



Title	非ユークリッド空間ノ一般化ニ就イテ
Author(s)	小平, 邦彦
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 237, p. 1060-1077
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74981
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1049. 非ユークリッド空間ノ一般化ニ就イテ

小平 邦彦(東大)

菅原先生ノ一般 Poincaré 空間ハ、超射影空間、ノ部分空間ト考ヘルト統一的理解セラレド、コノ立場カラ一般 Poincaré 空間、他ニ、種々ノ非ユークリッド空間ガ得ラレド、¹⁾以下コレヲ述ベド。

§1. 超射影空間. $(n+m, m)$ 型ノ real スハ complex matrix X, Y , etc. $\mathcal{F}$ rank m ノ $m \times m$ $\mathcal{F}$ 考ヘ、

$$(1.1) \quad Y = XQ, \quad |Q| \neq 0$$

ナルトキ X ト Y ハ同値デアルトイフコトニスル。同値ナル $\mathcal{F}$ 1 / class $\mathcal{F}$

$$(1.2) \quad Z = [X]$$

ヲ現ハス。

定義1.1. $Z = [X]$ ノ全体ヲ $n-m$ -次元超射影空間ト名付ケ $\mathcal{P}(n, m)$ ヲ現ハス。 X ガ實ナルトキハ實超射影空間, complex ノトキハ複素超射影空間トヨブ $\mathcal{P}(n, m)$ ヲ又 $\mathcal{P}$ ト略記スル。

然ルトキハ、 X ノ全体ヲユークリッド的 topology $\mathcal{F}$ モツ位相空間ト考ヘレバ、

$$(1.3) \quad X \rightarrow Z = [X]$$

ナル寫像ニヨツテ $\mathcal{P}(n, m)$ = topology $\mathcal{F}$ ガ導入セラレド。

12. F. Klein ノ考ヘノ一般化デアリ。

定義1.2. (1.3) = ヨッテ定義セラレル *topology* φ *topology* トヨブ。

$X \rightarrow X = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ ト現ハシタトキ $|Q| \neq 0$ + ラバ
 $Z = [X] \wedge P Q^{-1}$ デ定マレル。コノ意味デ $Z \wedge P Q^{-1}$ + ル
matrix Z ト現ハスト考ヘル。スナハチ

$$(1.4) \quad Z = \begin{bmatrix} Z \\ 1 \end{bmatrix}^{2)}$$

デアレル。コノトキ φ , *topology* ハ Z -空間, ユークリ
 ッド的 *topology* ト一致スル。 $\varphi(n, m)$ ハ局所的ニハ
 $n \times m$ 或ハ $2nm$ 次元ノユークリッド空間ト同位相デアレル。
 ソノハ $Z = (Z_{jk})$ トスレバ nm 個ノ *parameter* Z_{jk}
 デ現ハサレル。

定理1.1. $\varphi(n, m)$ ハ *compact + analytic manifold* デアレル。

証明 *analytic manifold* + ルコトハ明ラカデ
 アレル。 *compact* + ルコトハ次ノ如クシテ分ル。 X が興ヘ
 ラシタトキ $X^* X$ ハ *positive definit* デアレルカラ

$$Q^* X^* X Q = 1, \quad |Q| \neq 0$$

+ ル Q が存在スル。 $X / \sim = X Q$ トツテ思レバ, 任意ノ
 Z ハ

$$Z = [X], \quad X^* X = 1$$

ト現ハサレルコトが分ル。 $X^* X = 1$ + ル X / 全体ハ明ラカ

$$2) \quad \left[\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \right] \rightarrow \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} \text{ ト略記スル。}$$

= compact ト空間ヲ成ス。故ニソノ連続ナル $\varphi \in \text{compact}$ デナケレバナラヌ。

吾々ハ簡單ノキメ

$$(1.5) \quad \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

トオク。

次ニ射影変換³⁾ナルニヲ定義スル。 T ヲ $n+m$ 階ノ正
方行列トシ、 $|T| \neq 0$ トスル。 X ト Y ガ (1.1) ノ意味デ
同値ナラバ TX ト TY モ同値デアアル。ソコデ

定義 1.2 $|T| \neq 0$ ノトキ

$$(1.6) \quad [X] \rightarrow [TX]$$

ヲ射影変換ト名付ケ

$$(1.7) \quad [TX] = T[X]$$

ト書ク。 T ヲ変換ノ行列ト呼ビ、 T ヲ行列トスル射影変換ヲ
又 $[T]$ ナ表ハス。

$$(1.8) \quad T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} A \wedge (n, n) \text{ 型}, B \wedge (n, m) \text{ 型} \\ C \wedge (m, n) \text{ 型}, D \wedge (m, m) \text{ 型} \end{array}$$

トオケバ

$$(1.9) \quad Z = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} \rightarrow TZ = \begin{bmatrix} AP + BQ \\ CP + DQ \end{bmatrix}$$

ニ映ヘラレル。此ニ X ノ行ヲ入れ換ヘル変換ハ射影変換デア
ル。

射影変換ノ全体ハ明ラカニ群ヲ作ル。コレヲ射影変換群

3) 或ハ超射影変換

ト名付ケ $\rho_{\mathcal{O}}(n, m)$ デ表ハス。

定理1.2 $\mathcal{P}$ ハ射影交換群ニ関シテ *transitive* デ。

✓。

証明ハ

$$(1.10) \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} g = \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$$

カラ明ラカデア。ル。

§2. 基本行列. $n+m$ 階ノ *Hermite* 正定行列 S ヲ一ツ定メテ基本行列ト呼ブ。 $Z = [X]$ ガ決マラレタトキ $X^* S X$ ハ *Hermite* 行列デア。ルカラ, Q ヲ適當ニトツテ

$$Q^* X^* S X Q = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_m \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_j = \pm 1 \text{ 又ハ } 0$$

ナラシメテ出ス。ル。 スナハチ $Z = [X]$ ナル X ノ内ニ

$$(2.1) \quad X^* S X = \Delta, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

ナレモノガ存在ス。ル。 コノトキ Δ = 現ハレル $+1, -1$, 及 0 ノ個數ハ Z デ定マリ代表 X = 關係シナイ。

定義2.1. $X^* S X = \Delta$ ナル代表 X ヲ正規代表ト名付ケ, Δ ヲ Z ノ符号行列, 或ハ 卑 = Z ノ符号ト呼ブ。

*) 曾原先生, *matrix S* = 相當ス。

$Z =$ 射影変換 $Z \rightarrow T^*Z$ を行へば

$$(2.2) \quad X^* S X \rightarrow X^* T^* S T X$$

トナル. T は適当ニトレバ $T^* S T$ は Δ ト同シ形ニ直ス事
 が出来ル. 故ニ始メカラ

$$(2.3) \quad S = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & 0 \\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon_{n+m} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_j = \pm 1, \text{ 又ハ } 0$$

ト假定シテ一般性ヲ失ハナイ.

一般ニ Hermite 行列 H が与ヘラレタトキ, λ の固有値
 λ 正ノモノノ個数ヲ n_H^+ , 負ノモノノ個数ヲ n_H^- デ現ハス事
 ニスル. 然ルトキハ

定理 2.1. Δ ト S ノ間ニハ

$$(2.4) \quad \begin{cases} n_{\Delta}^+ \leq n_S^+ \\ n_{\Delta}^- \leq n_S^- \end{cases}$$

ナル関係ガアル. 従ツテ $\text{rank } \Delta$ ハ $\text{rank } S$ ヲ越エナイ.

証明. $X^* S X = \Delta$ トシ, X ノ各列ヲ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ トスル. スナハチ $X = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ トスル
 ト

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \delta_r & \\ 0 & & & 0 \dots 0 \end{pmatrix}, \quad \delta_j = \pm 1$$

トオケバ, $X^* S X = \Delta$ ナル関係ハ

$$\begin{cases} y_j^* S y_k = 0 & (j \neq k) \\ y_j^* S y_j = \begin{cases} \delta_j & (1 \leq j \leq r) \\ 0 & (j > r) \end{cases} \end{cases}$$

ト書カレル。従ッテ $y_1 = y_1, \dots, y_r = y_r + i(n+m)$ 個ノ独立ノ vector $y_1, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_{n+m}$ ノ適當ニ選ンデ

$$y_j^* S y_k = \varepsilon_j \delta_{jk}$$

トシメルコトが出来ル。⁵⁾ コニテ $\varepsilon_1 = \delta_1, \dots, \varepsilon_r = \delta_r$ ナルカラ, コノ事ハ $T = (y_1, \dots, y_{n+m})$ トオケベ

$$T^* S T = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \delta_r & & \\ & & & \varepsilon_{r+1} & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & \varepsilon_{n+m} \end{pmatrix}, \quad |T| \neq 0$$

ニ成ナラナイ。スナハチ $\delta_1, \dots, \delta_r \in (2, 3), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+m}$ ノ一部デアル。

定理 2.2. Δ ガ前定理ノ条件 (2.4) ノ他ニ更ニ

$$(2.5) \quad m - n_{\Delta}^{+} - n_{\Delta}^{-} \leq n+m - n_S^{+} - n_S^{-}$$

ヲ満足スルヲバ, $X^* S X = \Delta$ トル X ガ存在スル。而テ S ヲ (2.3) ノ形ニトルヲバ適當ニ行列ヲ入レ換ヘルコトニヨッテ

$$(2.6) \quad \theta^* S \theta = \Delta$$

5) 一般ニ H ガ n 階ノ Hermite 行列 + ルトキ, m 個ノ vector

$$y_1, \dots, y_m = \Psi_i \tau$$

$$y_j^* H y_k = h_j \delta_{jk}, \quad h_j \neq 0$$

(次頁ニツヅク)

ナラシメ得ル。

Z が φ を動クトキ、 $\forall$ 符号 Δ 、 rank 、最大値 μ 、上
1 = 定理カラ明ラカナレ如ク

$$(2.7) \quad \mu = \min \{ \text{rank } S, m \}$$

= 等シイ、吾々ハ Z を符号 $\Delta =$ ヨツテ分類シテ:

定義 2.2. $\text{rank } \Delta = \mu + \nu$ Z を regular element
トヨブ。コレニ対シテ $\text{rank } \Delta < \mu + \nu$ Z を singular
element ト名付ケル。又 Δ を符号トスル Z 、作ル φ 、部分
(前頁脚註、ツバキ)

カ成立シテキルナラバ、 $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ ハ一次独立デアツテ、更
ニ独立ナ $n-m$ 個ノ vector $\varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n$ を補ツテ、
 $1 \leq j, k \leq n$ ニツイテ

$$\varphi_j^* H \varphi_k = k_j \delta_{jk}, \quad (k_j \geq 0)$$

ナラシメルコトが出来ル。証明。 φ_j = 関スル m 個ノ一次方程式

$$\varphi_j^* H \varphi = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

ハ独立デアル。何トナレバ $\sum \lambda_j \varphi_j^* H = 0$ トスレバ左カラ φ_k を
掛ケルコトニヨツテ $\lambda_k k_k = 0$ を得ルカラ。故ニコノ方程式ハ
 $n-m$ 個ノ独立解ヲモツ。コノ解ハ又 $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ トニ独立デア
ル。何トナレバ $\lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_m \varphi_m$ が解デアツタトスレバ、之ニ
 $\varphi_j^* H$ を掛ケテ $k_j \lambda_j = 0$ を得ルカラ。コノ事カラ又 $\varphi_1, \dots, \varphi_m$
ノ独立ナルコトが分ル。コノ解 φ = ツイテ常ニ $\varphi^* H \varphi = 0$ ナラバ、
 $n-m$ 個ノ独立解ヲ $\varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n$ トスルコトニヨツテ目的ハ達セ
ラレル。然ラザル場合ニハ $\varphi^* H \varphi \neq 0$ を満足スル φ を一ツトツテ
コレヲ φ_{m+1} トスレバ、 m ハ一ツ増シテ $m+1$ トナレ。

空間ヲ $\mathcal{P}_\Delta$ ナ表ハス。

スルト上ノ定理カラ *regular part* $\mathcal{P}_\Delta$ ハ θ ナ含ムト考ヘテヨイ事ガ分ル。

§3. 一般非ユークリッド空間. 定義3.1, *regular element* カラ成ル $\mathcal{P}_\Delta$ ナ一般ユークリッド空間ト名付ケル。

コノ定義ガ不當デナイコトハ次條ニ分ル。先ツ

定理3.1. *regular part* $\mathcal{P}_\Delta$ ハ $\mathcal{P}$ ノ開部分集合デアル。ソノ境界ハスベテ *regular element* カラ成ル。

証明. $X_0^* S X_0 = \Delta$, $\text{rank } \Delta = \mu$ トシ X ナ $X_0 =$ 充分近い行列トスル。スルト $X^* S X$ ハ $X_0^* S X_0 = \Delta$ ニ近いカラ、ソノ固有値ニ $X_0^* S X_0$ ノ固有値ニ近い。スナハチソノ中ノ n_Δ^+ 個ハ殆ンド $+1$, n_Δ^- 個ハ殆ンド -1 , 残りハ殆ンド 0 デアル。然ルニ假定ニヨツテ $\text{rank } X^* S X \leq \mu = n_\Delta^+ n_\Delta^-$ デアル。故ニ殆ンド 0 ナル固有値ハ正シク 0 デナケレバナラス。スナハチ $X^* S X$ ハ丁度 n_Δ^+ 個ノ正ノ固有値ト n_Δ^- 個ノ負ノ固有値ヲモツ。故ニ $Z = [X]$ ノ符号ハ $Z_0 = [X_0]$ ノ符号ト一致スル。コレデ *regular part* ハ開イテキル事ガ分ツタ。境界ガ *regular part* カラ成ルコトハコノ結果カラ直チニ従フ。

定義3.2

$$(3.1) \quad T^* S T = S$$

ナル射影変換 $[T]$ ナ運動ト名付ケ、コノ全体ノ作ル群ヲ運動群トヨブ。 O_f ナ現ハス。

各 φ_Δ は明らかな運動不変であるが regular + φ_Δ = ツイテハ 次の重要定理が成立ス。

定理 3.2. Regular part φ_Δ の運動群 $O(\varphi_\Delta)$ = 関シテ transitive である。

証明. 定理 2.2 = ヨツテ

$$(a) \quad \theta^* S \theta = \Delta$$

スハチ, $\theta \in \varphi_\Delta$ ト考ヘテヨイ。従ツテコノ假定ノ下ニ

$$(b) \quad X^* S X = \Delta$$

ナラバ

$$(c) \quad T \theta = X$$

$$(d) \quad T^* S T = S$$

ナル T が存在スルコトヲ示セバ充分である。サテ (a) は

$$(a), \quad S = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

ナルコトヲ示シテキル。(c) は

$$(c), \quad T = (Y | X)$$

ト書カレルコトヲ要求スル。コノ T ヲ (d) = 入レルト, (d) は

結局

$$(d), \quad \begin{cases} Y^* S Y = \Gamma \\ X^* S Y = 0 \\ X^* S X = \Delta \end{cases}$$

トナルが, コノ最後ノ式ハ (b) = ヨツテ既ニ満タサレテキル。

故ニ吾々ノ問題ハ

$$(e) \begin{cases} Y^* S Y = F \\ X^* S Y = 0 \end{cases}$$

ナレ Y ヲ求メルコト=帰着スル。但シコノ際 $\det(Y|X) \neq 0$
 デナケレバナラヌ点=注意ヲ要スル。コレヲ解クタメ= Y ノ
 各列ヲ $y_1, \dots, y_n$ トシ、コレ=相當シテ $X = (y_1, \dots, y_m)$
 トシヨリ。スルト $X^* S Y = 0$ ハ

$$(f) \quad X^* S y_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

ナレ 一次方程式トナル。

一般 = $\text{rank } A \cdot B \leq \text{rank } A, \text{rank } B$ ナアルカラ

$\text{rank } X^* S \leq \mu$ デナケレバナラヌが、假定=ヨツテ

$\text{rank } X^* S X = \text{rank } \Delta = \mu$ ナアルカラ

$$\text{rank } X^* S = \mu.$$

従ッテ方程式 $X^* S y_j = 0$ ハ $n+m-\mu$ 個ノ独立解ヲモツ。

然レニ

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \delta_\mu & \\ & & & 0 & \ddots & \\ & & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_\mu, 0, \dots, 0) \text{トナケ}$$

ニ、 $X^* S X = \Delta$ ナル式ハ

$$\begin{cases} X^* S y_j = \Delta_j & (j = 1, 2, \dots, \mu) \\ X^* S y_j = 0 & (j > \mu) \end{cases}$$

ナレコトヲ示シテキル。スナハチ $y_{\mu+1}, \dots, y_m$ ハ $m-\mu$ 個
 ノ独立解ナアル。

故ニコノ地=独立ナル μ 個ノ解ガアル。コレヲ $y_1, \dots, y_\mu$

トスル。コノトキ

$$y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_n$$

ハ独立デアル。何トナレバ

$$0 = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m + \lambda_{m+1} y_{m+1} + \dots + \lambda_{m+n} y_n$$

デアッタトスレバ

$$\lambda_1 \Delta_1 + \dots + \lambda_m \Delta_m = X^* S (\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_{m+n} y_n) = 0$$

従ッテ $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ ナケレバナラズ。更ニ

$y_{m+1}, \dots, y_n$ が独立デアッタカラ, $\lambda_{m+1} = \dots = \lambda_{m+n} = 0$ トナルカラ。コレデ

$$Y = (y_1, \dots, y_n)$$

トオケバ

$$X^* S Y = 0, \quad \det(Y|X) \neq 0$$

ナルコトガ分ッタ。

コノ Y ハ未ダ $Y^* S Y = \Gamma$ ヲ満足シナイカラ, コレヲ Y_1 ト書クコトニシヨウ。 $T_1 = (Y_1 | X)$ トオケバ, 上ノ結果カラ

$$T_1^* S T_1 = \begin{pmatrix} Y_1^* S Y_1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

ナルコトガ分ル。一チ S ハ (a) , ナル形ヲモツノデアルカラ

$$A_1^* Y_1^* S Y_1 A_1 = \Gamma, \quad |A_1| \neq 0$$

ナル A_1 が存在スル。コレヲ用ヒテ

$$Y = Y_1 A_1$$

トオケバ, Y ハ明ラカニ求ムルモノデアル。

Singular part = ヲイテハ次ノ定理が成立ツ:

定理 3.3. Singular part ϕ_Δ ハ $\psi = \phi_\Delta$ ナルヲ

至ル所密デナイ。

証明. 一般 $= A, B, C$ が同じ型 / 正方向列デ, $|A| \neq 0$
ナルトキハ

$$|\lambda^2 A + \lambda B + C| = \lambda^{2n} |A| + \lambda^{2n-1} a_1 + \dots$$

デアルカラ, 高々 2n 個ノ λ ヲ除ケバ $|\lambda^2 A + \lambda B + C| \neq 0$ デ
アル. 従ッテ一般 = 高々有限個ノ λ ヲ除ケバ

$$\text{rank}(\lambda^2 A + \lambda B + C) \geq \text{rank } A$$

ガ成立ツ. コノ事ヲ用ヒルト, λ ガ real ナルトキ

$$(\lambda X_0 + X)^* S (\lambda X_0 + X)$$

$$= \lambda^2 X_0^* S X_0 + \lambda (X_0^* S X + X^* S X_0) + X^* S X$$

アルカラ, X_0 ガ regular ナラバ有限個ノ λ ヲ除ケ
 $\lambda X_0 + X$ ハ regular デアルコトガ成ル. $\lambda X_0 + X$ ハ
 $\lambda \rightarrow 0$ ノトキ明ラカ $= X =$ 近ザク. 故ニ如何ナル X ノ近
傍ニ $\in$ regular element ガ存在スル. 従ッテ sin-
gular partハ至ル所密デナイ。

コノ結果カラ次ノコトガ成ル。

定理 3.4. φ ハ singular partヲ境界トスル有
限個ノ regular partノ和ニ分タレル。

3.4. 計量基本式 $|S| \neq 0$ ナル場合ニハ regular
part φ_Δ ハ運動デ不変ナ計量ヲ与ヘ. 行ノ順序ヲ適当ニ
トッテ

$$(4.1) \quad \theta S \theta = \Delta$$

トシ, コレニ相當シテ

$$(4.2) \quad S = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

トオケ、コノテ Γ, Δ ハ共ニ ± 1 ノ對角要素トスル對角行列
列デアレガ、一般ニ

$$\begin{cases} \Gamma^2 = I \\ \Delta^2 = I \end{cases}$$

ナルトキ次ノ定理が成立ス。

定理4.1. $Z = \begin{bmatrix} Z \\ 1 \end{bmatrix}$ 対シテ ds^2 7

$$(4.3) \quad ds^2 = S_p (\Delta + Z^* \Gamma Z)^T dZ^* (\Gamma + Z \Delta Z^*)^T dZ$$

ト從フスレバ、 ds^2 ハ運動デ不変デアアル。

証明. 任意ノ $Z \in \mathcal{P}_\Delta$ ハ適當ナ運動デ $\theta =$ 移ナル。
故ニ

$$(a) \quad T\theta = \begin{pmatrix} Z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T^* S T = S$$

ナル $T =$ ヲイテ

$$T dW = dZ$$

トシタトキ、(4.3) ガ決ヘラレル ds^2 ガ

$$ds^2 = S_p \Delta dW^* \Gamma dW$$

ヲ満足スルコトヲ言ハシ定理ハ証明セラレル。 $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

トオケバ (a) ナル關係ハ

$$(b) \quad B = ZD$$

$$A = \begin{cases} A^* \Gamma A + C^* \Delta C = \Gamma \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} B^* \Gamma B + D^* \Delta D = \Delta \\ A^* \Gamma B + C^* \Delta D = 0 \end{cases}$$

ト書カレル. (c) = (b) 7 入レルト, 最後ノ式カラ

$$(d) \quad C = -\Delta Z^* \Gamma A;$$

奥中ノ式カラ

$$D^*(Z^* \Gamma Z + \Delta) D = \Delta$$

ヲ得ル. 又 Cノ値ヲ (c)ノ最初ノ式ニ入レルト

$$A^* \Gamma (\Gamma + Z \Delta Z^*) \Gamma A = \Gamma$$

ガ出ル. 簡単ノタメ

$$\begin{cases} \Delta + Z^* \Gamma Z = F \\ \Gamma + Z \Delta Z^* = G \end{cases}$$

トオケバ, スナハチ

$$(e) \quad \begin{cases} D^* F D = \Delta \\ A^* \Gamma G \Gamma A = \Gamma \end{cases}$$

次ニ $T dw = dz$ カラ dz ヲ求メルト, $B = ZD$ ヲ用

ヒテ

$$\begin{aligned} dz &= (Adw + ZD)(Cdw + D)^{-1} - Z \\ &= (A - ZC)dwD^{-1} \end{aligned}$$

ヲ得ル. (d)カラ $A - ZC$ ヲ求メレバ

$$A - ZC = A + Z\Delta Z^* \Gamma A = G \Gamma A$$

トナル. 故ニ

$$dz = G \Gamma A dw D^{-1}$$

従ツテ

$$\begin{aligned} ds^2 &= Sp F^{-1} dz^* G^{-1} dz \\ &= Sp F^{-1} D^{*-1} dw^* A^* \Gamma G \Gamma A dw D^{-1} \\ &= Sp (D^* F D)^{-1} dw^* (A^* \Gamma G \Gamma A) dw \end{aligned}$$

ト+14. 故に $(e) = \text{ヨツテ}$

$$dS^2 = S_p \Delta dW^* \Gamma dW$$

コレヲ定理カ証明サレタ。

次ニ運動デ不変ト計量ハ常数因子ヲ除ケ、バー意的ニ定メ
ルコトヲ示サシ。コノタメニ、 Γ / Hermite 形式ヲ不変
トラシメル変換群ノ不変式ニツイテ考ヘル。Hヲ $\det H \neq 0$
トシ、Hermite 行列トシ、 $y = (y^1, y^2, \dots, y^n) =$ 對
シテ。

$$(4.4) \quad h(y, y) = y^* H y$$

ニヨツテ Hermite 形式 $h(y, y)$ ヲ定義スル。一次変
換 $y \rightarrow y' = U y$ カ $h(y, y)$ ヲ不変トラシメルタメ
ノ必要且充分ノ条件ハ明カニ

$$(4.5) \quad U^* H U = H$$

ナアル。コノ様ニ変換 U 全体ノ作ル群ヲ O_H トスル。スル
ト

定理4.2 m 個ノ vector $y_1, y_2, \dots, y_m$,
 m 個ノ成分 y_r^i , Hermite 形式 $h(y_1, \dots, y_m)$
ガ O_H ノ変換 $y_j \rightarrow U y_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$) デ不
変トラシ、 $h(y_1, \dots, y_m)$ ハ

$$(4.6) \quad h(y_1, \dots, y_m) = \sum a_{jk} h(y_j, y_k),$$
$$a_{kj} = \bar{a}_{ik}$$

ナル形ヲモツ。

証明。 H ハ適當ノ変換ヲ對角行列ニ直セルカラ、
始メカラ

$$H = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & 0 \\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon_n \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_j = \pm 1$$

トシテ一般性ヲ失ハナイ。先ツ

Lemma. $h(y, y) = h(y, y) \neq 0$ ナラバ

$y = Uy + U y_H$, 変換 U が存在スル。

何トナレバ, 假定カラ, $y_1 = y, y_2, \dots, y_n$ 及ビ

$y_1 = y, y_2, \dots, y_n$ ナル一次独立ノ vector ノ組ヲ

$$h(y_i, y_k) = h(y_i, y_k) = \lambda_i \delta_{ik}$$

ナルヤリ = 選ベルコトガ余ル。コレヲ用ヒテ

$$y_i = Uy_i$$

= ヨツテ一次変換 U ヲ定義スレバ, 明カラ $y = Uy$ ナ

アツテ $H = U^* H U$ ガ成立ツ。

サテ vector ノ個數 m = 同スル帰納法 = ヨツテ定理ヲ証明シヨウ。今 $m-1$ 個ノ vector = ツイテハ既ニ定理ガ証明サレタトスルト

$$h(y_1, y_2, \dots, y_m) = \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^n a_{jk} h(y_j, y_k)$$

ト現ハサレル。若ク

$$h(y, y) = \varepsilon \lambda^2, \quad \lambda > 0$$

ナル vector トスレバ, y ナ $y = (\lambda, 0, \dots, 0) =$ 移ス

y_H ノ変換ガ存在スル。コノ変換 = ヨツテ y_i ハ $y_i =$ ナ

外シヨウ。スレト

$$h(y_1, y_2, \dots, y_m) = h(y, y_2, \dots, y_m)$$

変換で不変でなければならぬ。⁶⁾ 先の

$$dZ = (dy_1, \dots, dy_m)$$

トオケト, dZ は変換で

$$U dZ = (U dy_1, \dots, U dy_m)$$

トナル. ds^2 はスカラー形式である. 故に前定理に

ヨッテ

$$(b) \quad ds^2 = \sum a_{jk} dy_j^* \Gamma dy_k = \sum a_{jk} \gamma_{\ell} \overline{dZ}_{\ell j} dZ_{\ell k}$$

ナル形ヲモツ. 次ニ

$$dZ = \begin{pmatrix} dy'_1 \\ \vdots \\ dy'_n \end{pmatrix}$$

ト考へれば, ds^2 は df_{Δ} の不変式であるカラ

$$(c) \quad ds^2 = \sum b_{jk} dy_j^* \Delta dy_k = \sum b_{jk} \delta_{\ell} \overline{dZ}_{\ell j} dZ_{\ell k}$$

(b) と (c) を合せると

$$ds^2 = g \cdot \sum \gamma_j \delta_{\ell} |dZ_{\ell j}|^2 = g S_p \Delta dZ^* \Gamma dZ$$

でなければならぬことが出る. 但しここでも g は定数である.

6) 一般に $z^j = x^j + iy^j$ ($j=1, 2, \dots, n$) とおくと, dx^j, dy^j は

次の形式が $z^j \rightarrow iz^j$ による変換で変換 invariant ならば, ソレハ

$$ds^2 = \sum g_{jk} \overline{dZ}^j dZ^k, \quad g_{jk} = \overline{g_{kj}}$$

ナル形ヲモツ.