



Title	ベクトル値集合関数空間ニ就テ
Author(s)	小笠原, 藤次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 237, p. 1078-1086
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74982
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1050. ベクトル値集合函数空間=就テ

小生原 謙次郎(廣島文理大)

ベクトル値集合函数空間ヲ取扱ッタル L. Kantorovitch / 所論¹⁾ノ一般化ヲ目的トスル。

§1. 豫備概念ノ説明

S ヲ基本集合トシ S ノ部分集合ヨリタル乗法的集合族ヲ $\mathcal{M}$ トスル. ($E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ ノトキ $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ トナル意). 互=素+有限或ハ無限個(可附番トハ限テ+イ)ノ $\mathcal{M}$ ノ要素ノ和トジテ S ヲ分ケルコトヲ S ノ分割トイヒ, 一般ニ分割ヲ $\mathcal{A}$ ヲ表ハス. $\mathcal{A}$ ノ S ニヨツテ分割サレテ $\mathcal{M}$ ノ要素ノ集合ヲ示ス. $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ ハ $\mathcal{A}_2$ ハ $\mathcal{A}_1$ ノ細分割, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ ハ分割ノ重複, $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$ ハ $\mathcal{E}$ =誘導サレタ分割ノ要素ノ集合ヲ表ス. 次ノ性質ヲモツ分割系 $\{\mathcal{A}\}$ ヲ考ヘ分割トハスベテコノ系=属スルモノトスル.

(i) $E \in \mathcal{M}$ ノトキ $E \in \mathcal{A}$ S タル $\mathcal{A} \in \{\mathcal{A}\}$ ノ存在

(ii) $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \{\mathcal{A}\}$ ノトキ $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \{\mathcal{A}\}$

(iii) $E \in \mathcal{M}$ ノトキ $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$ ハ有限個ノ $\mathcal{M}$ ノ要素ヨリタル.

次ノ如キ場合ハ重要デアル.

例1. $\mathcal{M}$ ガ S ヲ含ム Borel 族, $\{\mathcal{A}\}$ ハ互=素+有限個ノ $\mathcal{M}$ ノ要素ヘノ S ノ分割ノ全体

例2. S ガ任意個数ノ S_α =分カレタ各ノ S_α ガ例1ノ性質ヲ具ヘ $\mathcal{M} = \sum \mathcal{M}_\alpha$ トナルトキ 但シ $\mathcal{M}_\alpha$ ハ S_α =對應

1) Rec. Math. 7 (1940) 209-284

スル Borel 族.

例3. S が区間, $\mathcal{M}$ が部分区間, 全体, $\{\emptyset\}$ は S , 有限分割, 全体.

マラエ $\mathcal{A} = \mathcal{M}$ イテ

$\mathcal{A}$ の有限個の要素の集り, 全体 $\mathcal{A}$ $\{\Delta\}$ デ表シ $\Delta \subseteq \Delta'$ Δ, Δ' ア定義スル $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$, $\Delta \subseteq \Delta'$ が存在シ $\mathcal{A}' \Delta \subset \Delta' (E \in \Delta$ ノトキ $\mathcal{A}' E \subset \Delta'$ ノ意) ノトキト定メルコト = 依ッテ $\{\Delta\}$ ハ有向集合 (directed set) トナル. $\mathcal{M}$ 上ノ集合函数 $\varphi(E)$ (実数値或ハ値域ヲベクトル束トスル) が $E = \sum_i E_i, E_i E_j = 0, i \neq j$ ノトキ $\varphi(E) = \sum_i \varphi(E_i)$ ナラバ加法的 $n = \infty$ デモ成立スルナラバ完全加法的トイフ (ベクトル束デハ (0)-函数デ). §2 - §5 デハ $\mathcal{M}$ = 完全加法的非負実数値函数 (簡單-測度函数) $\beta(E)$, 存在ヲ假定スル. ($\beta(E)$ ア單-加法的トスルモ外見上ノ相違ニスキヤ²⁾ イ. $\beta(E)$ ハ例1又ハ例2, 如キ集合族ノ測度函数 = 拡大サレル. 従ッテ点函数 = ヲイテ Borel 族ヲ必要トスル概念ノ構成 = 於テハ β 並 = $\mathcal{M}$ ヲ例1又ハ例2, 如ク拡大シテ論ゼラレテキルモ, ト約束スル.

§2. 以下断ラ¹⁾イ限リ X ヲ完備ベクトル束, p, p' $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ナル1ヨリ大²⁾正数, $\sum_i |c_i|^p = 1$ ナル任意ノ実数 = 對シ $\sum_i c_i x_i, (x_i \in X)$, l.u.b $\left\{ \sum_i |x_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$ ト記ス. $x_i \in X, i = 1, 2, \dots$ ノトキ $\left\{ \sum_i |x_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$ が (0)-有

(2) 角谷, 位相数学! 第2巻

界ノトキソ, l. u. b. $\tau \left\{ \sum_i^n |x_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$ ト定メル.

定義 2.1. X ノ値域トスル集合函数 $\xi(E)$ ガ (p) -可積分トハスベテノ $\Delta = \mathcal{U}$ イテ $\left\{ \sum_{E \in \Delta} \frac{|\xi(E)|^p}{\beta(E)^{p-1}} \right\}^{\frac{1}{p}}$ ガ (0) -有界ノコトデアアル.

コノトキソレ等, l. u. b. $\tau \left\{ \int_S \frac{|\xi(dE)|^p}{\beta(E)^{p-1}} \right\}^{\frac{1}{p}}$

ヌハ $N(\xi)$ (abstract norm) ト記ス. 但シ $\beta(E) = 0$ ノトキ $\xi(E) = 0$ ヲ満足シ $\frac{0}{0}$ ノ形, ∞ ノハ 0 ト定メル.

定義 2.2. (p) -可積分函数ノ全体ヲ $V^p(X)$ (p 明記スル必要アルトキ $V_{(p)}^p(X)$ デ表ハス. X ガ實数ヨリナルトキ單 $= V^p$ デ表ス.

定理 2.1. $V^p(X)$ ハ完備ベクトル束デアアル.

(証) 略

定理 2.2. $V^p(X) =$ 於テ

$$(1) \quad N(\xi) \geq 0 \quad \xi = 0 \text{ ノトキ } = \text{限リ } N(\xi) = 0$$

$$(2) \quad N(\xi_1 + \xi_2) \leq N(\xi_1) + N(\xi_2), \quad N(\alpha \xi) = |\alpha| N(\xi)$$

但シ α ハ實数

$$(3) \quad |\xi_1| < |\xi_2| \text{ ノトキ } N(\xi_1) < N(\xi_2), \quad N(\xi) = N(|\xi|)$$

$$(4) \quad \xi_n \downarrow 0 \text{ ノトキ } N(\xi_n) \downarrow 0 \quad \text{但シ } S \text{ ハ可附番要素カラナル } \in \text{ ノトス.}$$

$$(5) \quad 0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots, \quad \{N(\xi_n)\} \text{ ガ } (0)\text{-有界ノトキ } \{\xi_n\} \text{ ノ l. u. b. が存在スル.}$$

(証) 略

定理 2.3. X ガ regular ノトキ $V^p(X) \in$ マタ regular デアル.

(証) X が *regular* / トキ前定理 / (4) / 附帯條件ハ
不要トナ。紙雜誌 223 号 / 102 / 定理 4 カヲ。

定理 2.4. $\forall^p(X) =$ 於テ $|\xi_1| \wedge |\xi_2| = 0$ / トキ

$$N(\xi_1 + \xi_2) = \{N(\xi_1)^p + N(\xi_2)^p\}^{\frac{1}{p}}$$

(証) 略

定義 2.3. 定義 2.1 デ S / $\mathcal{E} = E$ フテハストキ *abstract norm* $N_E(\xi)$ デ表ス。

定理 2.5 $\forall^p(X) =$ 於テ $E = \sum E_i, E_i \perp E_j$ / ト
 $N_E(\xi) = \left\{ \sum N_{E_i}(\xi)^p \right\}^{\frac{1}{p}}$

又 $N(\xi) = l.u.b. \left\{ \sum_{E \in \Delta} N_E(\xi)^p \right\}^{\frac{1}{p}}$

X が特 = *regular* / トキ $N_E(\xi) > 0$ トナル $\mathcal{E}$ / 要素ハ
高々可数番トナリ $N(\xi) = \left\{ \sum_{E \in \mathcal{E}} N_E(\xi)^p \right\}^{\frac{1}{p}}$ が成立スル。

(証) 略

定義 2.4. $\xi(E)$ が (0)-全連続トハ $\sum_{E \in \Delta} \beta(E) \rightarrow 0$ /
トキ $\sum_{E \in \Delta} |\xi(E)| \rightarrow 0(0)$ が成立スルコト, 相對 (0)-全連續
トハ正要素 e カ存在シテ $\varepsilon =$ 對シ δ カ存在シ $\sum_{E \in \Delta} \beta(E) < \delta$ /
トキ $\sum_{E \in \Delta} |\beta(E)| < \varepsilon$ トナルコトデアル。 (X が *regular*
ノトキニツノ概念ハ一致スル)

定理 2.6. $\xi \in \forall^p(X)$ / トキ $\xi(E)$ ハ完全加法的, 相
對 (0)-全連續デアル。

定理 2.7. $\xi \in \forall^p(X)$ / トキ $\xi(E)$ ハ例 1 又ハ例 2 / 如
キ集合族上ノ (p)-可積分函数ニ拡大サレ而シテ *abstract*
norm フテハトイ。

$X =$ 単位が存在スルカヌハカ、ルベクトル系ノ直和ト考
ヘ積、定義が可能ト要素ニサレテイルトキ $\int_S \frac{|\xi(dE)|^p}{\beta(dE)^{p-1}} d\beta$
定義スルコトが出来ル。コレニツイテハ同様ノ定理ヲ並ベル
コトハ煩ヲハシイカラ省略スルコトニシタイ。

§3. 点函数トノ関係

定義3.1. $\xi(E) =$ 對シ $\xi_\Delta(E) = \sum_{E' \in \Delta} \frac{\xi(E')}{\beta(E')} \beta(E E')$

ト定メル。

定理3.1. 正数 $\varepsilon =$ 對シ正数 $k(p, \varepsilon)$ が定マリ $\xi \in V^p(x)$
 $=$ 對シテ

$$N(\xi - \xi_\Delta) \leq \{k(p, \varepsilon)(N(\xi)^p - N(\xi_\Delta)^p) + \varepsilon N(\xi)^p\}^{\frac{1}{p}}$$

(証) Bochnerノ方法デ⁽¹⁾

定理3.2. X が regular, トキ $N(\xi_{\Delta_n}) \rightarrow N(\xi)$ (1)
ナル Δ_n が存在シコレニ對シ $N(\xi - \xi_{\Delta_n}) \rightarrow 0(0)$

(証) 前定理カラ

定義3.2. 例1ヌハ例2ノ集合族 $\mathcal{A}$ ヲ考ヘル。点函数
 $x(\mathcal{A})$ が (p) -可積分トハ之ニ殆ド到ル処(0)-収斂スル單函
数列 $\{t_n(\mathcal{A})\}$ (有限測度ノ集合上デノミ0ト異ル値ヲトル)
が存在シ $m, n \rightarrow 0$ ノトキ $\left\{ \int_S |t_n - t_m|^p d\beta \right\} \rightarrow 0(0)$ が成
立スルコト。

ユ、トキ $\left\{ \int_S |t_n|^p d\beta \right\}^{\frac{1}{p}}$, 極限ヲ $\left\{ \int_S |x(\mathcal{A})|^p d\beta \right\}^{\frac{1}{p}}$ デ表ス。

(1) *Annals of Math* 40 (1939) 179

カル点函数ノ積分-ツイテハ茲ヲ詳シク述ベタイ。

定理 3.3. X が Bochner / 条件ヲ満足スルベクトル束トスレバ $\xi \in V^p(X) = \mathcal{H}(p)$ -可積分 $+x(\Delta)$ が存在シ,

$$\xi(\cdot) = \int_E x(\omega) d\beta, \quad N(\xi) = \left\{ \int_S |x| d\pi^p d\beta \right\}^{\frac{1}{p}} \text{ が成立スル.}$$

§4. $H^0_{\mathcal{H}}$ 作用素ノ表現.

定義 4.1. $\xi \in V^p(X), \varphi \in V^{p'} + \text{ル任意ノ} \xi, \varphi = \text{對シ}$
 $J_{\Delta} = \sum \frac{\varphi(E) \xi(E)}{\beta(E)}$ ト置キ $N(\varphi_{\Delta}, \cdot) \rightarrow N(\varphi) + \text{ル}$

Δ_n ヲトルト J_{Δ_n} が (0)-収斂スル. $\exists$ / 極限ヲ

$$\int_S \frac{\varphi(dE) \xi(dE)}{\beta(dE)} \text{ ヲ表ス.}$$

定理 4.1. ⁽²⁾ $V^{p'}$ カラ X へノ線型作用素 $U\varphi, \varphi \in V^{p'}$ が $H^0_{\mathcal{H}}$ 作用素 (norm ヲ有界ノ集合ヲ (0)-有界集合ニカヘル) ナルタメノ條件ハ $\xi \in V^p(X)$ が存在シ,

$$U\varphi = \int_S \frac{\varphi(dE) \xi(dE)}{\beta(dE)} \text{ トナルコト. } U, \text{ abstract norm}$$

$N(\xi)$ トナル。

定義 4.2. $L^{p'}_{(\rho)}(S)$ ヲ (p') -可積分実数值函数ノ全体ヲ表ス.

定理 4.2. $L^{p'}_{(\rho)}(S)$ ヨリ Bochner / 条件ヲ満足スルベクトル束 X へノ線型作用素 U が $H^0_{\mathcal{H}}$ 作用素ナルタメノ條

件、 p -可積分函数 $x(s)$ が存在して $Ug = \int_S g(s) x(s) d\beta$,
 $g \in L^{p'}_{(\beta)}(S)$ 、ト + ルコトデアル。コノト + U 、abstract
 norm $\|\cdot\| = \left\{ \int_S |x(s)|^p d\beta \right\}^{\frac{1}{p}}$ デ映ヘラレル。

定理 4.3. $L^{p'}_{(\beta)}(S)$ より $L^r(T)$, $1 \leq r \leq \infty$ ($r = \infty$,
 トキハ有界可測函数ノ全体) へノ線型作用素 Ug , $g \in L^{p'}_{(\beta)}(S)$
 が H^0 作用素 + ルタメノ條件ハ可測函数 $K(s, t)$ が存在して
 $Ug(t) = \int_S K(s, t) g(s) d\beta$ ト + リ

$$1 \leq r < \infty, \text{ ト + } \left\{ \int_T \left\{ \int_S |K(s, t)|^p d\beta \right\}^{\frac{r}{p}} d\gamma \right\}^{\frac{1}{r}} < +\infty$$

$$r = \infty, \text{ ト + } \text{ess. l.u.b.}_t \left\{ \int_S |K(s, t)|^p d\beta \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

U 、abstract norm $\|\cdot\| = \left\{ \int_S |K(s, t)|^p d\beta \right\}^{\frac{1}{p}}$ デ映ヘラレ
 ル。

(注意) コレハ Kantorovitch - Vulich ノ方法¹⁾ デ証
 明シタガ簡単デアル。

定義 4.3. X 、regular トスル。 $\xi \in V^p(X)$, $\eta \in V^{p'}(X)$
 ノトキ $N(\xi)N(\eta)$ が存在スルトキ定義 4.1 ト同様ニシテ

$$\int_S \frac{\xi(dE) \eta(dE)}{\beta(dE)}$$

ガ定義サレル。(コレヲ核函数デ表ハスコト = ツムテハ
 デ述ベタイ)

§ 5. 直交函数 = ヱル展開

1) Compositio Math 5(1937) 119-165

$$\xi \in V^2(X), \eta \in V^2 \text{ トレクト } (\xi, \eta) = \int_S \frac{\eta(dE) \xi(dE)}{\beta(dE)}$$

ト定ナル。

定理 5.1. $\{\varphi_n\} \subset V^2$, 正規直交系 トスル。 $\xi \in V^2(X)$
 対シ

$$N(\xi) \geq \left\{ \sum (\xi, \varphi_n)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$\{\varphi_n\}$ が完全正規直交系 トキハ等号が成立スル。

定理 5.2. $\{\varphi_\alpha\} \subset V^2$, 完全正規直交系 トスル。 X
 が regular, トキ $\xi \in V^2(X) =$ 対シ $(\xi, \varphi_\alpha) \neq 0$ ナル φ_α
 ハ商々可附番 $N(\xi) = \left\{ \sum (\xi, \varphi_\alpha)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$ が成立スル。且

$$(\xi, \eta) = \sum (\varphi, \varphi_\alpha)(\xi, \varphi_\alpha)$$

定理 5.3 V^2 ヨリ抽象 L_2 空間へ、線型作用素 U が
 H^0 作用素 ナルタメ、条件ハ U が finite norm 作用素
 ナルコト。

(証) 定理 4.17 使ッテ

定理 5.4. $\xi, \eta \in V^2(X)$, $N(\xi)^2, N(\eta)^2$ が存在ス
 ルトキ $\{\varphi_n\}$ が V^2 ノ完全正規直交系 ナラバ

$$\int_S \frac{\xi(dE) \eta(dE)}{\beta(dE)} = \sum (\xi, \varphi_n)(\eta, \varphi_n)$$

§6. $V^p(X)$, $p=1$ ノ場合

定義. $\sum_{E \in \Delta} |\xi(E)|$ が (0)-有界, トキ $\xi \in V(X)$,

$\sum_{E \in \Delta} |\xi(E)|$ ノ l.u.b. $\leq N(\xi)$ デ表ス。

コトキ §2 ノ定理 2.1, 2.3 が成立スル。尚完全加法

的 $\exists \in \mathcal{M}(X) \neq \mathbb{A}$ 体 $\exists V(X)'$ トスレバ $V(X)' = \mathbb{A}$ イテモ
 定理 2.1, 2.2, 2.3 が成立スル。従ッテ X が *regular* ト
 キハ $V(X)'$ ハ $V(X)$ ノ直和部分 (正規イデアル) トナル。次
 = 測度函数 $\beta(E)$ テ 考ヘルトキ $\beta(E) = \text{閉シテ}(0) - \text{全連続}$ ナ
 モノノ全体ヲ $AC(X)$ トスレバ X が *regular* ノトキ $V(X)$
 ノ直和部分 トナル。点函数 トノ関係ニツイテハ X が Bochner
 条件ヲ満足スルトキニハ $AC(X)$ ノ函数が不定積分ヲ表サレ
 ルコトニナル。