



Title	確率過程ノ differentiation
Author(s)	伊藤, 清
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 235, p. 1024-1029
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74975
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1043. 確率過程 / differentiation

伊 藤 清 (内閣統計局)

§ 1. P -可測性 = 就テ. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ γ 確率ノ場
トシ、 $x(\omega)$ γ コノ上デ定義セラレタ X ノ上ノ値ヲトレ函
數トスル。 $x(\omega)$ ガ確率変數ト云ハレルタメニハ、ソレガ
 P -可測デアアルコトガ必要デアアルガ、 P -可測性ノ定義ノタ
メニ普通行ハレル方法ハ次ノ如キニデアアル。即チ X ノ部分
集合ノ系 σ γ 考ヘ、 σ = 属スル任意ノ集合ノ x = ヨル $Ur-$
 $bild$ ガ P -可測ノ時、 x ハ P -可測 (σ) デアルトイフ。
 σ γ 含ム最小ノ完全加法族ヲ B_∞ トスルト、 x ガ P -可測
(σ) ナラバ、 x ハ必然的 = P -可測 (B_∞) トナル。

X が抽象空間の場合に於ては、 X のアル点 a を含み $\mathcal{G}$ のスベテノ集合ノ共通集合が a となり、デアルヤウ = $\mathcal{G}$ を選ガコトハ望マシイ。又 X が位相空間ノ時ニハ $\mathcal{G}$ トシテスベテノ近傍ヲ元トスル集合ヲ選ガコトが普通デアル。故ニ $\mathcal{G}$ + 集合系ノ代リニ、位相ヲ表ハス記号ヲ用ヒテモヨイワリデアル。例ヘバ函数空間ノ場合 = *weak topology* = 開聯シテ イフ時ニハ P -measurable (w. t.) トイフ風ニアラハシタリ、又 X = 距離 ρ が入ッラホル時ニハ P -measurable (ρ) トイフカ如キデアル。

§2. 筆者が前談話ニ述ベタル如ク、條件附確率法則 $P_{\pi/\xi}$ ハ確率法則ナル函数ヲ値トスル確率変数デアルが、ソノ場合コレハ P -可測 (w. t.) デアツタノデアル。然レキガ確率変数ノ場合ニハ $P_{\pi/\xi}$ ハ実数空間ノ上ノ確率法則ヲ値トスル確率変数デアツテ、実数空間ノ上ノ確率変数ノ場合ニハ所謂 *Frechet* ノ距離 ρ が定義出来ルノデ、 $P_{\pi/\xi}$ が P -可測ナリヤ否ヤノ問題ニスルコトハ自然ト道筋デアル。答ハ肯定的デ、ソノ証明モ容易デアルガ、一應マツテ見マシ。

今 F_1, F_2 ノ実数空間ノ上ノ確率法則トスルトキ、
 $y = F_1\{(-\infty, x)\}$, $y = F_2\{(-\infty, x)\}$ ノグラフヲ書キ不連続点ニ於テハ、 $x+0$ = 對應スル点ト $x-0$ = 對應スル点トヲ結ブト、ニツノ連続曲線ガ得ラレル。 $x+y=a$ ($-\infty < a < +\infty$) ナル直線ハ各グラフヲ唯ニ点ニ於テ截ル。

コノ截点ノ距離ノ上限 (a ヲ動かス時ノ) —— 實ハ「最大」ナル事ガスグニ分ル —— ガ F_1 ト F_2 トノ間ノ Frechetノ距離デアアル。

コノ距離ニ関シテアル確率法則 F ノ ε -近傍 $U(F, \varepsilon)$ ヲ考ヘテ見ヨウ。 $x+y=a$ ナル直線ガ $y=F_1\{(-\infty, x)\}$ ノグラフヲ截ル点ヲ $p(a)$ トシ、 $p(a)$ カヲ $x+y=a$ ニ沿ッテ ε ガケ距ツタ点ノ中、上方ニアルモノヲ $Q_1(a)$ 、下方ニアルモノヲ $Q_2(a)$ トスル。 a ヲ動かス時 $Q_1(a)$ 及ビ $Q_2(a)$ ハ連続的ニ変化スルガ、ソノ描ク曲線ヲ夫々 C_1, C_2 トスル。 C_1, C_2 ハアル非減少有界函数 $y=f_2(x)$ ノグラフデアルト云々。 F ノ ε -近傍 $U(F, \varepsilon)$ C_1, C_2 ノ間ニ挟マレタ部分ノ中、グラフニ對應スル確率法則ノ集合デアアル。

楮テ $f_1(x), f_2(x)$ ガ共ニ連続デアアルマウ十點ハ列ル点稠密デアツテ、ソノ中カラ可附番個 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ ヲトツテ、之レカ矢張り列ル所稠密デアアルマウニ出スル。スルト

$$\overline{U(F, \varepsilon)} = \bigcap_{i=1}^{\infty} F\{G; f_2(\lambda_i) \leq G((-\infty, \lambda_i)) \leq f_1(\lambda_i)\} \quad (1)$$

トナル。 ($\overline{U}$ ノ上ノ横線ハ U ノ abgeschlossene Hülleヲ表ハス)

モトニモドリ、 $P_{\eta/\xi}$ ハ P -可測 (ω, t)ナル故

$$P_{\eta/\xi} \in E\{G; f_2(\lambda_i) \leq G((-\infty, \lambda_i)) \leq f_1(\lambda_i)\}$$

$$\text{即チ } f_2(\lambda_i) \leq P_{\eta/\xi}((-\infty, \lambda_i)) \leq f_1(\lambda_i)$$

ハ P -可測デアル。故 $= (1) = \exists$ リ

$$P_{\eta/\varepsilon} \in \overline{U(F, \varepsilon)}$$

モ P -可測デアル。

$$U(F, \varepsilon) = \bigcup_{n=2}^{\infty} \overline{U(F, \frac{n-1}{n}\varepsilon)}$$

ナル故

$$P_{\eta/\varepsilon} \in U(F, \varepsilon)$$

モ亦 P -可測デアル。即チ $P_{\eta/\varepsilon}$ ハ P -可測 (P) デアル。

§3. x ヲ区間 $(0, 1)$ ノ上ノ確率過程トスル。即チ $(0, 1)$ 上デ定義セラレタ実函数ノ空間ヲ値域トスル確率変数トスル。ソノ P -可測性ハ *weak topology* = 関係セシメテ定義スル。

t ヲ $(0, 1)$ 間ノ實数トスルトキ, x_t ハ x ノ t = 點スル値トスル。 x_t が P -可測ナルコトハ明ラカデ、之ハーツノ確率変数デアル。区間 $(0, 1)$ ノ一部分 (t, S) ノ上デ x ヲ考ヘテ (t, S) 上ノ確率過程ヲ得ル。之ヲ $x_{t, S} = \tau_t x$ ハス。 $x_{0, t}$ が定マツタ時ノ $x_{t_1} - x_t$ ($t_1 > t$) ノ條件附確率法則 $P_{x_{t_1} - x_t / x_{0, t}}$ ヲ考ヘヨリ。之レハ前節ニヨリ P -可測 (P) デアル。

$$P\text{-}\lim_{\substack{t_1 \rightarrow S+ \\ t_1 \rightarrow S-}} \left(P_{x_{t_1} - x_t / x_{0, t}} \right)^* \left[\frac{1}{t_1 - t} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} [\wedge] \text{ハ} \wedge \text{ノ整数部分ヲ表ハシ} \\ * \text{ハ convolution ヲ表ハス} \end{array} \right]$$

が存在スルトキ、確率過程 X ハ S = 於テ微分可能トイヒ、
 コノ極限值ヲ $D_S X$ = テアラス。 $D_S X$ ハ確率法則ヲ値ト
 スル。 Ω 上ノ函数デ、而モ P -可測 (P) デアル。又 $D_S X$ ガ
 $X_{0,S}$ ノ函数タルコトモ容易ニ分ル。而シテ

limit law (of probability) ハ無限ニ分解可
 能デアル。 (Khintchine) = ヨリ $D_S X$ ハ無限分解可能
 ナルコトガ分ル。

§4. $D_S X$ ガ無限ニ分解可能トスレバ、ソノ特性函数
 ノ對數ハ P. Lévy ノ定理ニヨリ

$$i m z - \frac{\sigma^2}{2} z^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{i z u} - 1 - \frac{i z u}{1+u^2} \right) n(du) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right)$$

= テ表ハサレルヲケデアル。而シテ次ノ (2) (3) (4) ハ Khint-
 chine '1

Déduction nouvelle d'une formule de P. Lévy
 1 方法 = ナラツテ容易ニ証明出来ル。(1)

$$\lim_{\substack{t \rightarrow S+ \\ t_1 \rightarrow S-}} \frac{1}{t_1 - t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{1+u^2} P_{x_{t_1} - x_t / x_{0,t}}(d\lambda) = m \quad (2)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\substack{t_1 \rightarrow S+ \\ t \rightarrow S-}} \int_{-\infty}^{\delta} u^2 P_{x_{t_1} - x_t / x_{0,t}}(d\lambda) = \sigma^2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{t_1 - t} P_{x_{t_1} - x_t / x_{0,t}} \xrightarrow{(P)} n \quad (4)$$

(1) Bull. de l'univ. d'état à Moscou, Ser. inter.
 Math. et Mec. vol 1. Fasc. 1. 1937.

茲 = P の Frechet ノ距離 ヲ ヲラッテ 定義 スル コト シ
 n ノ グラフ ハ

$$y = n(-\infty, x) \quad (x > 0)$$

$$y = -n(x, +\infty) \quad (x < 0)$$

ノ グラフ ト シ、 $\frac{1}{t_1 - t} P_{x_{t_1} - x_t / x_{0t}}$ ノ グラフ $\in$ 同様ニ 定義 ス
 ル。 (2) (3) (4) = コリ m, σ, n ガ 確率変数 トル コト ガ ワ
 カル。 n ハ 実数軸 カラ 0 ヲ ノゾイタ 部分ノ 上ノ 測度ヲ 値ト ス
 ル $\in$ デ、 ソノ P -可測性ハ 上ノ P = 閉聯シテ 定義 スルノ
 デ了ル。

特ニ $n=0$ ノ 場合ニハ

(2) ノ 代リ =

$$\lim_{\substack{t_1 \rightarrow s+ \\ t \rightarrow s-}} \frac{1}{t_1 - t} \int_{-\delta}^{\delta} u P_{x_{t_1} - x_t / x_{0t}}(d\lambda) = m \quad (2')$$

(3) ノ 代リ =

$$\lim_{\substack{t_1 \rightarrow s+ \\ t \rightarrow s-}} \frac{1}{t_1 - t} \int_{-\delta}^{\delta} u^2 P_{x_{t_1} - x_t / x_{0t}}(d\lambda) = \sigma^2 \quad (3')$$

(4) ノ 代リ =

$$\frac{1}{t_1 - t} P_{x_{t_1} - x_t / x_{0t}}(E) \rightarrow 0 \quad \left(\begin{array}{l} E \wedge 0 \text{カラ 正ノ 距離} \text{ガ} \text{々} \\ \text{距ッ々 集合トスル} \end{array} \right) \quad (4')$$

ガ 出ル コト モ 容易ニ 証明 出来ル。