OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	p一進体ニ関スルーニノ注意
Author(s)	淡中, 忠郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 236, p. 1050-1056
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74978
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1046. p-進体ニ関スルーニノ注意

淡中　忠郎（東北帝大）

類体論ノ Hauptidealsatz ト Hauptgeschlechtssatz ノ間ニアル種ノ Dualität カアルノハ注目スベキコトノ様ニ思ハレルノデ先ヅ p-進体カラ始メテ何等カノヒントヲ得マウトシテオル内ニ気付イタ定理ヲニツ許リ御紹介シマス。

問題ハ p-進体デ Abel 十下体ヲ特徴ヅケルコト"デ類体論ト dual ナ性質ガドノ程度保存サレルカ？ニ興味ガアルワケデスガ目下 Isomorphiesatz ヲタリデ待機中デス。以下体ハ p-進体，$G(k/K)$（$K\subset k$）ハ $N_{K/k}(A)=1$ ナル A ノ群トスル。

（順序定理）　K/k，K/k' abelsch，特ニ $k'\subset k$ ナル必要且ツ充分十条件ハ $G(k/K)\subset G(k'/K)$

$$N_{k/k'}(\alpha^{n'}/\alpha') = \alpha'^{n'}/\alpha'^{n'} = 1$$

従ッテ Verschiebungssatz カラ

$$\alpha^{n'}/\alpha' \in N(K^*)$$

$$\alpha' \in N(K^*)$$

$\alpha' = N(B)$ トスルト $N'(A^{n'}/B) = N_{k/k'}(\alpha^{n'}/\alpha') = 1$

仮定 $G(k/K) = G(k'/K)$ カラ $N(A^{n'}/B) = 1$

即チ $\alpha^{n'} = \alpha' \in k'$

$$N(K^*)^{n'} \subset k'$$

$$k^{*nn'} \subset N(K^*)^{n'} \subset k'^* \subset k^*$$

$[k^* : k^{*nn'}] < \infty$ ダカラ $[k^* : k'^*] < \infty$

従ッテ第一段カラ $k = k'$ トナッテ証明終ル。

第三段 $K = kk'$, K/k, K/k', Abelsch ノ時 $G(k/K) \subset G(k'/K)$ ナラバ $k' \subset k$ (従ッテ $k = K$)

証明. $k' \nsubseteq k$ トス。 $k'' = k \cap k'$, $[K : k] = n$, $[K : k'] = n'$, $K = k(\omega)$.

Ⓗ ノ満足スル k ニ於ケル既約方程式ヲ

$$f(Ⓗ) = Ⓗ^n + a_1 Ⓗ^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

トシ, $H = Ⓗ - \alpha$, $\alpha \in k''$ ト置ケバ

$$0 = f(Ⓗ) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}H + \frac{f''(\alpha)}{2!}H^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}H^n$$

ガ H ノ k ニ於テ満足スル方程式デアル. $\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = 1$ ダカラ

$$N_{K/k}H = (-1)^n f(\alpha)$$

$$H_{K/k}\{H^n/(-1)^n f(\alpha)\}=1$$

故ニ假定カラ $N_{K/k'}\{H^n/(-1)^n f(\alpha)\}=1$

$$(-1)^{nn'}N_{K/k'}\{f(\alpha)\}=N_{K/k'}(H^n)$$

$$\therefore\ (-1)^{nn'}f_1(\alpha)f_2(\alpha)\cdots\cdots f_{n'}(\alpha)$$
$$=(\textcircled{H}_1-\alpha)^n(\textcircled{H}_2-\alpha)^n\cdots\cdots(\textcircled{H}_{n'}-\alpha)^n$$

但シ $f_i(\alpha)$ ハ $f(\alpha)$ デ K/k' ニ於ケル共軛ト係數ヲ置キ換ヘタモノ，$\textcircled{H}_i$ ハ $\textcircled{H}$ ノ K/k' ニ関スル共軛數デアル．

上ノ式ハ $\alpha\in k$ ヘ k' ニ関スル恒等式デアルカラ α ノ代リニ変数 x トシテモ成立スル．

$$f_1(x)f_2(x)\cdots\cdots f_{n'}(x)=(x-\textcircled{H}_1)^n(x-\textcircled{H}_2)^n\cdots\cdots(x-\textcircled{H}_{n'})^n$$

従ッテ $f_1(x)$ ノ根ハ $\textcircled{H}_1$, $\textcircled{H}_2$, ……, $\textcircled{H}_{n'}$ ノ中ノ何レカデアル．モシ $k\neq K$, $k'\neq K$ ナラバ何レガ勿論デアルコトハ K/k'' ガ Galaissch デアルコトカラ ガロア置換ヲ施シテ見レバ容易ニ看ラレル．

(Hauptgeschlechtssatz im Minimalen)

K/k Abelsch デル次，Faktorensystem $a_{\sigma,\tau}$ ノ Exponent ガ n ナラバ $G(k/N)$ ハ $\dfrac{a_{\sigma,\tau}}{a_{\tau,\sigma}}$ ト $A^{1-\sigma}$ ノ形ノ數カラ生成サレル．

$$G(k/K)=\left\{\frac{a_{\sigma,\tau}}{a_{\tau,\sigma}},\ K^{1-\sigma}\right\}$$

(註) 勿論 Hilbert ノ定理ノ拡張デ Abelsch デナイ場合更ニ Galais デナイ場合ニモ少シ必要ナノデ考ヘテ見ル積リデ居リマス．

証明. K/k 素数次ノ時ハ明カデアルカラ帰納法ヲ用ヒ $k \subset k_1 \subset K$, K/k_1 zyklisch トシ k_1/k = ツイテハ証明出来タモノトスル. 但シ $K = k_1 k_2$ (直積), K/k_1 及ビ K/k_2 ノ層トル部分群ヲ夫々 $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o}_2$ $[K : k_i] = n_i$ トスル.

今 $N_{K/k_1}(a_{\sigma_2,\tau_2}) = a'_{\sigma_2,\tau_2}$ ($\sigma_2, \tau_2 \in \mathfrak{o}_2$) 置ケバ Chevalley ニ依リ

$$(a_{\sigma,\tau}, K/k)^{n_1} \sim (a'_{\sigma_2,\tau_2}, k_1/k)$$

(a') ノ Exponent ハ n_2 トナル. 故ニ

$$G(k/k_1) = \left\{ \frac{a'_{\sigma_2,\tau_2}}{a'_{\tau_2,\sigma_2}},\ k_1^{1-\sigma_2} \right\}$$

$$A \in \left\{ \frac{a_{\sigma,\tau}}{a_{\tau,\sigma}},\ K^{1-\sigma} \right\} \longleftrightarrow N_{K/k_1}(A) \in G(k/k_1)$$ ヲ証明スレバヨイノデアルガ → ハ明白デアル.

$$N_{K/k_1}(A) \in G(k/k_1) \to N_{K/K_1}(A) = \prod \frac{a'_{\sigma_2,\tau_2}}{a'_{\tau_2,\sigma_2}} \prod b_1^{1-\lambda_2}$$

$$(b_1 \in k_1) \longrightarrow N_{K/K_1}(A) = \prod N_{K/k_1}\left(\frac{a_{\sigma_2,\tau_2}}{a_{\tau_2,\sigma_2}}\right) \prod b_1^{1-\lambda_2}$$

$$\longrightarrow N_{K/k_1}\left(A \div \prod \frac{a_{\sigma_2,\tau_2}}{a_{\tau_2,\sigma_2}}\right) = \prod b_1^{1-\lambda_2}$$

故ニ $N_{K/k_1}(B) = \prod b_1^{1-\lambda_2}$ ノ時 $B \in \left\{ \frac{a_{\sigma,\tau}}{a_{\tau,\sigma}},\ K^{1-\sigma} \right\}$ ヲ云ヘバヨイ.

$(a, K)_{k_1}$ ハ k_1 ヲ Zentrum ニ持チ Exponent n_1

デアル。

$(a, K)_{\mathfrak{k}_1} \sim (a_{\sigma_1,\tau_1}, K/\mathfrak{k}_1)$ デアルカラ

$$\mathfrak{b}_1 = a_{\mathfrak{g}_1,\sigma_1} N_{K/\mathfrak{k}_1}(\mathfrak{H}_1) \quad \left(a_{\mathfrak{g}_1,\sigma_1} = \prod_{\tau_1} a_{\tau_1,\sigma_1}\right)$$

ノ形ニ書ケル。之ハ $\mathfrak{k}_1^*/N_{K/\mathfrak{k}_1}(K^*)$ ガ n_1 次ナルコトカラ簡単ニ分ル。（$K/\mathfrak{k}_1$ ガ一般ノ Abelsch ノ時ハ中山秋月ノ定理デアル）

$$\prod \mathfrak{b}_1^{1-\lambda_2} = \prod a_{\mathfrak{g}_1,\sigma_1}^{1-\lambda_2} N_{K/\mathfrak{k}_1}(\mathfrak{H}_1^{1-\lambda_2})$$

$$a_{\mathfrak{g}_1,\sigma_1}^{1-\lambda_2} = \frac{a_{\mathfrak{g}_1,\sigma_1}}{a_{\mathfrak{g}_1,\sigma_1}^{\lambda_2}} = \prod_{\tau_1 \in \mathfrak{g}_1} \frac{a_{\tau_1,\sigma_1}}{a_{\tau_1,\sigma_1}^{\lambda_2}} = \prod_{\tau_1 \in \mathfrak{g}_1} \frac{a_{\tau_1,\sigma_1} a_{\lambda_2-2,\tau_1\sigma_1}}{a_{\lambda_2,\tau_1} a_{\lambda_2\tau_1,\sigma_1}}$$

$$= \frac{a_{\mathfrak{g}_1,\sigma_1}}{a_{\lambda_2\mathfrak{g}_1,\sigma_1}} = N_{K/\mathfrak{k}_1}\left(\frac{a_{\sigma_1,\lambda_2}}{a_{\lambda_2,\sigma_1}}\right)$$

之ハ右辺ノ値ヲ求メテ見レバ容易ニ分ル。

故ニ

$$N_{K/\mathfrak{k}_1}(B) = \prod \mathfrak{b}_1^{1-\lambda_2} = \prod N_{K/\mathfrak{k}_1}\left(\frac{a_{\sigma_1,\lambda_2}}{a_{\lambda_2,\sigma_1}} \mathfrak{H}_1^{1-\lambda_2}\right)$$

従ッテ $B = \left(\prod \frac{a_{\sigma_1,\lambda_2}}{a_{\lambda_2,\sigma_1}} \mathfrak{H}_1^{1-\lambda_2}\right) C^{1-\lambda_1}$ ノ形トナッテ又ベテガ証明サレタ。

上ノ定理ハ verschränktes Produkt ノ Basis u_σ ヲ用ヒルト意味ガ更ニ透明ニナル。即チ

$$u_\sigma u_\tau u_\sigma^{-1} u_\tau^{-1} = \frac{a_{\sigma,\tau}}{a_{\tau,\sigma}}$$

$$A^{1-\sigma} = A u_\sigma A^{-1} u_\sigma^{-1}$$

デマルカラ

(定理) Abel 体Kヲ最大可換体トシテ含ム Schief-körper S ガアレバK / reduzierte Norm ガ1ナル元素ハ S^* ノ交換子群ニ属スル.