



Title	普通ノGreen函數ガ存在シナイトキノ境界値問題 (1027ノ續キ)
Author(s)	佐藤, 常三
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 238, p. 1087-1093
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74983
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1051. 普通, Green 函数が存在シトキノ
境界値問題 (1027ノ續キ)

(豊田理化学研究所化学本研究室)

佐藤 常三

§4. 前表ノ末尾ニ於ケル論法ハ頗ル怪シイ。吾等ヲ
致シスル。マデ $G(x, \xi)$ が對稱ナルケルノ必要十分條件ハ

$$(12) \quad p(\xi) = \gamma \int G(x, \xi) p(x) dx$$

ナリ。コノトキ

$$(13) \quad G^*(x, \xi) \equiv G(x, \xi) - \gamma^{-1} p(x) p(\xi)$$

トオケバ任意ニ對シテ

$$(14) \quad \int G^*(\xi, x) p(x) dx = 0$$

が成立シ、且ツ G^* ト Γ ノ間ニハ Reciprocity が成
立スル。

$$(14) \quad -\lambda \int G^*(\eta, x) \Gamma(x, \xi) dx = -\Gamma(\eta, \xi) + G^*(\xi, \eta)$$

$$\text{但シ} \quad \Phi(y) \equiv (Py)' + Qy, \quad \Phi(p) = 0$$

$G(x, \xi)$ ハ $\Phi(y) = p(x) p(\xi) = 0$ シテ Green 函
数定義ニ依テ作ル Green 函数; $\Gamma(x, \xi)$ ハ

$\Phi(y) \equiv \Phi(y) + \lambda y = p(x) p(\xi) = 0$ 属スル Green
函数ナリ。

扱テルニ微分方程式: $\Phi(y) + \lambda y = 0$ ナリ

Green 函数 $\Gamma^*(x, \xi)$ ト記シ

$$\overline{\Gamma}^*(x, \xi) = \Gamma^*(x, \xi) - \mu^{-1} p(x) p(\xi)$$

相シ

$$p(\xi) = \mu \int \Gamma^*(x, \xi) p(x) dx$$

トオケバ

$$-\lambda \int G^*(\eta, x) \overline{\Gamma}^*(x, \xi) dx = -\overline{\Gamma}^*(\eta, \xi) + G^*(\xi, \eta)$$

ガ成立シ

$$(2) \quad \Gamma(\eta, \xi) = \Gamma^*(\eta, \xi) - \mu^{-1} p(\eta) p(\xi)$$

及ビ

$$\mu = -\lambda$$

(1) = ヲレバ定理 1 = 對應シテ

定理 3 境界値問題:

$$L(y) + \lambda y = 0, \quad R[y; a, b] = 0$$

積分方程式:

$$\varphi(x) = \lambda \int G^*(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$$

トハ $\lambda = 0$ ヲ除イテ互ニ等値的デアール。

次 $G(x, \xi)$, $G^*(x, \xi)$ デ作ル Fredholm 行列ヲ

$D(\lambda)$, $D^*(\lambda)$ トカッベ (ロ) ヲリ

$$\frac{\frac{d}{d\lambda} D^*(\lambda)}{D^*(\lambda)} = -\int \Gamma(x, x) dx = -\int \Gamma^*(x, x) dx + \mu^{-1}$$

今, 便宜上

$$g'(\lambda)/g(\lambda) = -\int \Gamma^*(x, x) dx$$

トオケバ、定理 2 = 對應シテ

定理 4

$$D^*(\lambda) = C_0 \lambda^{-1} g(\lambda), \quad C_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} g(\lambda)$$

(15) λ 及び ν へ $G^*(x, \xi)$ ト $\nu^{-1} \rho(x) \rho(\xi)$ トハ 互ニ = orthogonal テアルカラ

$$(15) \quad D(\lambda) = D^*(\lambda) \left(1 - \frac{\lambda}{\nu}\right)$$

従フテ

$$(16) \quad D^*(\lambda) = \frac{\nu}{\nu - \lambda} D(\lambda) = C_0 \lambda^{-1} g(\lambda)$$

(15) カラ 想像サレルコトハ

$$(17) \quad \Gamma_0(x, \xi) \equiv \Gamma(x, \xi) - \frac{1}{\lambda - \nu} \rho(x) \rho(\xi)$$

ガ $G(x, \xi)$, reciprocal 核トナルコトデアル。即チ

$$(18) \quad -\lambda \int \Gamma_0(x, \xi) G(\xi, y) d\xi = G(x, y) - \Gamma_0(x, y)$$

ガ成立スルデアラウ。

コレハタシカ=成立スル。ソノ証明ハ次ノ如クデアル。

$$\Gamma_0(x, \xi) = \Gamma(x, \xi) + C \rho(x) \rho(\xi)$$

トスレバ

$$-\lambda \int \Gamma_0(x, \xi) G(\xi, y) d\xi$$

$$= -\lambda \int T(x, \xi) G(\xi, y) d\xi - \lambda C P(x) \int P(\xi) G(\xi, y) d\xi$$

$$= -\nu^T P(x) P(y) - T(x, y) + G(x, y) - \lambda C \nu^T P(x) P(y)$$

$$\text{故} = C \text{ 7 シテ } \nu^T + \lambda C \nu^T = C \quad \text{即チ} \quad C = -\frac{1}{\lambda - \nu}$$

トモトコロトレバヨイ。

コレヨリ (15) ガツシカ = 誘導サレル。

(17) = ヲレバ

$$D(\lambda) = D^*(\lambda)(\lambda - \nu) \times \text{const.}$$

$$\text{ツカル} = D(0) = D^*(0) = 1 \text{ デアルカラ}$$

$$D(\lambda) = D^*(\lambda) \left(1 - \frac{\lambda}{\nu} \right)$$

(17) ハ又 (12) ヲ用ヒテ次ノ如ク = カケル。

$$(17') \quad \bar{P}_0(x, \xi) = T^*(x, \xi) + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda - \nu} \right) P(x) P(\xi)$$

以上ノ結果ヨリ (2) ノル條件即チ

$$\int G(x, \xi) P(x) dx = 0$$

ハ Green 函数 $G(x, \xi)$; 建設 = 對シテ何等 essential

ノモノデ + イコトガ命ル。蓋シ重 (y) + $\lambda y = 0 = 0$ 7 ア

ル。

Green 函数 $T^*(x, \xi)$ ガ見出サレル + ラバ $\bar{P}(x, \xi)$ ガ

$$T(x, \xi) = T^*(x, \xi) + \lambda^{-1} P(x) P(\xi)$$

ヲ得ラレ、從ツテ $G^*(x, \xi)$ ガ決定サレ、問題ノ $G(x, \xi)$

ハ算 = $V^{-1} \rho(x) \dot{\rho}(\xi)$ + レ不定項ヲ形式的 = 附加シテ $\Phi =$
 $\lambda \gamma + 1$ 。

§5. Example.

$$\begin{cases} \Phi(y) \equiv y'', & y(-1) = y(1), \quad y'(-1) = y'(1) \\ \rho = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

マヅ $\Phi(y) = \frac{1}{2}$ = ヲツル $Green$ 函数ハ構成定義ヲ

||

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \alpha_1 + \frac{1}{2}(1-\xi)x + \frac{x^2}{4}, & x \leq \xi, \\ \alpha_1 + \xi - \frac{1}{2}(1+\xi)x + \frac{x^2}{4}, & x \geq \xi. \end{cases}$$

(12) = ヲレバ

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} &= \left[\int_{-1}^{\xi} + \int_{\xi}^1 \right] G(x, \xi) dx \\ &= 2\alpha_1 - \frac{\xi^2}{2} + \xi - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(13) = ヲレバ

$$\begin{aligned} G^*(x, \xi) &= G(x, \xi) - \frac{1}{2\gamma} \\ &= \frac{1}{4}(x-\xi)^2 \pm \frac{1}{2}(x-\xi) + \frac{1}{6}, \quad x \leq \xi \end{aligned}$$

§6. (14) = ヲレバ $\Gamma(x, \xi)$ ガ $G^*(x, \xi)$ / $reci-$
 $procal$ 核ヲアルコトカラ

$$G^*(x, \xi) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Gamma(x, \xi)$$

(P) = ヲレバ

$$(18) \quad G^*(x, \xi) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ \Gamma^*(x, \xi) + \lambda^{-1} \rho(x) \rho(\xi) \right\}$$

コレノ興味アル結果デアルト思フ。

Example.

$y'' + \lambda y = 0$, $y(-1) = y(1)$, $y'(-1) = y'(1)$
= 属スル Green 函数ハ $\Gamma^*(x, \xi)$ デアルカラ, コレヲ
求メルト

$$\Gamma^*(x, \xi) = -\frac{1}{2k \sin k} \cos k(x - \xi \pm 1), \quad x \leq \xi$$

(Q) = ヲレバ

$$\Gamma(x, \xi) = -\frac{1}{2k \sin k} \cos k(x - \xi \pm 1) + \frac{1}{2k^2},$$

$$\text{但シ } \lambda = k^2 \quad x \leq \xi$$

$$\text{然ルニ } -\frac{1}{2k \sin k} \cos k(x - \xi \pm 1)$$

$$= -\frac{1}{2k \sin k} \left\{ 1 - \frac{(x - \xi \pm 1)^2}{2} k^2 + \frac{(x - \xi \pm 1)^4}{12} k^4 - \dots \right\}$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2k \sin k} - \frac{1}{2k^2} \right) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k - \sin k}{2k^2 \sin k} = \frac{1}{12}$$

故ニ

$$\lim_{k \rightarrow 0} \Gamma(x, \xi) = -\frac{1}{12} + \frac{(x - \xi \pm 1)^2}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(x-\xi)^2 \pm \frac{x-\xi}{2} + \frac{1}{6}, \quad x \lessgtr \xi$$

$$= G^*(x, \xi)$$

本例ヲ以テ分ルヤウニハマデノ廣義ノ *Green* 函数ヲ
 求ムルニハ、マツ (2)ヲ満足スルヤウニ $G(x, \xi)$ ヲ決定シ、
 再ビ $P^*(x, \xi)$ 又ハ $P(x, \xi)$ ヲ計算シテキルガ、 P^* 又
 ハ P ノ何レカ一ツダケヲ計算スレバ $G(x, \xi)$ ヲ計算ス
 ル必要ハナイ。

コノ考ヘハ亦普通ノ *Green* 函数ノ場合ニモ適用サ
 レル。