値函数トナル。従ッテ上ノ注意カラ成立スル。

(注意) L 空間ヨリ任意ノ X ヘノ弱完全連続作用素ノ可分値ナルコト及ビソノ積分表現モ同様ノ考ヘ方カラ得ラレル。

(注意) Bochner-Taylor ノ vector 値函数空間ノ理論ガ抽象集合 S ノ上デ展開サレル。Bochner-Taylor (Annals of Math. 39 (1938) 913—914) 國澤 (學士院記事 16 (1940) 68—72)

§3. 定理2ノ別証明.

α ニ関シテ可積分実函数ノ作ル L 空間ヲ $L(\alpha)$ トスル。$f\in\overline{X}$ トシテ $f(F(E))=\Phi(E)=\int_E\varphi(\lambda)\,d\alpha$ ト書ク。$\overline{X}$ ヨリ $L(\alpha)$ ヘ変換 $f\to\varphi(\lambda)$ ハ Kantorovitch ノ H_δ° ニ属スル何者 $\|f\|\leqq1$ ノトキ $|\Phi(E)|\leqq\sigma(E)$ ガ成立スルカラ。$\overline{X}$ ハ locally weakly compact 従ッテ $\overline{X}$ ノ単位球ノ像ハ compact. 故ニ φ ハ可分集合ヲ作ル。従ッテ α ニ関シテ可分ナル部分 Borel 族 γ' ガ存在シテ φ ハ γ' ニ関シテ可測トナル。$F(E)$ ハ γ' 上デ可分値函数、従ッテ γ' ニ関シテ可測ナ函数 $\chi(\lambda)$ ガ存在シテ $E\in\gamma'$ ノトキ $F(E)=\int_E\chi(\lambda)\,d\alpha$

トナル．コノ式ガ任意ノ $E\in\gamma$ ニ對シテ成立スルコトヲ証明スレバヨイ。

$E\in\gamma$ ノトキ $\int_E f(x(\lambda))\,d\alpha = f(F(E)) = \int_E \varphi(\lambda)\,d\alpha$ ヨリ $f(x(\lambda))$ ト $\varphi(\lambda)$ ハ null set ヲ除イテ一致スル．従ッテ任意ノ $E\in\gamma$ ニツイテ $\int_E f(x(\lambda))\,d\alpha = \int_E \varphi(\lambda)\,d\alpha$．コノ式ヨリ $f(F(E)) = f\left(\int_E x(\lambda)\,d\alpha\right)$ 即チ $F(E) = \int_E x(\lambda)\,d\alpha$ トナル。