



Title	束群ニツイテ
Author(s)	岩澤, 健吉
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 235, p. 1030-1048
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74976
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1044. 束群 = ツイテ

著 澤 健 吉 (東大)

以前 = マハリコノ紙上談話會デ束群ニ関シテ注意ヲ述ベ
 ンコトガアリマシタ。ソノ時ノ考ヲ用ヒテ中野先生ガ *Abel*
 群ノ場合ニトサレタマリ方⁽¹⁾ヲ真似シマスト所謂 "*Birkhoff*
 ノ豫想"ガ解決サレルマウニ思ヒマスノデ以下ソレニツイテ
 述ベテ見マス。

1. 以下 $\mathcal{A}$ ハ *conditionally complete* ト束
 群トシマス。

$$\text{Lemma 1.}^{(2)} \quad \begin{aligned} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_\omega \leq \dots \leq a, \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_\omega \leq \dots \leq b, \end{aligned}$$

ヲ同じ順序型ヲ持ッ上カラオサヘラレタ系列トスル。シカル
 トキ

$$\bigvee_{\xi} a_{\xi} \bigvee_{\xi} b_{\xi} = \bigvee_{\xi} a_{\xi} b_{\xi}$$

$$\text{証明. } \bigvee_{\xi} a_{\xi} b_{\xi} \geq a_{\eta} b_{\eta} \geq a_{\xi} b_{\eta} \quad (\xi \leq \eta)$$

$$\therefore \bigvee_{\xi} a_{\xi} b_{\xi} \geq a_{\xi} \bigvee_{\eta} a_{\eta} \quad \therefore \bigvee_{\xi} a_{\xi} b_{\xi} \geq \bigvee_{\xi} a_{\xi} \bigvee_{\eta} a_{\eta} = \bigvee_{\xi} a_{\xi} \bigvee_{\eta} b_{\eta}$$

$$\text{一方 } \bigvee_{\xi} a_{\xi} \bigvee_{\eta} b_{\eta} \geq a_{\xi} b_{\xi} \quad \therefore \bigvee_{\xi} a_{\xi} \bigvee_{\eta} b_{\eta} \geq \bigvee_{\xi} a_{\xi} b_{\xi}$$

(1) H. Nakano. *Teilweise Geordnete Algebra*, 輯報17卷
 (1941) 425-511. 以下 N. T. トシテ引用。

(2) コノ Lemma 1. 2. ハ H. Freudenthal, *Teilweise Geord-
 nete Moduln*, Proc. Acad. Ams. Vol. 34, (1956) ニヨル。

Lemma 2. $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_\omega \leq \dots \leq a$ トシ又
 b ヲ任意ノ要素トスルトキ

$$(\bigvee a_\xi) \wedge b = \bigvee (a_\xi \wedge b)$$

証明. $\bigvee (a_\xi b^{-1}) \wedge 1 = \bigvee (a_\xi b^{-1} \wedge 1)$ ヲ証明スレバ
 コイカラ始メカラ $b=1$ トシテオク。

$$\bigvee a_\xi = ((\bigvee a_\xi)^{\vee} 1) (\bigvee a_\xi \wedge 1) = (\bigvee (a_\xi^{\vee} 1)) (\bigvee a_\xi \wedge 1),$$

又一方

$$\bigvee a_\xi = \bigvee ((a_\xi^{\vee} 1) (a_\xi \wedge 1)) = \bigvee (a_\xi^{\vee} 1) \bigvee (a_\xi \wedge 1)$$

故ニ $(\bigvee a_\xi) \wedge 1 = \bigvee (a_\xi \wedge 1)$

Lemma 3. M ヲ上カラオサヘラレタ y ノ任意ノ部
 分集合, b ヲ任意ノ要素トスルトキ

$$\left(\bigvee_{a \in M} a \right) \wedge b = \bigvee_{a \in M} (a \wedge b)$$

証明. M ノ要素ヲ十ラベテ $a_1, a_2, \dots, a_\omega, \dots$
 $\dots, a_\eta, \dots, \eta < \xi$ トスル。

証明スベキコトハ $\left(\bigvee_{\eta < \xi} a_\eta \right) \wedge b = \bigvee_{\eta < \xi} (a_\eta \wedge b)$

コツテ $\xi' < \xi, \left(\bigvee_{\eta < \xi'} a_\eta \right) \wedge b = \bigvee_{\eta < \xi'} (a_\eta \wedge b)$

ハ証明サレタメノトシテ超限帰納法ヲ用ヒル, $\xi = \xi_0 + 1$
 トラバ

$$\begin{aligned} \left(\bigvee_{\eta < \xi} a_\eta \right) \wedge b &= \left(\bigvee_{\eta < \xi_0}^{\vee} a_{\xi_0} \right) \wedge b \\ &= \left(\left(\bigvee_{\eta < \xi_0} a_\eta \right) \wedge b \right)^{\vee} (a_{\xi_0} \wedge b) = \bigvee_{\eta < \xi} (a_\eta \wedge b) \end{aligned}$$

ヨツテ ξ ヲ 極限数 トセヨ。然ラバ

$$m_\eta = \bigvee_{\eta' < \eta} a_{\eta'} \quad \text{トオクトキ} \quad \bigvee_{\eta < \xi} a_\eta = \bigvee_{\eta < \xi} m_\eta$$

且ツ m_η ハ 單調増大ナル故 Lemma 2 = ヨリ

$$\left(\bigvee_{\eta < \xi} a_\eta \right) \wedge b = \left(\bigvee_{\eta < \xi} m_\eta \right) \wedge b = \bigvee_{\eta < \xi} (m_\eta \wedge b)$$

假定 = ヨリ $m_\eta \wedge b = \bigvee_{\eta' < \eta} (a_{\eta'} \wedge b)$ ナル故, コレカラ Lemma

ヲ得ル。

Lemma 4. $|a| \wedge |b| = 1$ ナラバ $ab = ba$, 但シ
普通ノ通り $a_+ = (a \vee 1)$, $a_- = (a \wedge 1)^{-1}$, $a = a_+(a_-)^{-1}$,
 $|a| = a_+ a_-$ トスル。

証明. $a \geq 1$, $b \geq 1$, $a \wedge b = 1$ ナルトキ $ab = ba$
ナルコトハ前ニ述べタ。

$$a_+, a_- \leq |a|, \quad b_+, b_- \leq |b|, \quad |a| \wedge |b| = 1 \text{ ナラ}$$

$$a_+ \wedge b_+ = a_+ \wedge b_- = a_- \wedge b_+ = a_- \wedge b_- = 1$$

故ニ $ab = ba$ ナル。

Lemma 5. $a, b, p \in \mathcal{O}$ トシ $|a| \wedge |p| = 1$, $|b| \wedge |p| = 1$
ナラバ $|ab| \wedge |p| = 1$

証明. 先ツ $a, b \geq 1$ トスル。

$$ab \wedge |p| = a(b \wedge a^{-1}|p|) \leq a(b \wedge |p|) = a$$

ヨツテ

$$ab \wedge |p| = ab \wedge |p| \wedge a = 1.$$

一般ニ上ノ假定カラ

$$a_+ \wedge |p| = 1, \quad a_- \wedge |p| = 1, \quad b_+ \wedge |p| = 1, \quad b_- \wedge |p| = 1$$

$$\text{サテ } (ab)_+ = (ab^{-1}) \leq (a^{-1})(b^{-1}) = a_+ b_+$$

$$\text{故に } a_+ \cap |p| = 1, b_+ \cap |p| = 1 \text{ カラ}$$

$$a_+ b_+ \cap |p| = 1$$

$$\text{ヨッテ } (ab)_+ \cap |p| = 1.$$

$$\text{同様 } (ab)_- \leq b_- a_- \text{ カラ } (ab)_- \cap |p| = 1.$$

$$\therefore |ab| \cap |p| = 1$$

コノ Lemma = ヨリ $p \in \mathcal{O}_f$ が與ヘラレタトキ $|a| \cap |p| = 1$ ナル如キ a , 全体ハ $\mathcal{O}_f$ ノ部分群 $\bar{K}_p$ ヲツクル。

又 $\bar{K}_p$ ノ各要素ト直交スル $\mathcal{O}_f$ ノ要素全体ハ $\mathcal{H}_p$ ノ部分群 $\mathcal{H}_p$ ヲツクル。 Lemma 4 = ヨリ $\bar{K}_p$ ノ各要素ト $\mathcal{H}_p$ ノ各要素トハ交換可能デアアルコト = 注意スレバ $\mathcal{O}_f$ が Abelian 群デアアル時ト全ク同様ニシテ

$$\mathcal{O}_f = \bar{K}_p \times \mathcal{H}_p.$$

ナルコトガワカル。(N.T. Satz 3.2, Satz 3.3. 参照)。

サテ $a, b \in \mathcal{O}_f =$ 対シ $a = a' a'', b = b' b'', a', b' \in \bar{K}_p, a'', b'' \in \mathcal{H}_p$ トオケバ $a \geq b$ ナルケレバ必要且ツ十分ナル條件ハ $a' \geq b', a'' \geq b''$ ナルコトデアアル: 十分ナルコトハヨイカラ必要ヲ証明スル。

$$ab^{-1} \geq 1, ab^{-1} = (a' b'^{-1})(a'' b''^{-1})$$

ナル故 $a \geq 1$ ナラバ $a' \geq 1, a'' \geq 1$ ナラバヨイガ N.T.

Satz 3.8 = ヨリ $a' = \bigvee_n (|p|^n \wedge a)$ ナル故 $a \geq a' \geq 1$ ガデカラコレデアイ。ヨッテ末 $\mathcal{O}_f$ ハ又末 $\bar{K}_p$ ト末 $\mathcal{H}_p$ トノ直和トナル。 N.T. = ナラツテ $a'' = [p]^a$ トカクコトニスル。

定理1. 任意 $p \in \mathcal{O}_f$ に対し

$$\mathcal{O}_f = \mathcal{K}_p \times \mathcal{H}_p$$

且つ $\mathcal{O}_f$ の束 $\mathcal{K}_p$ と束 $\mathcal{H}_p$ と、直和 = + となる。ヨッテ $\mathcal{K}_p$, $\mathcal{H}_p$ は共に conditionally complete + 束群である。
 1) 定理ヲ少シク拡張シテオク。

定理2. $\mathcal{O}_f$ の任意部分集合トシ $\mathcal{M} =$ 含まレル

凡テノ要素 m と直交スル $\mathcal{O}_f$ の要素全体ヲ $\mathcal{K}_m$, $\mathcal{K}_m$ 凡テノ要素ト直交スル要素ノ全体ヲ $\mathcal{H}_m$ トスレバ群 $\mathcal{O}_f$ は部分群 $\mathcal{K}_m, \mathcal{H}_m$ ノ直積デ。

$$\mathcal{O}_f = \mathcal{K}_m \times \mathcal{H}_m$$

且つ束 $\mathcal{O}_f$ の束 $\mathcal{K}_m$ と束 $\mathcal{H}_m$ ノ直和、從ッテ $\mathcal{K}_m, \mathcal{H}_m$ は conditionally complete + 束群である。

証明: $x \geq 1$ + 要素が分解サレルコトヲ云ヘバ、 $\mathcal{O}_f$ トハ定理1ノ場合ト同様である。

$$\text{サテ } h = \bigvee_{m \in \mathcal{M}} ([m]x) \text{ トオク. } x \geq [m]x \text{ + 故 } \forall m \text{ ハ}$$

存在シテ $x \geq h$. $\mathcal{K}_m =$ 属スル任意ノ要素 k' ヲトレバ
 $|k'| \wedge |m| = 1$ + 故 $[m]x \wedge |k'| = 1$. ヨッテ Lemma 3
 ヲ用ヒテ $h \wedge |k'| = (\bigvee ([m]x)) \wedge |k'| = \bigvee ([m]x \wedge |k'|) = 1$
 故 = $h \in \mathcal{H}_m$. $x h^{-1} = k$ トオケバ $k \geq 1$.

$$\text{且ツ } |m| \wedge k = |m| \wedge x h^{-1} \leq |m| \wedge x ([m]x)^{-1} = 1.$$

$$\therefore |m| \wedge k = 1 \quad \therefore k \in \mathcal{K}_m.$$

所謂 "Projektor" $[p]$ = 閉シヲハ $\mathcal{O}_f$ が Abelian 群である
 場合 = 於ケル定理が大抵ソノマデ通用スル。例ヘバ

$$[p](ab) = [p]a \cdot [p]b, [p](a \times b) = [p]a \times [p]b$$

更一般 $= \forall a$ が存在スレバ $\forall [p]a$ 存在シテ

$$[p] \forall a = \forall [p]a$$

N. T. = 於ケル Satz 3.5, 3.6, 3.7, 3.7, 3.8, 3.14, 3.15, 3.16, 3.17, 3.18, 3.19, 3.20, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24, 3.25 等ハ皆成立スル。但シ証明ニ際シテハ多少注意ヲ要スル。例ヘバ $|p| \wedge |q| = 1$ + ラバ $[p]x$ ト $[q]y$ トハ交換可能デアアル。(Lemma 4 参照) ヲツテ $[p] \geq [q]$ + ラバ $[p]x, [q]x, ([p] - [q])x$ ハ交換可能デアアル等々。

2. 後ニ用ヒル Lemma ラコノデ証明シテオキマス。

Lemma 6. $1 \leq a$ トスルトキ $1 \leq x \leq a^n$ (n ハ自然数) + ル x ハ $1 \leq y \leq a$ + ル y ノイクツリノ積トシテカケル。

証明. n = 關スル Induction = ヨル. $1 \leq x \leq a^n$ トシ, $y = x(x \wedge a^{n-1})^{-1}$ トオケバ

$$y = x(x^{-1} \vee a^{-(n-1)}) = 1 \vee x a^{-(n-1)} \leq 1 \vee a^n \cdot a^{-(n-1)} = a.$$

$$\text{故} = 1 \leq y \leq a, \quad x = y(x \wedge a^{n-1})$$

テ假定ニヨリ $(x \wedge a^{n-1})$ ハ $1 \leq y' \leq a$ + ル y' ノ積トナルカラコレデヨイ。

Lemma 7. a ノ 1 以外ニ有限次數ヲ持ツ要素ヲ含マス。

証明. $a^m = 1$ トセヨ。先ヅ $b = (1 \wedge a)$ トオケバ $b^k = (1 \wedge a^2 \wedge \dots \wedge a^k)$ 。ヨツテ b ノ中ニハ相異ルモ

1 が有限個シカトイカラ b の次数は有限, $b^n = 1$, $b \neq 1$ デアルが, コレデ $b < 1$ トラバ $b^{n-1} < 1$, 一方 $b^{n-1} = b^{-1} > 1$ コレハ不合理. 故ニ $b = 1$, 同様ニ $1 \vee a = 1$. 故ニ $a = 1$.

Lemma 8. $\mathcal{O}_f$ ニツ1 要素 a , b ニ對シ $aba^{-1} = b^{-1}$ トラバ $b = 1$.

証明. $a(1 \vee b)a^{-1} = (1 \vee b^{-1}) = b_-$ 即 $ab_+a^{-1} = b_-$. $b_+ \wedge b_- = 1$ トラ故, 次1 Lemma 7 用ヒバ, コレカラ $b_+ = b_- = 1$, $b = 1$ 得ル.

Lemma 9. $\mathcal{O}_f$ ニ於テ $aba^{-1} \wedge b = 1$ トラバ $b = 1$

証明. $b \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ ハ $\mathcal{O}_f$ ノ normalteiler デアルカラ $aba^{-1} \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, 一方假定ニヨリ $aba^{-1} \in \mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$
 $\therefore aba^{-1} \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \wedge \mathfrak{k}_{\mathbb{R}} = 1$, $b = 1$.

Lemma 10. $\mathcal{O}_f$ ニ於テ $a^2 = b^2$ トラバ $a = b$

証明. $a^2 = b^2 = z$, $\{a, b\} = \mathcal{O}$, $\{a, b\}/\{z\} = \overline{\mathcal{O}}$ トスル. $\overline{\mathcal{O}}$ ニ於テ $\bar{a}^2 = \bar{b}^2 = 1$.

故ニ $b = ac$, $\bar{b} = \bar{a}\bar{c}$ トオケバ $\bar{a}\bar{c}\bar{a}^{-1} = \bar{c}^{-1}$

故ニ $aca^{-1} = c^{-1}z^\alpha$. $ac^2a^{-1} = c^{-2}z^{2\alpha}$

コレデ $c^2z^{-\alpha} = c'$ トオケバ $ac'a^{-1} = c'^{-1}$

故ニ Lemma 8 ニヨリ $c' = 1$, $c^2 = z^\alpha$. $\{c, z\}$ ハ

Abel 群デアルが Lemma 7 ニヨリコレハ有限次数ノ要素ヲ1以外ニハ含マスカラ $\{c, z\}$ 7 rank が1ナルコト

カラ, コレハ環状群デアル. $\{c, z\} = \{d\}$ トスレバ

$\mathcal{O} = \{a, d\}$, 且ツ $\{d\}$ ハ $\mathcal{O}$ ノ不変部分群ナル故

$ada^{-1} = d$ 又、 $ada^{-1} = d^{-1}$. 後者、場合、Lemma 8
 から $d = 1$, $\alpha = \{a\}$. $ada^{-1} = d$ ならば α は Abel
 群であるから $a^2 = b^2$ から同様に $a = b$ が得る.

Lemma 11. $\alpha \neq \emptyset$ ならば $a^2 b^2 = b^2 a^2$ ならば $ab = ba$

証明. $a' = b^2 a b^{-2}$ とおけば $a'^2 = b^2 a^2 b^{-2} = a^2$,

よって前 Lemma = より $a = a'$, $ab^2 a^{-1} = b^2$,

$b' = a b a^{-1}$ とおけば同様に $b' = b$.

3. $p \geq 1$ とするときは $e \wedge p e^{-1} = 1$ 即ち $e^2 \wedge p = e$
 となる e の部分 (Tail) と呼ぶ. (N. T. Definition
 5.1. 参照). $e \wedge p e^{-1} = 1$ から $e(p e^{-1}) = (p e^{-1})e$.
 即ち e と p とは交換可能である. e_1, e_2 が p の部分ならば
 $(e_1 \wedge e_2) \wedge p(e_1 \wedge e_2)^{-1} = (e_1 \wedge e_2) \wedge (p e_1^{-1} \vee p e_2^{-1})$
 $= (e_1 \wedge e_2 \wedge p e_1^{-1}) \vee (e_1 \wedge e_2 \wedge p e_2^{-1}) = 1$ から $(e_1 \wedge e_2)$
 も亦 p の部分. 同様に $e_1 \vee e_2 \in p$ の部分である. 明かに
 e が p の部分ならば $p e^{-1} \in p$ の部分である. 又 $e_1 \leq e_2$ と
 すれば $e_1 \wedge e_2 e_1^{-1} \leq e_1 \wedge p e_1^{-1} = 1$ から $e_1 \wedge e_2 e_1^{-1} = 1$
 故に $e_1 e_2 = e_2 e_1$.

又 $e_2 \vee p e_1^{-1} \geq e_2 \vee p e_2^{-1} = p$ から $e_2 \vee p e_1^{-1} = p$.

故に $e_2(p e_1^{-1}) = (e_2 \vee p e_1^{-1})(e_2 \wedge p e_1^{-1}) = p(e_2 \wedge p e_1^{-1})$

$\therefore e_2 e_1^{-1} = (e_2 \wedge p e_1^{-1})$

よって $e_2 e_1^{-1} \in$ 亦 p の部分である.

Lemma 12. e_1, e_2 が p の部分とすれば

$e_1 e_2 = e_2 e_1$

証明. $e_1 \leq e_2$ となるとき既に述べた.

一般 $e_1 \wedge e_2 = e_3$ とした $e_3 \in p$ 部分 p

$e_1 \geq e_3, e_2 \geq e_3$ なる故 $e_1 e_3 = e_3 e_1, e_2 e_3 = e_3 e_2,$
 $e_1 e_3^{-1} \wedge e_2 e_3^{-1} = 1$ なる故 Lemma 4 = より $e_1 e_3^{-1}$ と
 $e_2 e_3^{-1}$ とは交換可能. 故 $e_1 e_2 = e_2 e_1$.

次 $p \geq 1$ なる要素 p 対 $p \geq a \geq 1$ なる a 対 p
 1 部分 p と p と p 特異要素と呼ぶこととする. (例へば
 $p=1$. 又 $p > 1$ 対 $p > x > 1$ なる x が存在し x と p
 p 特異要素である) p 特異要素とし $p \geq p' \geq a' \geq 1$ と
 p 対 $a'^2 \wedge p = a'$ なる $a'^2 \wedge p' = a'^2 \wedge p \wedge p' = a' \wedge p'$
 $= a'$. 又 $p \geq p' \geq 1$ なる p' は p' 特異要素である
 Lemma 12 = より p と p' は交換可能である.

Lemma 13. p_1, p_2 特異要素とすれば $1 \leq x \leq p_1^n,$
 $1 \leq y \leq p_2^m$ (m, n 自然数) なる x と y とは交換可能
 である.

証明. Lemma 6 = より $1 \leq x \leq p_1$ なる x と $1 \leq y$
 p_2 なる y とは交換可能なることを云へばよいが, ソレハ
 Lemma 12 の証明と全く同じ様に出る.

さて $a \geq 1, b \geq 1$ とすれば $[p_1] a = \bigvee_n (p_1^n \wedge a),$
 $[p_2] b = \bigvee_m (p_2^m \wedge b)$ なる故 $[p_1] a$ と $[p_2] b$ とは交
 換可能. 故 h_{y_a} 各要素と h_{y_b} 各要素は交換可能で
 ある特異要素全体ノ集合ヲ $\mathcal{H}$ とスル. 然らば定理 2 =
 より

$$\mathcal{H} = h_{y_r} \times h_{r}$$

であるが h_{y_r} は $\bigvee_{p \in \mathcal{H}} [p]$ なる生成されるから既述ベキ

コトニヨリソレハ Abel 群デアル。コトニ $\bar{h}_n$ モ亦
conditionally complete + 束群デアルガ、ソレハ最
 早マ特異要素ヲ含マナイ。(1以外=ハ) 何トナレバ $p \neq$
 $\bar{h}_n$ / 特異要素トスレバ $1 \leq a \leq p$ ナル a ハ凡テ $\bar{h}_n =$
 含マレルカラ p ハ又 O_f / 特異要素、故ニ $p \in h_{\bar{h}_n}$ 。コレ
 カラ $p=1$ 。

4. 以上ノ所論カラ O_f ガ Abel 群デアルコトヲ云フニ
 ハ $\bar{h}_n$ ガ Abel 群デアルコトヲ云ヘバヨイ。即チ始メカ
 ラ $O_f = \bar{h}_n$ デ O_f ハ 1 以外 = 特異要素ヲ含マヌト假定セラ
 ヲイ。以下常ニコノ假定ノモトニ考ヘル。

Lemma 14. $a > 1$, $a \geq x^2$, $x \geq 1$ ナラバ $xc' > x$,
 $a \geq x'^2$ ナル x' ガ存在スル。

証明. 始メニ $a > 1$ ナラバ $a \geq x^2$, $x' > 1$ ナル x' ガ
 存在スルコトヲ云フ。 a ハ假定ニヨリ特異要素デナイカラ
 $a > a' > 1$ ナル a' デ $xc' = a' \wedge aa^{-1} \neq 1$ ナル a' ガ存
 在スル。 $xc'^2 \leq aa^{-1} \cdot a' = a$ ナル故コレデヨイ。次ニ
 $a > xc'^2$ トセヨ。 $xc'^2 a = a' > 1$ トオリ。今証明シタコト
 =ヨリ $a' \geq z^2$, $z > 1$ ナル z ガ存在スル。 $xzxc' \wedge z =$
 y トオケバ Lemma 9 =ヨリ $y > 1$ 。 $x' = xc'y$ トオケバ
 $x' > x$ デ $x'^2 = xycy = x^2 \cdot x^{-1}yz \cdot y \leq x^2$ 。 $z^2 \leq x^2 a'$
 $= a$ 。

Lemma 15. $a > 1$ 。トスレバ $a = x^2$ ナル x ガ存在
 スル。

証明. $x_1 = 1$ カラ始メテ $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ ナ次ノ

様ニツクツテ行ク。 $\eta < \xi$ ナルトキ x_η ガ既ニ定メラレタトセヨ。 $\xi = \xi_0 + 1$ トスルトキ $x_{\xi_0}^2 = a$ ナラバ $x_\xi = x_{\xi_0}$, $x_{\xi_0}^2 < a$ ナラバ Lemma 14 = ヨリ $x_\xi > x_{\xi_0}$, $a \geq x_\xi^2$ ナル x_ξ ヲトル。又 ξ ガ極限数ナラバ $x_\xi = \bigvee_{\eta < \xi} x_\eta$ トオク。

$$x_\xi > x_\eta. \quad \text{且ツ } x_\xi x_\eta = \bigvee_{\eta' < \xi} x_{\eta'} x_\eta = \bigvee_{\eta' \leq \eta' < \xi} (x_{\eta'} x_\eta)$$

$\leq \bigvee_{\eta' < \xi} x_{\eta'}^2 \leq a$. $x_\xi^2 = x_\xi \bigvee x_\eta = \bigvee x_\xi x_\eta \leq a$ コノ様ニシテ $x_\xi^2 = a$ トナラズ限り相異ナル要素ノ系列ガドコマデモ出来ル。ヨツテイツカハ $x_\xi^2 = a$ ナル x_ξ ガ存在スル。

一般ニ a ノ要素 a ヲトレバ $a = a_+(a_-)^+$ $a_+ \geq 1$, $a_- \geq 1$. ヨツテ $a_+ = x^2$, $a_- = y^2$ ナル x, y ガ存在スル。 a_+ ト a_- トハ交換可能ナル故 Lemma 11 = ヨリ x ト y トモ交換可能。ヨツテ $xy^+ = x$ トオケバ $a = x^2$ ナナル。 Lemma 10 = ヨレバコノ様ニ Σ ハシカモ唯一ツ定マレ。コレヲ $a^\lambda = a^{\frac{1}{2} \lambda}$ トカフコトニスル。 $a^{\frac{1}{4}} = (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{8}} = (a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}$, ト定義シ又, $a^{\frac{k}{2^n}} = (a^{\frac{1}{2^n}})^k$ トニスル。 (n ハ自然的, k ハ整数) 然ラバ $\lambda = \frac{k}{2^n}$ ナル形ノ凡テノ分数ニ対シ, a^λ ガ定義サレ、ソレヲハ互ニ交換可能ヲ普通ノ巾ノ法則ヲ満足スル。

$$a = 1, \quad a^\lambda a^{\lambda'} = a^{\lambda + \lambda'} \quad (a^\lambda)^{\lambda'} = a^{\lambda \lambda'} \text{ 等。}$$

又 a ト b トガ交換可能ナラバ Lemma 11 = ヨリ $a^{\frac{1}{2}}$ ト $b^{\frac{1}{2}}$ トハ交換可能。ヨツテ一般ニ a^λ ト $b^{\lambda'}$ トハ交換可能トナリ、特ニ

$$(ab)^\lambda = a^\lambda b^\lambda \quad (3)$$

—— 附註次頁 ——

Lemma 16. 任意 $p, a = \text{対シ}$

$$[p] a^\lambda = ([p] a)^\lambda$$

証明. $\lambda = \frac{1}{2}$ ノトキ証明スレバ十分デアルガ

$$([p] a^{\frac{1}{2}})^2 = [p] (a^{\frac{1}{2}})^2 = [p] a \text{ カラ 開平ノ一意性ニヨリ}$$

$$[p] a^{\frac{1}{2}} = ([p] a)^{\frac{1}{2}}$$

Lemma 17. $a \geq 1$ + ラバ $\lambda > \lambda'$ + レトキ $a^\lambda \geq a^{\lambda'}$

又コノトキ凡テ $\lambda > 0 = \text{対シ}$ $a^\lambda \leq b$ + ル b が存在スレバ
 $a = 1$.

証明. 始メノ方ハ $a \geq a^{\frac{1}{2}} \geq 1$ カラ明カ. 又 $a^\lambda \leq b$

トスレバ *conditionally complete* + ルコトカラ

$$\bigvee_\lambda a^\lambda = a_0 \text{ が存在スル. } a_0 a = \bigvee a^{\lambda+1} = \bigvee a^\lambda = a_0$$

$$\text{故} = a = 1.$$

コレダケ準備シテオイテ所謂 "*Spektraltheorie*"

ノ真似ヲスル. $p > 1$ トシ又 $a \in \text{by } p, a \geq 1$ トスル.

以下ノ考察ハ N.T. Satz 5.15 ノ証明ト全ク同様デアル

ガ念ノタメニコノニ繰返シテ見ル. $\lambda, \mu, \dots$ 等ハ凡テ

$\frac{k}{2^m}$ 型ノ分数トスル.

$$\lambda \geq 0 = \text{対シ} \quad e_\lambda = [(p^\lambda a^{-1})_+] p$$

トオケバ e_λ ハ p ノ部分デ $\lambda > \mu$ + ラバ $(p^\lambda a^{-1})_+ \geq (p^\mu a^{-1})_+$

カラ N.T. Satz 3.17 = ヨリ

$$e_\lambda \geq e_\mu$$

13) コレヲノロトカラ一般ニ任意ノ実数 $\lambda = \text{対シ}$ a^λ ノ定義ス

ルコトモ容易ヲセウガ差違リソノ必要ガアリマセンカラ止
メテオキマス.

N. T. Satz 3.18, 3.16 から $[p^\lambda] = [p]$, $(\lambda > 0)$,
 $p^\lambda \cong (p^\lambda a^{-1})_+ = \text{注意シテ}$

$$[e_\lambda] = [(p^\lambda a^{-1})_+] [p] = [(p^\lambda a^{-1})_+] [p^\lambda] = [(p^\lambda a^{-1})_+]$$

コノ結果ハ $\lambda = 0$ テモヨイ。

$$(p^\lambda a^{-1})_+ \cap (p^\lambda a^{-1}) = 1 \text{ カラ } [e_\lambda] (p^\lambda a^{-1}) = (p^\lambda a^{-1})_+ \\ \geq 1. \text{ ヨツテ}$$

$$(*) \quad [e_\lambda] a \leq [e_\lambda] p^\lambda = ([e_\lambda] p)^\lambda = e_\lambda^\lambda$$

$$\text{又 } [(p^\lambda a^{-1})_+] (p e_\lambda^{-1}) = [e_\lambda] (p e_\lambda^{-1}) = 1 \text{ 故 N. T.}$$

$$\text{Satz 3.6 カラ } p e_\lambda^{-1} \cap (p^\lambda a^{-1})_+ = 1$$

$$\text{ヨツテ } [p e_\lambda^{-1}] (p^\lambda a^{-1}) = ([p e_\lambda^{-1}] (p^\lambda a^{-1})_-)^{-1} \leq 1. \text{ 故} =$$

$$(**) \quad [p e_\lambda^{-1}] a \geq [p e_\lambda^{-1}] p^\lambda = ([p e_\lambda^{-1}] p)^\lambda = (p e_\lambda^{-1})^\lambda$$

(**) カラ

$$(p e_\lambda^{-1})^\lambda \leq [p e_\lambda^{-1}] a \leq a$$

$$\text{ヨツテ } \bigwedge_{\lambda > 0} (p e_\lambda^{-1}) = a_0 \text{ ト } \lambda \text{ 大 } \because a_0^\lambda \leq a^{(\lambda)} \text{ Lemma 17}$$

$$= \exists 1) \quad a_0 = 1. \text{ 即チ}$$

$$\bigwedge_{\lambda > 0} p e_\lambda^{-1} = p \left(\bigvee_{\lambda > 0} e_\lambda \right)^{-1} = 1, \quad \bigvee_{\lambda > 0} e_\lambda = p$$

$$\lambda > \mu \text{ ト } \lambda \text{ 大 } \because e_\lambda \geq e_\mu \text{ 故 } e_\lambda e_\mu^{-1} \in \text{ 中心 } p, \text{ 部分テ}$$

(*) カラ

$$[e_\lambda e_\mu^{-1}] a = [e_\lambda e_\mu^{-1}] [e_\lambda] a \leq [e_\lambda e_\mu^{-1}] e_\lambda^\lambda \\ = ([e_\lambda e_\mu^{-1}] e_\lambda)^\lambda = (e_\lambda e_\mu^{-1})^\lambda$$

$$(4) \quad a_0 \wedge p e_\lambda^{-1} \text{ ト 交換可能ナル故 } a_0 a' = p e_\lambda^{-1}, \quad a' \geq 1 \text{ ト } \lambda \text{ 大 } \because$$

$$a_0^\lambda a'^\lambda = (a_0 a')^\lambda = (p e_\lambda^{-1})^\lambda, \quad \therefore a_0^\lambda \leq (p e_\lambda^{-1})^\lambda.$$

又 (***) カラ

$$\begin{aligned} [e_\lambda e_\mu^{-1}]a &= [e_\lambda e_\mu^{-1}][pe_\mu^{-1}]a \geq [e_\lambda e_\mu^{-1}](pe_\mu^{-1})^\mu \\ &= ([e_\lambda e_\mu^{-1}](pe_\mu^{-1}))^\mu = (e_\lambda e_\mu^{-1})^\mu \end{aligned}$$

ヨ ッテ $\lambda > \mu = \text{對} \vee$

$$\begin{aligned} (***) \quad (e_\lambda e_\mu^{-1})^\mu &\leq [e_\lambda e_\mu^{-1}]a = [e_\lambda]a ([e_\mu]a)^{-1} \quad (5) \\ &\leq (e_\lambda e_\mu^{-1})^\lambda \end{aligned}$$

コトデ e_λ, e_μ 等ハ Lemma 12 = ヨリ 互ニ 交換可能ナル

コトニ注意. サテ m, n ヲ 任意ノ 自然數トシ 區間 $[0, m]$

ヲ $\frac{1}{2^n}$ ナル 巾デ 等分セテ コレヲ

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_\kappa = m \quad \kappa = 2^n \cdot m$$

トスル. 上ノ (***) カラ

$$\begin{aligned} \delta_{m,n} &= \prod_{\nu=1}^{\kappa} (e_{\lambda_\nu} e_{\lambda_{\nu-1}}^{-1})^{\lambda_{\nu-1}} \leq [e_m]a ([e_0]a)^{-1} \\ &= [e_m]a \leq \prod_{\nu=1}^{\kappa} (e_{\lambda_\nu} e_{\lambda_{\nu-1}}^{-1})^{\lambda_\nu} = \delta'_{m,n} \end{aligned}$$

故ニ

$$\begin{aligned} 1 &\leq \delta_{m,n}^{-1} \cdot [e_m]a \leq \delta_{m,n}^{-1} \delta'_{m,n} = \prod_{\nu=1}^{\kappa} (e_{\lambda_\nu} e_{\lambda_{\nu-1}}^{-1})^{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}} \\ &= e_m^{\frac{1}{2^n}} \end{aligned}$$

$$\text{ヨ ッテ } 1 \leq \bigwedge_n \delta_{m,n}^{-1} [e_m]a \leq \bigwedge_n e_m^{\frac{1}{2^n}} = 1 \text{ カラ}$$

(5) $e_\lambda e_\mu^{-1} \wedge e_\mu = 1$ ナル 故ニ $[e_\lambda e_\mu^{-1}]a$ ト $[e_\mu]a$ トハ 交換可能ナル
且ツ $[e_\lambda e_\mu^{-1}]a \cdot [e_\mu]a = [e_\lambda]a$.

$$\bigvee_n \delta_{m,n} = [e_m] a$$

又 $\bigvee_m e_m = p$ カラ N. T. Sat 3.23 ヲ用ヒレバ

$$\bigvee_m [e_m] a = [p] a = a$$

即チ $a = \bigvee_{m,n} \delta_{m,n}$

又 $b = \sum_{m,n} \delta_{m,n} \in h_{y_p}, b \geq 1$ ヲトレバ矢

張り

$$b = \bigvee_{m,n} \bar{\delta}_{m,n}$$

トカケル。コゝ $\delta_{m,n} = \bar{\delta}_{m,n}$ ハイヅレモ p 部分ノ
中ノイクツカノ積デアアルカラ Lemma 12 及ビ巾ニ興スル
性質カラ互ニ交換可能。ヨツテ a ト b トモ交換可能トナル。
一般ニ $a = a_+ (a_-)^+$ ナ $a \in h_{y_p}$ トラバ $a_+, a_- \in h_{y_p}$,
 $a_+, a_- \geq 1$ デアルカラ、コレカラ h_{y_p} ハ Abelian 群デア
ルコトガワカル。

サテ p が $p > 1$ ナル G ノ元テノ要素ヲ動クトキ $\bar{h}_p$ 共
通部分群ヲ $\mathcal{O}$ トセヨ。 $\mathcal{O}$ = 含マレル任意ノ要素ヲエト
スル。 $x \in \bar{h}_p$ ナル故 $|x| \in \bar{h}_p$, ヨツテ $|x| \in \mathcal{O}$ 。今
 $|x| > 1$ ト假定スレバ $|x| \in h_{y_{|x|}}$ カラ $|x| \notin \bar{h}_{|x|}$ 。コレハ
不合理。ヨツテ $|x| = 1$ 。即チ $\mathcal{O} = 1$ 。 G ノ交換子群
ヲ G' トセヨ。 $G/\bar{h}_p \cong h_{y_p}$ ハ Abelian 群デアアルカラ
 $G' \subseteq \bar{h}_p$ 。故ニ $G' \subseteq \mathcal{O} = 1$ 。 $G' = 1$ 。即チ G ハ
Abelian 群デアアル。

カクシテ次ノ定理ガ証明サレタ。

定理3. Conditionally complete + 束群ハ
Abel 群デアール。

サテ $\mathcal{O}_f$ が Abel 群デアールコトガワカッタ上デ再ビ始
トニ戻リ分解

$$\mathcal{O}_f = h_{\gamma} \times h_{\gamma}$$

ヲ考ヘテ見マス。但シ γ ハ $\mathcal{O}_f$ ノ特異要素ノ集合、コノテ
 h_{γ} が (conditionally) complete vector lattice
トナルコトハ上ノ所論カラ明カデアリマス。(h_{γ} が Abel
群デアールコトガワカッテキレノデスカラ心配ナク Q^{λ} , (λ :
環) がウクレマス)

ヨッテ h_{γ} ヲ考ヘテ見マス。 γ ハ $\mathcal{O}_f$ ノ特異要素ノ全体
デアリマシタガ、ソレハ又 h_{γ} ノ特異要素ノ全体デアールコト
ハ明カデス。サテ Clifford - Lorenzen = ヨリ Abel
束群 h_{γ} ヲ linear + 束群 L_c / 直積 / 内 = lattice
isomorphic = embed シタト考ヘマス。 $a \in h_{\gamma} =$
對シ

$$a \longleftrightarrow (\dots, a_c, \dots) \quad a_c \in L_c^{(b)}$$

γ ヲ S ナルルテ / $S =$ 對シ $S_c = I$ トナル如キ "座標" τ /
集合ヲ J_2 , 残りノ座標ノ全体ヲ J_1 , 又 $L_c (\tau \in J_i)$ /
直積ヲ $\mathcal{L}_i$. $i=1, 2$ トシマス。

即チ h_{γ} ハ $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$ / 内 = embed ナレテキレ
ワケデ

$$a \longleftrightarrow (n_1, n_2) \quad n_1 \in \mathcal{L}_1, n_2 \in \mathcal{L}_2$$

(b) L_c ハ a_c / 全体カラ出キテトシヲヨイ。

コゝデ $a \rightarrow n_1$ ナル對應ヲ考ヘレバ, コレハ素群トシテノ
homomorphic ナ寫像ヲ與ヘルコトハ明カナスガ實ハ
isomorphic ニナリマス。何故ナラバ今アル $a_0 =$ 對シ

$$a_0 \longleftrightarrow (1, n_2^*)$$

トスレバ

$$|a_0| \longleftrightarrow (1, |n_0^*|)$$

任意ノ $s \in \gamma$ ハ

$$s \longleftrightarrow (s_1, 1)$$

ナル故 $|a_0| \wedge s = 1$

故ニ $[s]|a_0| = 1$ デ又 $|a_0| = \bigvee_{s \in \gamma} [s]|a_0| = 1$ 。

$$\therefore a_0 = 1$$

ヨツテ始メカラ $\mathcal{U}_2 = 0$ ト假定シテ差支ヘアリマセン。然

ラバ $\mathcal{U}$ ヲ任意ノ座標トスルトキ適當ニ $s \in \gamma$ ヲトレバ

$s_c > 1$ トスルコトが出来マスガ、コゝデ s_c ハ $\mathcal{L}_c$ ニ於テ

$\alpha > 1$ ナル α ノうち最小ナルモノデアルコトがワカリマス。

ソレハ

$$s_c > a_c > 1$$

ナル a_c が存在シタトスレバ $a' = (a \vee 1) \wedge s$ トオケバ

$$1 \leq a' \leq s$$

$$a'_c = a_c$$

s ハ特殊要素ナル故 $a' \wedge sa'^{-1} = 1$ 。ヨツテ $a_c \wedge s_c a_c^{-1}$

$= 1$ デオケレバナラヌガ $\mathcal{L}_c$ ハ *linear* デアルカラコ

レハ不合理。

従ツテ $\mathcal{L}_c$ ハ *linear* デ且ツ $1 < \alpha$ ナル α ノうち

最小+ルモノが存在スルノデスカラ, ソレハ有理整数ノ加法群ト束群トシテ *isomorphic* デアリマス. 即チ ly_r ハ有理整数ノ加法群ノ直積(直和)ノ内 = *isomorphic* = *embed* サレルヲケデス.

次ニ上ノ如キ分解ハ一意的デアルコトヲ証明シマス.

$$O_f = O_1 \times O_2$$

トシ, O_1 ハ有理整数ノ加法群ノ直積ノアル部分群, 又 O_2 ハ *vector lattice* トスル. S ヲ O_f ノ任意ノ特異要素トスレバ先ニ述ベタト同様ニシテ $S \in O_1$ ナルコトガワカリマス.

$$a_2 \in O_2 \text{ヲ任意ニトレバ } \exists n |a_2| = 1$$

$$\text{故ニ } \tilde{R}_r \supseteq O_2, \quad ly_r \subseteq O_1^{(1)}$$

サテ O_1 = 属スル要素ヲ $a_1 = k_t$, $k \in ly_r$, $t \in \tilde{R}_r$ トスレバ $k \in O_1$ ナル故 $t \in O_1$. O_1 ヲ各座標ニ分ケテ

$$k \leftrightarrow (\dots, k_\tau, \dots), \quad k_\tau \in \mathcal{L}_\tau$$

トスル. $k \in \tilde{R}_r$ ナル故任意ノ整数 m = 對シ $k^{\frac{1}{m}}$ が存在スル. ヨツテ又 $k_\tau^{\frac{1}{m}}$ が存在スルガ $\mathcal{L}_\tau$ ハ有理整数ノ加法群デアルカラ, コノコトカラ $k_\tau = 1$. $\therefore k = 1$.

$$\text{即チ } ly_r = O_1, \quad \text{ヨツテ又 } \tilde{R}_r = O_2^{(1)}$$

(1) 一般ニ束群 O_f ガ O_1, O_2 ノ束群ノ意味デノ直積(直和)ナラバ O_1 ト直交スル要素ノ全体ガ O_2 , O_2 ト直交スル要素ノ全体ガ O_1 トナル.

定理 4. Conditionally complete $\ast$ -群 G
 は (conditionally) complete vector lattice
 有理整数加法群 $\mathbb{Z}$ の直和 $\mathbb{Z} \times G$ は conditionally complete
 $\ast$ -部分群 $\mathbb{Z} \times G$ の直和となる。且つこの様な分解は一意的である。