



Title	p-進体ニ関スルーニノ注意
Author(s)	淡中, 忠郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 236, p. 1050-1056
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74978
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1046. p -進体 = 関スルーニノ注意

淡中 忠郎 (東北帝大)

類体論 / Hauptidealsatz と Hauptgeschlechts-
satz / 問 = アル種 / Dualität カアル / ハ注目スベキ
コト / 様 = 思ハレル / ア先ダ p -進体 カラ始メテ 何等カノ ヒ
ント ア得マシトシテ キル内ニ 氣付イタ 定理ヲ ニツ許リ 御紹介
シマス。

問題ハ " p -進体デ Abel + 下体ヲ 特徴ヅケルコト"
ア 類体論ト dual + 性質カドノ 程度保存サレルカ? =
果実ガアルワケデスガ 目下 Isomorphiesatz アタリデ
停頓中デス。以下体ハ p -進体, $G(k/K)$ ($K \supset k$) ハ
 $N_{K/k}(A) = 1 + \text{ル } A / \text{ 群トスル。}$

(順序定理) $K/k, K/k'$ abelsch, 特 $k' \subset k$
ナル 必要且 充分ノ 条件ハ $G(k/K) \subset G(k'/K)$

$$N_{k/k'}(\alpha^{n'}/\alpha') = \alpha'^{n'}/\alpha'^{n'} = 1$$

従って Verschiebungssatz から

$$\alpha^{n'}/\alpha' \in N(K^*)$$

$$\alpha' \in N(K^*)$$

$$\alpha' = N(B) \text{ と } N'(A^{n'}/B) = N_{k/k'}(\alpha^{n'}/\alpha') = 1$$

$$\text{假定 } G(k/K) = G(k'/K) \text{ から } N(A^{n'}/B) = 1$$

$$\text{即ち } \alpha^{n'} = \alpha' \in k'$$

$$N(K^*)^{n'} \subset k'$$

$$k^{*nn'} \subset N(K^*)^{n'} \subset k'^* \subset k^*$$

$$[k^*: k^{*nn'}] < \infty \text{ だから } [k^*: k'^*] < \infty$$

従って 第一段から $k = k'$ とおいて 証明終了。

第三段 $K = k k'$, K/k , K/k' , $A \text{ は } k \text{ 上}$ の時
 $G(k/K) \subset G(k'/K)$ ならば $k' \subset k$ (従って $k = K$)

証明. $k' \not\subset k$ とす. $k'' = k \cap k'$, $[K:k] = n$.

$$[K:k'] = n', \quad K = k''(x),$$

①, 満足する k'' 上の既約方程式

$$f(H) = H^n + a_1 H^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

とし, $H = H - \alpha$, $\alpha \in k''$ と置けば

$$\begin{aligned} 0 = f(H) &= f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!} H + \frac{f''(\alpha)}{2!} H^2 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} H^n \end{aligned}$$

が H は k'' 上で満足する方程式である. $\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = 1$ だから

$$\text{よって } N_{K/k} H = (-1)^n f(\alpha)$$

$$H_{K/k} \{ H^n / (-1)^n f(x) \} = 1$$

故 = 假定カラ $N_{K/k'} \{ H^n / (-1)^n f(x) \} = 1$

$$(-1)^{nn'} N_{K/k'} \{ f(x) \} = N_{K/k'} (H^n)$$

$$\therefore (-1)^{nn'} f_1(x) f_2(x) \cdots f_{n'}(x)$$

$$= (\theta_1 - \alpha)^n (\theta_2 - \alpha)^n \cdots (\theta_{n'} - \alpha)^n$$

但シ $f_i(x)$ ハ $f(x)$ デ K/k' = 於ケル共軛 + 係數ヲ置キ換ヘタモノ, θ_i ハ $\theta \in K/k' =$ 關スル共軛數デアール。

上ノ式ハ $\alpha \in k \cap k' =$ 關スル恒等式デアールカラ α ノアリ = 変數 x トシテモ成立スル。

$$f_1(x) f_2(x) \cdots f_{n'}(x) = (x - \theta_1)^n (x - \theta_2)^n \cdots (x - \theta_{n'})^n$$

従ツテ $f_i(x)$ / 根ハ $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n'}$ / 中ノ何レカデアール。

モシ $k \neq K, k' \neq K$ トラ之レガ矛盾デアールコトハ K/k'' ガ Galaisch デアールコトカラ ガロア置換ヲ施シテ見レバ容易ニ看ラレル。

(Hauptgeschlechtssatz in minimalen)

K/k Abelsch デ n 次, Faktorensystem $a_{\sigma, \tau}$ / Exponent ガ n トラバ $G(k/N) \triangleq \frac{a_{\sigma, \tau}}{a_{\tau, \sigma}}$ ト $A^{1-\sigma}$ / 形ノ數カラ生成サレル。

$$G(k/K) = \left\{ \frac{a_{\sigma, \tau}}{a_{\tau, \sigma}}, K^{1-\sigma} \right\}$$

(註) 勿論 Hilbert / 定理 / 拡張デ Abelsch デ + 1 場合更ニ Galois デ + 1 場合ニモ少シ必要 + 1 デ考ヘテ見レ積リテ居リマス。

証明. K/k 素数次, 時ハ明カデアルカラ帰納法ヲ用
 $k \subset k_1 \subset K$, K/k_1 zyklisch トシ $k_1/k = \mathbb{Z}$
 イラハ証明出来タモノトスル. 但シ $K = k_1 k_2$ (直積),
 K/k_1 及ビ K/k_2 / 層スル部分群ヲ夫々 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$
 $[K:k_2] = n_2$ トスル.

今 $N_{K/k_1}(a_{\sigma_2, \tau_2}) = a'_{\sigma_2, \tau_2}$ ($\sigma_2, \tau_2 \in \mathcal{O}_2$) 置ケ, 必
 Chevalley = 依リ

$$(a_{\sigma, \tau}, K/k)^{n_1} \sim (a'_{\sigma_2, \tau_2}, k_1/k)$$

(a') / Exponent ハ n_2 トナル. 故ニ

$$G(k/k_1) = \left\{ \frac{a'_{\sigma_2, \tau_2}}{a'_{\tau_2, \sigma_2}}, k_1'^{1-\sigma_2} \right\}$$

$$A \in \left\{ \frac{a_{\sigma, \tau}}{a_{\tau, \sigma}}, K'^{1-\sigma} \right\} \longleftrightarrow N_{K/k_1}(A) \in G(k/k_1) \text{ヲ証明}$$

スルベヨイノデアルカ $\rightarrow$ ハ明白デアル.

$$N_{K/k_1}(A) \in G(k/k_1) \rightarrow N_{K/k_1}(A) = \prod \frac{a'_{\sigma_2, \tau_2}}{a'_{\tau_2, \sigma_2}} \prod k_1'^{1-\lambda_2}$$

$$(k_1 \in k_1) \rightarrow N_{K/k_1}(A) = \prod N_{K/k_1} \left(\frac{a_{\sigma_2, \tau_2}}{a_{\tau_2, \sigma_2}} \right) \prod k_1'^{1-\lambda_2}$$

$$\rightarrow N_{K/k_1} \left(A \div \prod \frac{a_{\sigma_2, \tau_2}}{a_{\tau_2, \sigma_2}} \right) = \prod k_1'^{1-\lambda_2}$$

$$\text{故ニ } N_{K/k_1}(B) = \prod k_1'^{1-\lambda_2}, \text{ 時 } B \in \left\{ \frac{a_{\sigma, \tau}}{a_{\tau, \sigma}}, K'^{1-\sigma} \right\} \text{ヲ云}$$

ヘベヨイ.

$(a, K)_{k_1}$ ハ k_1 上 Zentrum = 持チ Exponent n_1

デアル。

$$(a, K)_{k_1} \sim (a_{\sigma_1, \tau_1}, K/k_1) \text{ デアルカラ}$$

$$b_1 = a_{\sigma_1, \tau_1} N_{K/k_1}(\mathbb{H}_1) \left(a_{\sigma_1, \tau_1} = \prod_{\tau_1} a_{\tau_1, \sigma_1} \right)$$

1 形 = 書き下。之ハ $k_1^*/N_{K/k_1}(K^*)$ が n_1 次ナルコトカラ
 簡単 = 分ル。 (K/k_1 一般 / Abelsch / 特ハ中山秋月ノ
 定理デアル)

$$\prod b_1^{1-\lambda_2} = \prod a_{\sigma_1, \tau_1}^{1-\lambda_2} N_{K/k_1}(\mathbb{H}_1^{1-\lambda_2})$$

$$\begin{aligned} a_{\sigma_1, \tau_1}^{1-\lambda_2} &= \frac{a_{\sigma_1, \tau_1}}{a_{\sigma_1, \tau_1}^{\lambda_2}} = \prod_{\tau_1 \in \mathcal{G}_1} \frac{a_{\tau_1, \sigma_1}}{a_{\tau_1, \sigma_1}^{\lambda_2}} = \prod_{\tau_1 \in \mathcal{G}_1} \frac{a_{\tau_1, \sigma_1} a_{\tau_1-2, \tau_1, \sigma_1}}{a_{\lambda_2, \tau_1} a_{\lambda_2 \tau_1, \sigma_1}} \\ &= \frac{a_{\sigma_1, \tau_1}}{a_{\lambda_2 \sigma_1, \tau_1}} = N_{K/k_1} \left(\frac{a_{\sigma_1, \lambda_2}}{a_{\lambda_2, \sigma_1}} \right) \end{aligned}$$

之ハ右辺ノ値ヲ求メテ見レバ容易 = 分ル。

故ニ

$$N_{K/k_1}(B) = \prod b_1^{1-\lambda_2} = \prod N_{K/k_1} \left(\frac{a_{\sigma_1, \lambda_2}}{a_{\lambda_2, \sigma_1}} \mathbb{H}_1^{1-\lambda_2} \right)$$

$$\text{然ツテ } B = \left(\prod \frac{a_{\sigma_1, \lambda_2}}{a_{\lambda_2, \sigma_1}} \mathbb{H}_1^{1-\lambda_2} \right) C^{1-\lambda_1} \quad 1 \text{ 形ト + ッテス}$$

ベテガ証明サレタ。

上ノ定理ハ *verschränktes Produkt* / *Basis*

用ヒルト意味が更ニ透明 = ナル。即チ

$$u_\sigma u_\tau u_\sigma^{-1} u_\tau^{-1} = \frac{a_{\sigma, \tau}}{a_{\tau, \sigma}}$$

$$A^{1-\sigma} = A u_{\sigma} A^{-1} u_{\sigma}^{-1}$$

デマルカラ

(定理) Abel 体 K を最大可換体とし、 σ を含む Schiefkörper S が A を K の reduzierte Norm が 1 となる元素、 S^* の交換子群に属する。