



Title	一般二元複素変数函数論ノ軌道
Author(s)	高須, 鶴三郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 235, p. 1018-1024
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74974
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1042. 一般二元複素変数函数論ノ軌道

高 須 鶴 三 郎 (東北大)

前回迄デ私ノ考ニ缺点ノアツタ場合ニ皆様ノ御助言ヲ仰
ギ度サニ種々述べマシタガ、結局一般二元複素変数 $z = x + jy$ 。
($j^2 = -1$; μ, ν, x, y ハ實數)ノ函数論研究法ハ
之ヲ次ノ如ク完全ニ軌道ニ載セ得テ、充分透明ナモノトナリ、
全体ハ全ク美シイ科學トナルコトガ分リマシタ。唯餘リ充分
ニ行キ過ギル部分が大半ヲ占メマス、デ一法ノキマリ悪サヲ
感ズルノデアリマス。

1. x, y 平面上ノ幾何學的法則ハ

$$\zeta = \rho e^{j\theta} = \rho(\cos j\theta + j \sin j\theta),$$

$$\bar{\zeta} = \rho e^{-j\theta} = \rho(\cos j\theta + j \sin j\theta), \quad j + \bar{j} = \nu, \quad j\bar{j} = -\mu,$$

$$\sin j\varphi = \frac{e^{j\varphi} - \bar{e}^{j\varphi}}{2j - \nu}, \quad \cos j\varphi = \frac{j(e^{j\varphi} + \bar{e}^{j\varphi}) - \nu e^{j\varphi}}{2j - \nu},$$

$$\cos j^2\varphi + \nu \cos j\varphi \sin j\varphi - \mu \sin j^2\varphi = 1$$

+ ν Trigonometrie ヲ許ス様 + 非 Euclid 的 Parabolische Geometrie テアリマス。

2. 絶対値ト modulus 点 (x, y) ヲ過ギリ, j +
ル 方向係数ヲ有ツ様 + Isotrope $X - x + j(Y - y) = 0$ が
x 軸 ($Y = 0$) カラ截リトル截片

$$(1) \quad X = x + j y = \zeta$$

トシテ $\zeta = x + j y$ ノツノ Interpretation が出来
ス. ($\nu^2 + 4\mu < 0$ ノ時ハ之ハ通常ノ複素数) 此ノコト =
甚イテ, 通常ノ意味 (領域若クハ複素域) ノ絶対値

$$(2) \quad |X| = |x + j y|, \quad |\bar{X}| = |x + j y|$$

ヲ以テ夫々 ζ 及 $\bar{\zeta}$ ノ 絶対値 ト定義シ, modulus

$$(3) \quad \|\zeta\| = \|\bar{\zeta}\| = \|X\| = \|\bar{X}\| = \rho \\ = \sqrt{x^2 + \nu x y - \mu y^2}$$

ト區別シマス。ソノスルト, 極限, 連續性 及ビ其レニ關聯ス
ル諸概念ノ導入が通常通りノ形式ヲ導入可能トナリ, 從ツテ
Abschätzen が出来ルコト = ナリマス. ($\|\zeta\| = |\zeta|$ ト)
ルハ $\nu^2 + 4\mu < 0$ ノ場合ニ限りマス) ソレヲ例ヘバ
Bieberbach ノ教科書第一卷ノ如ク卷尺シテ進ムト

3. Cauchy の積分定理迄ハ三ツノ場合

$$\nu^2 + 4\mu < 0 \quad | \quad \nu^2 + 4\mu \rightarrow 0 \quad | \quad \nu^2 + 4\mu > 0$$

ヲ通ジテ統一酌取扱カ出来マス。

4. Cauchy の積分公式ニ至ルト, $\nu^2 + 4\mu < 0$ ノ場合以外其レガ entarten シマスカラ, 道カニツニ分レ

I. $\nu^2 + 4\mu < 0$ ノ場合ニハ, 全複素函数論が, 一般理論, 特殊函数論, 概定理論等隔カラ隔迄完全ニ拡張セラレマス。 (其ノ際通常内ガ考ヘラレル所ヘ指内ガ考ヘラレマス)

II. $\nu^2 + 4\mu < 0$ 以外ノ場合ニハ, (i) 及び (ii) = 準ジテ作ツタ

$$(4) \quad \bar{X} = x + j y = \zeta$$

ガモトニナツテ, 実函数論ガ隔カラ隔迄全部完全ニ拡張セラレテ然カモニ次元性ヲ飛躍スルコトハ, $f(x)$ ト $\bar{f}(\bar{x})$ トノ理論ヲ X -軸上ノ領域ガ把握シ, 其レ等ヲ組み合ヒテ xy 平面上ノ領域ガ把握スレバコイノマス。

斯クシテ, Rolle ノ定理, 平均値ノ定理, Taylor ノ定理, ノ如ク進スコトガ出来マス。 (之等ノ定理デハ $0 < \theta < 1$ ナル θ ガニツノ $(\theta_j, \theta_{\bar{j}})$ アラハレテ, $z + \theta_j h, \bar{z} + \theta_{\bar{j}} \bar{h}$ ニ對スル点 M テ圖ノ如ク考ヘルコトニナリマス)

斯クシテ微分方程式論, 積分方程式論, 概近微分論, 概近積分論等ハ全部完全ニ二次元ニ拡張セラレマス。

又數級數ノ收歛域ハ

$$\nu^2 + 4\mu \rightarrow 0 \quad | \quad \nu^2 + 4\mu > 0$$

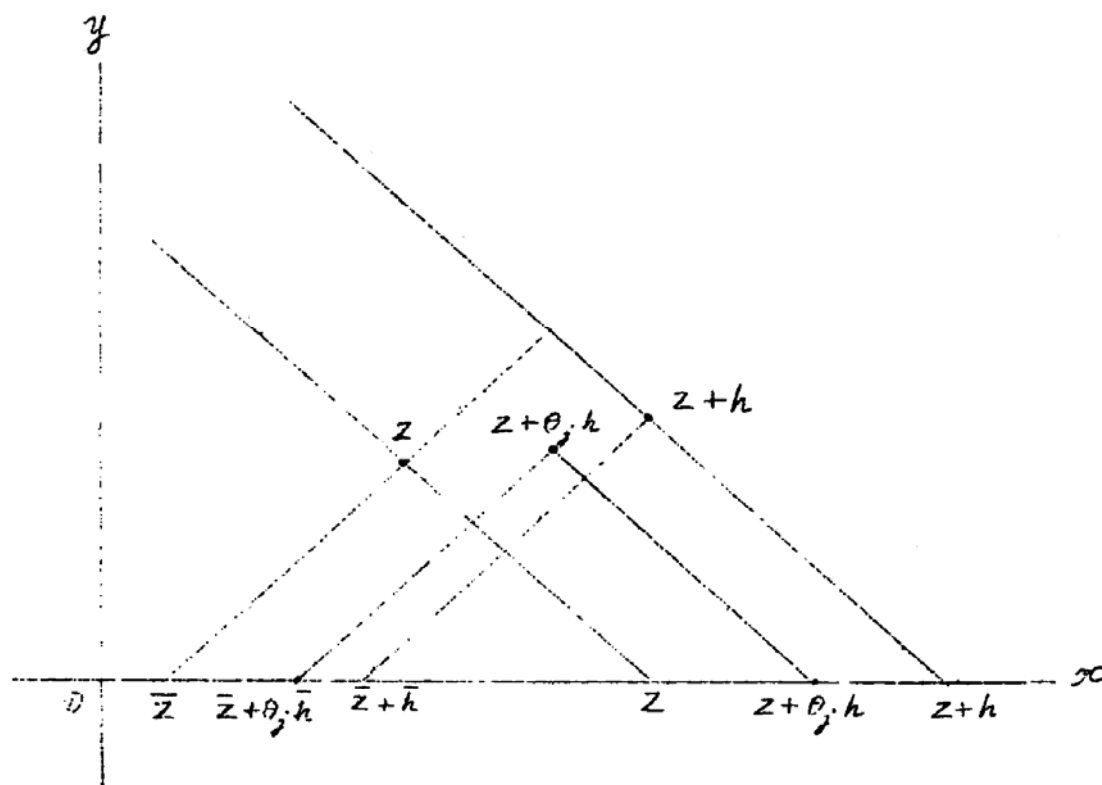
ノ時ハ *Isotrop*

$$X + jY = 0 \quad | \quad X + jY = 0, \quad X + \bar{j}Y = 0$$

≡ 平行半直線ヲ用スル

Band

| 平行四辺形デアリマス。



III. $\nu^2 + 4\mu < 0$ 以外, 場合ヲモ, I, II テ禁ゲタリ
外, ニ次元独得ノ領域モ少クアリマセン。

例ヘバ

(i) 一次函数論ハ, ミツノ場合

$$\nu^2 + 4\mu < 0 \quad | \quad \nu^2 + 4\mu \rightarrow 0 \quad | \quad \nu^2 + 4\mu > 0$$

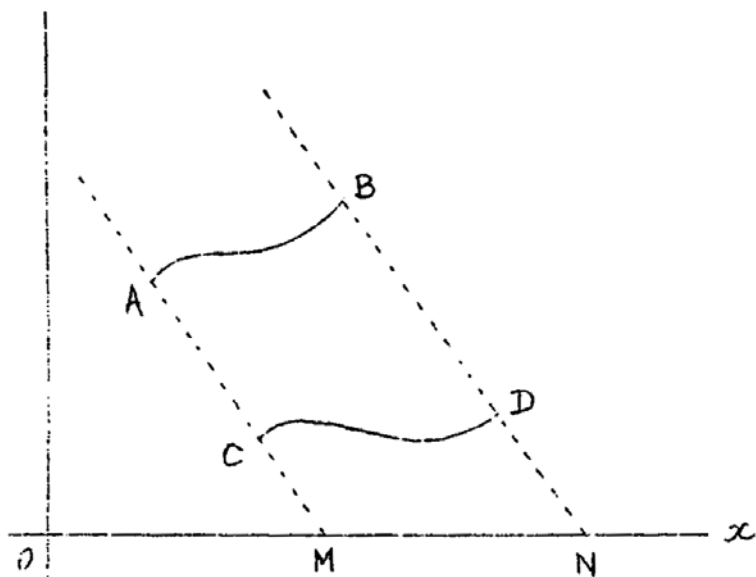
ヲ通シテ完全ニ統一セラレタ皆等シクナリマス。

(iii) *Cauchy* ノ積分定理ヲ圖ノ閉曲線 $ABDC$ = 適用シテ (AC, BD ハ *Isotrope* テ其ノ上デハ $d\zeta = 0$)
合ル如ク, 微分可能ナ $f(\zeta) = \zeta$ イテハ, A, C 及ビ B, D カ

夫々同一 *Isotrope* y

の上ニアル限リ、積
分ノ道ニ拘ラズ

$$\begin{aligned} & \int_A^B f(\zeta) d\zeta \\ &= \int_C^D f(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{MN} f(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$



デアリマス。従テ P, Q が同一 *Isotrope* 上ニアル限リ、積
分ノ道ニ拘ラズ

$$\int_{PQ} f(\zeta) d\zeta = 0$$

が成立シマス。

(iii) $\nu^2 + 4\mu > 0$, 場合 = ハ, $\sin \zeta, \cos \zeta$ 等ハ
doppelperiodische Functionen デアリマシテ, 其
ノ *Fundamentalebereich* ハ *Isotrope* = 平行ナ
四ツ有スル平行四辺形デアリマス。

5. 應用例

(i) 普通ノ流体力學デ, 解析函数 $f(\zeta) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ ヲ用ヒテ, *equivelocity-potential line*
 $\varphi = \text{const.}$ ト *stream line* $\psi = \text{const.}$ ヲ出シ
マス如ク, 高速度航空流体力學デ, 流体ノ速度ト音ノ速度ト
ヲ夫々 q 及 c トシテ 際ニ

$$g < c \quad | \quad g = c \quad | \quad g > c$$

= 對シテ夫々

$$\zeta = x + iy, i^2 = -1 \quad | \quad \zeta = x + py, p^2 = 0 \quad | \quad \zeta = x + hy, h^2 = +1$$

ヲ用ヒテ, *equivelocity-potential line* $y = \text{const.}$
ト *stream line* $\psi = \text{const.}$ ヲ扱フコトガ次ノ論文ニ
文ニヤウヲアリマス。

D. Riabonchinsky, *Recherches sur l'amélioration des qualités aérodynamiques des profils d'ailes aux grandes vitesses. Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air. N° 108 (1937)*

(ii) *Minimal surface, Weierstrass-Bonnet 公式*

$$x = R \frac{1}{2} \int (1 - \zeta^2) F(\zeta) d\zeta,$$

$$y = R \frac{1}{2} \int (1 + \zeta^2) F(\zeta) d\zeta,$$

$$z = R \int \zeta F(\zeta) d\zeta = \text{於テ, } \zeta \text{ トシテ}$$

$$\nu^2 + 4\mu < 0 \quad | \quad \nu^2 + 4\mu \rightarrow 0 \quad | \quad \nu^2 + 4\mu > 0$$

ノ場合, $\zeta = x + jy$ ヲ用フルト, 新レイ *surface class* ノ美シク大キイ理論ヲ得ラレマス。

(iii) *Laguerre-minimal surface*,
私ノ公式

$$\zeta_1 = R \frac{1}{2} \int (1 - st) F(\zeta) d\zeta,$$

$$\zeta_2 = R \frac{1}{2} \int (1 + st) F(\zeta) d\zeta,$$

$$\zeta_3 = -R \frac{1}{2} \int (s + t) F(\zeta) d\zeta,$$

$$\zeta_4 = \frac{i}{2} \int (s - t) F(\zeta) d\zeta, \quad (s = s(\zeta), \quad t = t(\zeta))$$

ニツイテモ同様デアリマス。