OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Weil ノ mass ノアル Abel群ニツイテ
Author(s)	河田, 敬義
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 238, p. 1093-1120
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74984
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1052. Weil ノ Imass ノアル Abel 群ニツイテ

河田 敬義（東京文理大）

Gelfand, Raikov, Krein等ハ ein Kleinen bikompakt + Abel 群，或ハヨリ一般ニ廣義ノ Haar-Imass（小平[1]参照）ヲモツタ topologische Abelsche Gruppe ニ對シテ，Norm 環ト関係セシメテ Charakter ノ理論ヲ展開セル，ソレヲ用ヒテ Positiv definit ナ函數ノ Bochner ノ理論ノ拡張，Plancherel ノ定理

ノ拡張ヲ証明シ，Pontrjagin ノ Dualitätssatz ヲ Strukturssatz ヲ用ヒズニ証明シテヰル。

此処デハ先ヅ之等ノ議論ガ Haar-Mass ノ代リニ Weil-Mass（小平〔1〕，§1 参照）デスベテ成立スルコトヲ注意スル。ソレヲ用ヒレバ，Weil-Mass ヲ Haar-Mass ニスル様ナ Topologie ノ定義ガ Charakter ト密接ニ関聯スル．ソシテ Pontryagin ノ Dualitätssatz ト Banach 空間ノ Regularitätsrelation トガ，形式上同一ノ姿貌ヲ呈スル．（§4）

又 Bochner ノ Positiv definit T函数ノ表現ノ理論ノ拡張ハ嘗ツテガラ Stone ノ定理ノ拡張ヲ許シ，ソレカラ平均エルゴード定理ガ，Weil ノ Mass ノアル Abel 群ヲ Parameter トスル messbar ナ流レニ対シテモ成立スル。（§5）コレハ又 Of ノ上ノ messbar な fastperiodische Funktion ノ平均値ヲ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{m(E)}\int_{E_n} f(x)\,m(dx)$ ＝Mf トシテ表ハス関聯スル．（§5）

脚註

I. Gelfand and D. Raikov, C.R.URSS, 28 (1940), NO.3

D. Raikov〔1〕，同 28(1940). NO.4

M. Krein, 同 30(1941), No.6

D. Raikov,〔2〕, 同 30(1941), NO.7

小平邦彦〔1〕．数物記事 23(1941), NO.2

同　人〔2〕，帝士院記事 17(1941), NO.2

J.v. Neumann, Trans. A.M.S. 36 (1934), §5

§1

$\mathfrak{o}_f$ ヲ Abel 群，$x, y, \cdots\cdots$ デ其ノ元ヲ表ハス．

定義 1 $\mathfrak{o}_f$ ノ上デ定義サレタ regulären äusseres Mass m^* ガ Weil ノ Maso デアルトハ

(i) $m^*(E+a) = m^*(E)$,

(ii) $f(x)$ ガ m^*-messbar ナラバ，$f(x-y)$ ハ $\mathfrak{o}_x \times \mathfrak{o}_y$ ノ Produkt-äusseresmass $m^* \times m^*$ = 関シテ messbar

(iii) $\mathfrak{o}_f = \sum_1^\infty E_n$, $m^*(E_n) < \infty$ トアラハサレル，

(iii) ノ代リニ

(iii′) $A = \bigvee_n A_n$, $B = \bigvee_n B_n$, $m^*(A_n) < \infty$, $m^*(B_n) < \infty$ ナラバ，

$$A - B = \bigvee_n C_n, \quad m^*(C_n) < \infty$$ トアラハサレル．

ガ満足サレルトキニ廣義ノ Weil ノ Mass トイフ．

(注意) (iii′)カラ $-A$, $A+B$ モ同様ナ性質ヲモツコトガワカル．

定義 2 $\mathfrak{o}_f$ ガ im Kleinen bikompakt ナル時 $\Gamma(\mathfrak{o}_f)$ ヲ $(x; \varphi(x) \neq 0)$ ガ total beschränkt トナルヤウナ連續函數 $f(x)$ ノ全体；$\mathfrak{L}(\mathfrak{o}_f)$ ヲ $(x; f(x) > 0)$, $\varphi \in \Gamma(\mathfrak{o}_f)$ ヲ含ム最小ノ Borelmengenkörper トス．$\mathfrak{L}(\mathfrak{o}_f)$ = 屬ス集合ヲ Borel 集合ト呼ブ．

定義 3 $\mathfrak{o}_f$ ガ im Kleinen bikompakt ナル

時，ソノ上ノ regulären äusseres Mass m^* ガ Haar ノ Mass デアルトハ定義 1.1 (i) ノ他ニ

(iv) Borel 集合ハ m^*-messbar，B ガ total beschränkt ナラ $m^*(E) < \infty$.

(v) 任意ノ E ニ対シテ，$B \supset E$，$m^*(E) = m^*(B)$ ナル $B \in \mathfrak{B}(\mathfrak{o})$ ガ存在スル。

H. Cartan ニヨリ Haar ノ Mass ハ常数倍丈ノ違デ一義ニ定マル。

定理 I Haar ノ Mass ハ広義 Weil ノ Mass デアル。

(証) (iii)' ヲ験ベル。$m^*(A) < \infty$，$m^*(B) < \infty$ ナラバ m^* ノ定義ヨリ $A = \bigvee A_n$，$B = \bigvee B_n$，A_n, B_n ハ total beschränkt ニナルヤウニエラベル。一方 $A_n - B_m$ ハ total beschränkt；従ッテ $A - B = \bigvee A_n - B_m$，$m^*(A_n - B_m) < \infty$ トナリ (iii)' ヲ満足スル。

定義 4 μ^* ヲ $\mathfrak{B}$ ノ上デ定義サレタ Caratheodory ノ regulären äusseres Mass トスル。$\mathfrak{o}$ ヲ広義ノ Weil ノ Mass トスルトキ，$\{T_x\}$，$x \in \mathfrak{o}$ ガ $\mathfrak{o}$ ヲ Parameter トスル messbar ナ流レデアルトハ

(i) T_x ハ $\mathfrak{B}$ ノ上ノ 1:1 ノ変換デ，$\mu^*(E) = \mu^*(T_x E)$

(ii) $T_x \cdot T_y = T_{x+y}$，$T_0 = I$

(iii) $f(w)$ が μ^*-messbar ナラバ，$f(T_x w)$ ハ $\mathfrak{o} \times \mathfrak{B}$ ノ上ノ函数トシテ $m^* \times \mu^*$-messbar デアル。

定義1 ニ於テハ $T_x y = y - x$ ハ Of ヲ Parameter トスル Of 上ノ messbar ナ流レデアル。

定義5 $\mathfrak{H}$ 上ノ $\int |f(\omega)|^i \mu(d\omega) < \infty$ ナル f ノ全体ヲ $\mathcal{L}_i(\mathfrak{H})$ $(i=1,2)$ トカク。

定義6 Of 上デ定義サレタアル Banach 空間ノ値ヲトル函数 $F(x)$ ガ Bochner-messbar トハ，任意ノ $m(E)<\infty$ ナル E（Of ノ上デ，殆ンド到ル処0ノ函数（simple function，＝有限箇値函数 endlichwertige Funktion）ノ極限トシテ表ハサレルコトヲイフ。

定理2 $f \in \mathcal{L}_i(\mathfrak{H}) \mid i=1,2)$ ニ対シテ，$\{T_x\}$ ガ Of ヲ Parameter トスル messbar ナ流レナラバ，$F_f(x) = f(T_x \omega)$ ハ Of ノ上デ Bochner-messbar デアル。

(証) (i) $f(\omega) = C_E(\omega)$, E: μ-messbar,
$\mu(E) < \infty$ ノ場合.

今 Of ツA, $m(A)<\infty$, $E^\circ = \{(x,\omega);\ T_x^{-1}\omega \in E, x \in A\}$ トスレバ，E° ハ $m^* \times \mu^*$-messbar トナル。故ニ適当ナ $E_n = \bigvee_1^{r_n} A_i^{(n)} \times B_i^{(n)}$, $A_i^{(n)} \subset A$, $m(A_i^{(n)}) < \infty$, $\mu(B_i^{(n)}) < \infty$ ヲトリ，$m \times \mu(E^\circ \sim E_n) \to 0$ ナラシメルコトガ出来ル。コニ $A \sim B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ トス。即チ $F_n(x) = \sum_1^{r_n} C_{A_i^{(n)}}(x) \cdot C_{B_i^{(n)}}(\omega)$ ハ A ノ上ノ単函数デ，A上殆ンド数ルトコロ $\| F_f(x) - F_n(x) \| \to 0$ トナル。即チ $F_{C_E}(x)$ ハ Bochner-messbar デアル。

(ii) $f(\omega)$ ガ単函数ノ場合

(iii) 一般ノ $f \in \mathcal{L}_1(\mathfrak{A})$ ニ對シテ $\|f_n\| < \infty$,
$\|f(\omega) - f_n(\omega)\| \to 0$ $(n \to \infty)$ ナル單函數ノ列ヲトルコトが出來ル。T_x ハ Mass ヲカヘナイカラ, $\|F_f(x) - F_{f_n}(x)\|$
$= \|f - f_n\| \to 0$, 即チ F_f ハ Bochner-mesibar デアル。

系 1 $\mathfrak{A}$ が Weil ノ Mass, 即チ $\mathfrak{A} = \sum_1^\infty A_n$, $m(A_n) < \infty$ ナル時。$[T_x f ; x \in \mathfrak{A}]$ ハ $\mathcal{L}_1(\mathfrak{A})$ 中 separabel デアル。

系 2 L ヲ $\mathcal{L}_1(\mathfrak{A})$ 上, lineare Funktional トスレバ $L(F_f(x))$ ハ x ノ messbar ナ函數デアル. 特ニ $\|F_f(x)\|$ ハ messbar.

定義 7 $\chi(y)$ が $\mathfrak{A}$ ノ messbar な Character デアルトハ, $|\chi(y)| = 1$, $\chi(y+z) = \chi(y) \cdot \chi(z)$ ヲ滿足スル messbar ナ函數ヲイフ. χ ノ全体ヲ $\mathfrak{X}$ トス.

定義 8 $\mathfrak{A}$ 上ノ messbar ナ函數 $\varphi(x)$ が positiv definit トハ.

(i) $\text{ves. max} |\varphi(x)| < \infty$

(ii) $\varphi(x) = \overline{\varphi(-x)}$,

(iii) 任意ノ $g(x) \in \mathcal{L}_1(\mathfrak{A})$ ニ對シテ

$$\iint \varphi(x-y)\, g(x)\, \overline{g(y)}\, m(dx)\, m(dy) \geqq 0$$

ナルコトヲイフ。

§ 2

$\mathfrak{A}$ ヲ abel 群, m ヲ前義ノ Weil, Mass, $m(x) = 0$,

$m(\mathfrak{o}f)=\infty$ トス。

$\mathfrak{L}_1(\mathfrak{o}f)\ni f$ ニ対シテ

(1) $\|f\|=\int|f(x)|\,m(dx)$

(2) $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{o}f)\ni f,g$ ニ対シテ

$$f\times g(x)=\int f(x-y)\,g(y)\,m(dy)$$

トスレバ、$f\times g\in\mathfrak{L}_1(\mathfrak{o}f)$ デ

(3) $\|f\times g\|\leqq\|f\|\cdot\|g\|$

トナル。何トナレバ $A=(x;f(x)\neq0)$, $B=(x;g(x)\neq0)$, $C=A+B$ トスレバ、夫々 Mass 有限ナ集合ノ可算個ノ和トシテアラハサレルカラ、$C\times B$ デ $f(x-y)g(y)$ ニ対シテ Fubini ノ定理ヲ適用スレバヨイ。

$\mathfrak{R}=(\mathfrak{z};\mathfrak{z}=\lambda e+f,\ f\in\mathfrak{L}_1(\mathfrak{o}f)$ トシ

(4) $\|\mathfrak{z}\|=|\lambda|+\|f\|$

(5) $(\lambda_1e+f_1)\times(\lambda_2e+f_2)=\lambda_1\lambda_2e+(\lambda_2f_1+\lambda_1f_2+f_1\times f_2)$

ニヨリ、e ヲ単位元トスル Norm 環ヲ作ル。

定理3 X ヲ χ ニ対シテ

(6) $\varphi_{\mathfrak{z}}(X)=\lambda+\int f(y)\,\overline{\chi(y)}\,m(dy)$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ Ring homomorphismus ヲ與ヘル。$M_\chi=(\mathfrak{z};\varphi_{\mathfrak{z}}(X)=0)$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ Maximales Ideal トナル。又 $M_0=(\mathfrak{z};\mathfrak{z}=\lambda e)$ モ $\mathfrak{R}$ ノ Maximales Ideal ヲナス。

定理4 $\mathfrak{R}$ ノ $M\neq M_0$ ナル Maximales Ideal ニ対シテ $\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}/M$ デ $\mathfrak{z}$ ニ対応スル値ヲ $(\mathfrak{z},M)$ トスレバ、$(f,M)\neq0$ $(f\in\mathfrak{L}_1(\mathfrak{o}f))$ ナル任意ノ f ニ対シテ

(η) $\chi(y) = \dfrac{(F_f(y), M)}{(f, M)}$, $F_f(y) = f(x+y)$

ハ $\mathfrak{G}$ ノ messbar + charakter トナル. 且ツ f ノトリ方ニ無関係デアル.

シカモ $M \neq M_0$ ニ対シテ, $M = M_x$ ナル x ハ一義ニキマル. (δ), (η) ハ $M \neq M_0$ トχトノ間ノ互ヒニ逆ノ数應トナル.

(注意) (η) ノ χ(y) ガ y ニツイテ messbar ナルコトニ定理2, 系2ヲ用フ.

$\mathfrak{R}$ ノ Maximales Ideal 全体ヲ $\mathfrak{M}$ トスル. $\mathfrak{M}$ ハ bikompakt デ, (f, M) ハ $\mathfrak{M}$ 上ノ連續函數デアル. 特ニ $(f, M_x) = \varphi_f(\chi)$, $(f, M_0) = 0$; 故ニ $\varphi_f(x)$ ハ M_0 デ0トナル $\mathfrak{M}$ 上ノ連續函數ト見做スコトガ出來ル.

X ヲ $\mathfrak{M} - M_0$ ト identifizieren スレバ $(\chi \leftrightarrow M_x)$ X ハ im Kleinen bikompakt, M_0 ニ對シテ無限遠点 χ_∞ ヲ考ヘレバ $\chi \to \chi_\infty$ デ $\varphi_f(x) \to 0$ トナル. 且ツ X ノ Topologie ハ $f_i \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{G})$ ニヨリ

(ε) $U(\chi_0; f_1, \cdots\cdots, f_n, \varepsilon)$

$$= \left(\chi; \left| \int f_i(y)\overline{\chi(y)}\, m(dy) - \int f_i(y)\overline{\chi_0(y)}\, m(dy) \right| < \varepsilon, \right.$$

$$\left. i = 1, \cdots\cdots, n \right)$$

ヲ Umgebungssystem トシテ決定サレル.

$g = \lambda e + f(x)$ ニ對シテ $g^* = \overline{\lambda} e + f^*$; $f^*(x) = \overline{f(-x)}$ トスルト

(9) $\varphi_{\bar{f}}(\chi) = \overline{\varphi_f^*(\chi)}$

ヲ満足スル。従ッテ $\{\varphi_f(\chi);\ f \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{o})\}$ = ヨッテ $g(\chi) \to 0$ ($\chi \to \chi_\infty$) ナル X 上ノ連續函數 $g(\chi)$ ヲ一樣ニ近似スルコトガ出來ル。

定理5 $\chi(y)$ ハ y ヲトメレバ X 上ノ連續函數デアル。

(証) X コト ヲ total beschränkte offene Menge トスレバ，近似定理カラ $\varphi_f(\chi) > \frac{1}{2}$，$\chi \in$ ナル $f \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{o})$ ガアル．故ニ $\chi(y) = \varphi_f(x)^{-1} \cdot \varphi_{F_f(y)}(\chi)$ ハ $\chi \in$ デ stetig デアル。——

定理6 $\mathfrak{o}$ ガ im Kleinen bikompakt，m ガ Haar ノ測度デアルトキハ，$\chi(y)$ ハ $\mathfrak{o} \times X$ 上デ連續，且ツ (8) ノ Topologie ハ $\mathfrak{o}$ ヲ A: bikompakte Menge デ

(9) $U(\chi_0;\ A,\ \varepsilon) = (\chi;\ |\chi(y) - \chi_0(y)| < \varepsilon,\ y \in A)$

デ與ヘラレル Umgebungssystem äquivalent デアル。

(証) (8) ガ (9) ヨリ弱イコトハ容易デアルガ，逆ノ方ハ定理5ノ証明デワカル様ニ $\chi(y)$ ガ $\mathfrak{o} \times X$ デ stetig ナルカラ導クコトガ出來ル。

今度ハ m ヲ $\mathfrak{o}$ ノ Weil ノ Mass トスル。$\mathfrak{M}$ 上ノ連續函數全体ノ作ル C-空間ヲ $C(\mathfrak{M})$ トスル。尤ヨリカラ $(\mathfrak{z}, M)$，$M \in \mathfrak{M}$ ヲ作レバ $C(\mathfrak{M})$ ニ屬ス。$(\mathfrak{z}, M)$ ハ $C(\mathfrak{M})$ 中 dicht デアッテ。

定理7 $\varphi(x)$ ヲ $\mathfrak{G}$ 上ノ positiv definit ナ函数トスル。且ツ wes. $\max|\varphi|=1$ トス。

(10) $L(\xi)=\lambda+\int \varphi(x) f(x)\, m(dx)$

ハ $C(\mathfrak{M})$ 全体ニ拡大サレテ（一義ニ），ソコデ positiv linear デアル：

1) $L(\psi(M))\geqq 0$ für $\psi(M)\geqq 0$, $\psi(M)\in C(\mathfrak{M})$

2) $|L(\psi(M))|\leqq \|L\|\cdot \max|\psi(M)|$, $\|L\|=1$

3) $L(\xi^*)=\overline{L(\xi)}$.

(証) Raikov, [1] 参照。其処デ total beschränkte offene Menge U ヲ用ヒテキルトコロデハ $U=U(0; f_1,\cdots\cdots f_n, \varepsilon)=(y; \|Ff_i(y)-Ff_i(0)\|<\varepsilon, i=1,\cdots\cdots,n)$ ヲ用ヒレバ，$\infty>m(U)>0$ デ，且ツ求ムル役ニ間ニ合フ。

（小平：105頁参照）之レニハ定理2，系1ヲ用ヒル。ソレニハ m ガ (iii)′ デナク (iii) デアルコトガ必要ノ様デアル。——

定理8 m ヲ $\mathfrak{G}$ ノ Weil ノ Mass トスル。$\varphi(x)$ ガ positiv definit ナラバ，適当ナ $\mathcal{L}(X)$ 上ノ Lebesgue-Mass μ_φ ガアッテ

(11) $\varphi(x)=\int_X \chi(x)\,\mu_\varphi(d\chi)$

ガ $\mathfrak{G}$ 上始ンド到ル処成立スル。且ツカカル μ_φ ハ只一通リシカナイ。$\chi(y)$ ハ $\mathcal{L}(X)$-messbar トハ限ラナイガ，μ ヨリ作ッタ X 上ノ äusseres Mass μ^* ニ対シテ μ^*-mess-

bar デアル。

(証) m が separabel im Kleinen kompakt + $\mathfrak{o}_f$ ノ Haar-Mass デナイトキハ注意ヲ要スル。コンデ可算ニ証明シヨウ。$\Gamma(X)$ ヲ $\psi(\chi)$ ニ対シヲ定理ヲノ $L(\psi)$ が positiv linear, $\|L\|=1$ カラ

$$(12)\quad L(\psi)=\int_X \psi(\chi)\,\mu(d\chi),\quad \psi\in\Gamma(X)$$

+ル $\mathfrak{L}(X)$ ノ上ノ Lebesgue-Mass μ が存在シテ一義ニ定マル。コノ $\mu(E)\geqq 0$, $\mu(X)=1$

補題2 μ カラ X 上 regulären äusseres Mass μ^* ヲ定義スルト messbar + Charakter $\chi(y)$ ハ $\mathfrak{o}_f\times X$ 上 $m^*\times\mu^*$- messbar デアル。

之レヲ用ヒルト，任意ノ $f(y)\in\mathfrak{L}_1(\mathfrak{o}_f)$ ニ対シテ $f(y)\chi(y)$ ハ $\mathfrak{o}_f\times X$ ノ上デ $m^*\times\mu$- messbar デアルカラ，Fubini ノ定理ニヨリテ

$$\iint f(y)\overline{\chi(y)}\,m(dy)\,\mu(d\chi)$$

$$=\int\left(\int f(y)\overline{\chi(y)}\,m(dy)\right)\mu(d\chi)$$

即チ $\varphi_f(\chi)$ ハ μ^*- messbar デ，$\int\varphi_f(\chi)\,\mu(d\chi)$ が存在スル。次ニ一般ニ

$$(13)\quad L(\varphi_f)=\int\varphi_f(\chi)\,\mu(d\chi)$$

ヲ証明スル。先ヅ $\chi\to\chi_\infty$ トラバ $\varphi_f(\chi)\to 0$ ヨリ X ノ三：bikompakt, $|\varphi_f(\chi)|<\varepsilon$ für $\chi\neq\chi_\infty$ 三

ヲ選ブ。次ニ $\psi_{\Xi}(\chi) \in \Gamma(\chi)$ ヲ $0 \leqq \psi_{\Xi}(\chi) \leqq 1$,
$\psi_{\Xi}(\chi) = 1$ für $\chi \in \Xi$ トル如ク選ブ. 一方デハ
$|\varphi_f(\chi) - \varphi_f(\chi)\cdot\psi_{\Xi}(\chi)| < \varepsilon$ カラ $|L(\varphi_f - \varphi_f\psi_{\Xi})|$
$< \|L\|\cdot\varepsilon = \varepsilon$, 他方デハ

$$\left|\int \varphi_f - \varphi_f\psi_{\Xi}\,\mu(d\chi)\right| \leqq \varepsilon\cdot\mu(X) = \varepsilon.$$

此処デ $\varepsilon \to 0$ トスレバ (12) カラ (13) ヲ得ル。サテ Fubini
ノ定理カラ

$$\int \varphi(x) f(x)\, m(dx) = L(\varphi_f)$$

$$= \int\left(\int f(y)\overline{\chi(y)}\, m(dy)\right)\mu(d\chi)$$

$$= \int\left(\int \overline{\chi(y)}\,\mu(d\chi)\right) f(y)\, m(dy)$$

$f \in \mathcal{L}_1(\mathfrak{o}_f)$ ハ勝手デアッタ. 故ニ $\mathfrak{o}_f$ 上殆ンド到ル処 (1) ガ
成立スル。但シ $\mu_g(E) = \mu(-E)$ トス。此処デ

補題ノ証明. $\Xi = (\chi; \varphi_f(\chi) \neq 0)$ トスレバ,

$\chi(y) = (\varphi_f(x))^{-1}\varphi_{F_f(y)}(\chi)$ カラ, 定理2, 系2ニヨリ

$\chi(y)$ ハ $\mathfrak{o}_f \times \Xi$ 上 χ ニ就テ連続, y ニ関シテ m^*-messbar
デアル. 今 X ノ Ξ_n: bikompakt,

$|\varphi_f(\chi)| < \frac{1}{n}$ für $\chi \notin \Xi_n$ トシ, 上ノ如ク $\Gamma(\chi)$ ヨリ ψ_{Ξ_n} ヲ
選ベバ, $|\varphi_{F_f(y)}(\chi)| = |\varphi_y(\chi)|$ デアルカラ
$|\varphi_{F_f(y)}(\chi) - \varphi_{F_f(y)}(\chi)\psi_{\Xi_n}(\chi)| \to 0$ $(n \to \infty)$,

$\varphi_{F_f(y)}(\chi)\psi_{\Xi_n}(\chi) \in \Gamma(X)$ トナル．一方 $\varphi_{F_f(y)}(\chi)\cdot\psi_{\Xi_n}(\chi)$ ハ $\mathfrak{o}_f \times X$ 上 $m^* \times \mu^*$-messbar デアルカラ，ソノ極限トシテ $\varphi_{F_f(y)}(\chi)$，即チ $\chi(y)$ ハ $\mathfrak{o}_f \times \Xi$ 上 $m^* \times \mu^*$-messbar デアル．

$\mu(X)=1$ ヨリ $X \supset A = \sum_1^\infty \Xi_n$, Ξ_n: bikompakt, $\mu(X-A)=0$ トナル A ガ存在スル．

各 Ξ_n ニ対シテ $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{o}_f)$ ヨ f_n ヲシテ $1 \geqq \varphi_{f_n}(\chi) \geqq 0$, $\varphi_{f_n}(\chi) > \frac{1}{2}$ für $\chi \in \Xi_n$ ニ f_n ヲ選ブ．$\sum \alpha_n \|f_n\| < \infty$, $\alpha_n > 0$ ニ α_n ヲトッテ $f = \sum_1^\infty \alpha_n f_n \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{o}_f)$ トスレバ，$\varphi_f(\chi) > 0$ für $\chi \in A$ トナル．ヨッテ $\chi(y)$ ハ $\mathfrak{o}_f \times A$ 上，即チ $\mathfrak{o}_f \times X$ 上 $m^* \times \mu^*$-messbar トナル．——

補題カラ Fubini ノ定理ニヨッテ殆ンドスベテノ y ニ対シテ $\chi(y)$ ハ μ^*-messbar デアル．一方定理5ノ証明ヨリ $\|F_f(x)-F_f(y)\| > 2|\chi(x)-\chi(y)|$ für $\chi \in \Xi$ トナルコトカラ，$m(x; \|F_f(x)-F_f(y)\| < \varepsilon) > 0$ ニヨリ，カヽル除外ハ実際ハ存在シナイコトガ分ル．

§ 3

次ノ§ヘノ準備トシテ，X ヲ一般ニ abstrakter Raum, $\mathfrak{L}(X)$ ヲーツノ Borel-mengenkörper トスル．$\mathfrak{h}$ ヲ或ル Hilbert 空間トス．

定義9 $\mathcal{L}(X)$上ノ mass operator $\{P(E)\}$ トハ，h_f 上ノ Projektionsoperator ノ系リデ

(i) $P(X)=I$

(ii) $\mathcal{L}(X)$ヲ E_i, $E_1\cdot E_2=0$ ナラバ $P(E_1)\cdot P(E_2)=0$,

$P(E_1+E_2)=P(E_1)+P(E_2)$

(iii) $\mathcal{L}(X)$ヲ E_n, $E_1\subset E_2\subset\cdots\cdots$, $\lim E_n=E_0$ ナラバ, $\lim P(E_n)=P(E_0)$

ヲ満足スルヲイフ。

任意ノ $f\in h_f$ ニ對シテ

(14) $m_f(E)=\|P(E)f\|^2$, $E\in\mathcal{L}(X)$

ハ普通ノ Lebesgue-mass トナル。

今 $\psi(x)$ヲ X上ノ $\mathcal{L}(X)$-messbar ナ函數，又ハ一般ニ m_f^*-messbar ナラバ

(15) $$g=\int\psi(x)\,dp(E)f$$

ヲ次ノ様ニ定義サレル。$\Delta=(E_1,\cdots\cdots,E_n)$, $E_i\cdot E_j=0$ $(i\neq j)$, $X=E_1+\cdots\cdots+E_n$ ニ對シテ $Osc(\psi,E_i)=\overline{fin}_{x,y\in E_i}|\psi(x)-\psi(y)|$, $\sum Osc(\psi,E_i)\cdot\|P(E)f\|^2$ ノ最小ナル Δ ガ存在スル，ヨッテ $\varepsilon\to0$ ニ對シテ Δ_n ナル次々ノ Verfeinerung Δ_n ナラバ

$$\lim_{(Stark)}\sum_1^{r_n}\psi(x_i)P(E_i^{(n)})f=g.$$

$$\Delta_n=(E_1^{(n)},\cdots\cdots,E_{r_n}^{(n)})$$

ガ成立スル。コノ g ヲ (15) ノ g ト定義スル。

定理9

(i) $\left\| \int \psi(x)\, dP(E) f \right\|^2 = \int |\psi(x)|^2 d \| P(E) f \|^2$

(ii) $\left(\int \psi(x)\, dP(E) f, g \right) = \int \psi(x)\, d(P(E) f, g)$

(iii) $\int \alpha_1 \psi_1(x) + \alpha_2 \psi_2(x)\, dP(E) f$

$= \alpha_1 \int \psi_1(x)\, dP(E) f + \alpha_2 \int \psi_2(x)\, dP(E) f$

(iv) $|\psi_n(x)| < C$, $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$, $\lim \psi_n(x) = \psi(x)$

が m_f-fast überall ナラバ

$$\lim_{\text{stark}} \int \psi_n(x)\, dP(E) f = \int \psi(x)\, dP(E) f$$

次ニ Y 上デ $\mathfrak{L}(Y)$ ナル Borel-mengenkörper ト，ソノ上ノ Lebesgue-mass μ，$\mu(Y) < \infty$ トガ与ヘラレテヰルモノトスル。

補題2 有界ナ $\psi(x, y)$ ガ $X \times Y$ 上任意ノ $f \in \mathfrak{h}$ ニ對シテ $m_f^* \times \mu^*$-messbar ナラバ，

$\int \psi(x, y)\, dP(E) f = F(y) \in \mathfrak{h}$ ハ $\mathfrak{L}(Y)$ ニ關シテ Bochner-messbar デアル。

(証) (i) $\psi(x, y) = C_E(x, y)$，E : $m_f^* \mu^*$-messbar ナル場合。

$$E_n = \sum_1^{r_n} A_i^{(n)} \times B_i^{(n)},\quad A_i^{(n)} \in \mathfrak{L}(X),\ B_i^{(n)} \in \mathfrak{L}(Y),$$

$$m_f^* \times \mu^* (E \sim E_n) \longrightarrow 0$$

トスレバ

$$\int C_{E_n}(x,y)\,dP(E)f=\sum_1^{r_n} C_{B_i^{(n)}}(y)\cdot P(A_i^{(n)})f$$

ハ

単函数，従ッテ

$$\left\|\int C_E(x,y)\,dP(E)f-\int C_{E_n}(x,y)\,dP(E)f\right\|^2$$

$$=\int\left|C_E(x,y)-C_{E_n}(x,y)\right|^2 d\|P(E)\|^2=m_f^*(x;$$

$E\sim E_n\ni(x,y))\longrightarrow 0$（Y上殆ンド到ル処）．即チ

$\int C_E(x,y)\,dP(E)f$ ハ Y上 $B(Y)$-Bochner-messbar

デアル。

(ii) $\psi(x,y)$ が単函数ノ場合

(iii) 一般ノ場合．$|\psi(x,y)-\psi_n(x,y)|<\frac{1}{n}$，$\psi_n$：単函数トスル。

$$\left\|\int\psi(x,y)\,dP(E)f-\int\psi_n\,dP(E)f\right\|^2$$

$$=\int|\psi-\psi_n|\,dm_f(E)\to 0$$ ヨリ $\int\psi(x,y)\,dP(E)f$ ハ

$L(Y)$-Bochner-messbar. デアル。

定理10 $\psi(x,y)$ が有界，且ッ $m_f^*\times\mu^*$-mess-bar ナラバ

$$\int\left(\int\psi(x,y)\,\mu(dy)\right)dP(E)f$$

$$=\int\left(\int\psi(x,y)\,dP(E)f\right)\mu(dy)$$

(証) 右辺が意味ノアルコトハ補題2ト

$\|\int \psi\, dP(E) f\|^2 \leqq \overline{fin}\, \psi^2 \cdot \|f\|^2$ ヨリ.

(i) $\psi(x,y) = C_E(x,y)$, E が $m_f^* \times \mu^*$-measbar

ナル場合.

上ノ如ク E_n ヲトル. 定理中 $\psi = C_{E_n}(x,y)$ トスレバ

$$\text{左辺} = \int \sum_1^{r_n} C_{A_i^{(n)}}(x) \cdot \mu^*(B_i^{(n)}) = \sum_1^{r_n} \mu^*(B_i^{(n)}) \cdot P(A_i^{(n)}) f$$

$$= \text{右辺}$$ デアル. $n \to \infty$ トスレバ

$$\|\int \Big(\int C_E(x,y)\, \mu(dy) \Big) dP(E) f$$

$$- \int \Big(\int C_{E_n}(x,y)\, \mu(dy) \Big) dP(E) f \|^2$$

$$= \int \mu^{*2}(y; E \sim E_n \ni (x,y))\, d\|P(E) f\|^2 \longrightarrow 0,$$ 及ビ

$$\|\int \Big(\int C_E(x,y)\, dP(E) f \Big) \mu(dy)$$

$$- \int \Big(\int C_{E_n}(x,y)\, dP(E) f \Big) \mu(dy) \|$$

$$\leqq \int m_f^{*\frac{1}{2}}(x; E \sim E_n \ni (x,y))\, \mu(dy) \longrightarrow 0$$ ヨリ定理ヲ得

(ii) 単函数ノ場合.

(iii) 一般ノ場合

サテ Ω ヲ Weil, mass m^* ヲモツ abel 群, $\{T_x\}$ ヲ (Ω, μ) 上ノ Ω ヲ Parameter トスル measbar + 流レトスル. $h_y = L_2(\Omega)$ トス.

定理11 $f \in h_y$ ニ對シテ $U_x f = f(T_x \omega)$ トオケ

バ，$\mathfrak{o}_f$ ノ Charakterengruppe X ノ Borel 集合ノ全体 $\mathfrak{h}(X)$ 上ノアル Massoperator $P(E)$ ニヨッテ

$$U_y f = \int \chi(y)\, dP(E)\, f, \quad f \in h_y$$

トアラハサレル。

(註) Hopf, Ergodentheorie 19 頁ト全ク同様ニ定理 8 ヲ用ヒテ或ル $\mathfrak{h}(X)$ 上ノ Massoperator $P(E)$ ニヨリ

$$(16)\quad (U_y f, g) = \int \chi(y)\, d(P(E) f, g), \quad f, g \in h_y$$

ト表ハサレル。但シ f, g ノ選ビテ m^*-Mass 0 ノ y-Menge ヲ除イテ。実際カカル除外ノ十イコトハ，定理 2 系ノニヨリ Hopf，頁ト同様（小平〔2〕参照）之レカラ定理 (9)，(ii) ニヨリ (16) ヲ得ル。

§ 4

今度ハ $\mathfrak{o}_f$ ヲ Weil ノ Mass m ヲモッ abel 群トシ $U_x f$, $f \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{o}_f)$ ヲ $U_{xy} = F_f(xy) = f(x+y)$ トスル。コレハ $T_y x = x+y$ ヲ $\mathfrak{o}_f$ ヲ Parameter トスル $\mathfrak{o}_f$ ノ上ノ mess-bar ナ流レト見タノデアルカラ，定理 11 ハ成立スル。之ヨリ

定理 12 (v. Neumann). $U_x = I$ トナル x ノ全体ヲ $\mathfrak{x}$ トスレバ，$\mathfrak{x}$ ハ $\mathfrak{o}_f$ ノ Untergruppe デアル。$x \neq y$ ($\mathfrak{x}$) ナルタメノ必要十分条件ハ $\chi(x) \neq \chi(y)$ ナ

ル messbar + Charakter ノ存在スルコトデアル。

サテ $\mathfrak{o}_f$ ノ Charakterengruppe X ハ im Kleinen bikompakte Gruppe デアルカラ Haar-Mass μ ヲモチ，従ッテ §2 ノ結果ガ成立スル。$y(\chi)=\chi(y)$, $y\in\mathfrak{o}_f$ ハ X ノ Charakter トモナルガ，補題2ト同様ニ X ノ上ノ u^*-messbar デアル。コッテ X ノ messbar + Charakter ノ全体ヲ $\overline{\mathfrak{o}_f}$ トスレバ，$\overline{\mathfrak{o}_f}$ ッ $\mathfrak{o}_f/\mathfrak{p}$ ト考ヘラレル。$\overline{\mathfrak{o}_f}$ ノ Topologie カラ induzieren サレル Topologie ハ

(i) $U_1(x;f_1,\cdots\cdots,f_n,\varepsilon)$ $(f_1,\cdots\cdots,f_n\in\mathfrak{L}_1(X))$

$$=\left(y;\left|\int f_i(\chi)\overline{x(\chi)}\,\mu(d\chi)-\int f_i(\chi)\overline{y(\chi)}\,\mu(d\chi)\right|<\varepsilon,\ i=1,2,\cdots\cdots\right)$$

デハ

(ii) $U_2(x;\equiv,\varepsilon)$ （$\equiv$: bikompakt）

$$=\left(y;\ |y(\chi)-x(\chi)|<\varepsilon,\ \chi\in\equiv\right)$$

デ与ヘラレル。ソノ他ニ m ガ $\mathfrak{o}_f$ ノ Weil ノ Mass デアルカラ Weil-ホ平ノ Topologie ガ

(iii) $U_3(x;f_1,\cdots\cdots,f_n,\varepsilon)$ $(f_1,\cdots\cdots,f_n\in\mathfrak{L}_2(\mathfrak{o}_f))$

$$=\left(y;\int|f_i(x+z)-f_i(y+z)|^2m(dz)<\varepsilon,\ i=1,\cdots\cdots,n\right)$$

ガアル。

定理13 (i), (ii), (iii) ノ三ツノ $\mathfrak{o}_f$ ノ Umgebungssystem ハ互ニ äquivalent デアル。

(証) (i), (ii) ; äquivalent ナルコトハ定理 6 ヨリ。
(ii) ト (iii) ; äq. ナルコトノ証明。

今 $U_3(x; f_1, \cdots\cdots, f_n, \varepsilon)$ ガ巣ヘラレタトスレバ，各 f_i ニ対シテ X ツ $\equiv_i$: bikompakt デ $\|P(\equiv_i^c) f_i\|^2 < \varepsilon_1$ $(i = 1, \cdots\cdots, n)$ ナラシメ，$\equiv = \equiv_1 \dot{\cup} \cdots\cdots \cup \equiv_n$ トオル。

今 $y \in U_2(x; \equiv, \varepsilon_2)$ ヲトレバ $U_x f = \int \chi(\alpha)\, dP(E) f$ ニヨッテ

$$\| U_x f_i - U_y f_i \|^2$$

$$\leqq \int_{\equiv} |\chi(x) - \chi(y)|^2 d \| P(E) f_i \|^2 + 2 \| P(\equiv^c) f_i \|^2$$

$$\leqq \varepsilon_2^2 \| f_i \|^2 + 2\varepsilon_1$$

ヨッテ $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3}$, $\varepsilon_2^2 = \frac{\varepsilon}{3}(\| f_1 \|^2 + \cdots\cdots + \| f_n \|^2)$ トスレバ

$$U_2(x; \equiv, \varepsilon_2) \subset U_3(x; f_1, \cdots\cdots, f_n, \varepsilon)$$

トナル。

逆ニ $U_2(x; \equiv, \varepsilon)$ ヲ巣ヘルト定理 5 ノ証明ニヨリ $f \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{o})$ ヲ適当ニトレバ

$$|\chi(y) - \chi(x)| \leqq \frac{1}{2} \int |f(x+z) - f(z+y)|\, m(dz), \quad \chi \in \Xi$$

ナラシメルコトガ出来ル。更ニソノ f ヲ

$$\int |f(x) - f_0(x)|\, m(dx) < \frac{1}{4}, \quad f_0 \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{o}) \cap \mathfrak{L}_2(\mathfrak{o}).$$

且ツ $(x; f_0(x) \neq 0) = E$ ガ $m(E) < \infty$ ナル様ニトレバ

$$|\chi(y)-\chi(x)| \leqq \frac{1}{4}\int |f_0(x+z)-f_0(y+z)|\, m(dz)$$

$$\leqq \frac{1}{4}\left\{\int |f_0(x+z)-f_0(y+z)|^2 m(dz)\right\}^{\frac{1}{2}}, \chi(2m(E))^{\frac{1}{2}},$$

$\varepsilon \in \equiv$

ヨッテ $\varepsilon_1 \times \dfrac{(2m(E))^{\frac{1}{2}}}{4} < \varepsilon$ ニトレバ

$U_3(x; f_0, \varepsilon_1) \subset U_2(x; \equiv, \varepsilon)$ トナル. q.e.d.

系 (v. Neumann). $\mathcal{L}_2(\mathfrak{G})$ ガ separabel ナラバ, U_3 ノ Topologie デ $\mathfrak{G}$ ハ separabel デ $x_n \to x$ ナルタメノ必要十分條件ハ各 $\chi \in X$ ニ對シテ $\chi(x_n) \to \chi(x)$ ナルコトデアル.

Krein [1] ノ Plancherel ノ定理ヲ用ヒタ Raikov [2] ノ結果ニヨレバ, $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ハ $\overline{\mathfrak{G}}$ 中 überall dicht. 即 Weil-小平ノ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ノ im Kleinen bikompakte Gruppe ヘノ Einbettung ハ定理13ニヨリ X ノ messbare Charakter ノ群 $\overline{\mathfrak{G}}$ ヘノ Einbettung ニ他ナラナイ。Weil ノ Mass ヲ Haar-Mass ニスル Topologie ガ messbare Charakter ニヨリ (i) 又ハ (ii) ノ兩デアラハサレルコトヘ, Banach 空間ノ regulär ナルコトニ比ベテ見ルト面白イ。

(i) $\mathcal{L}$: Banach 空間 : $f, g, \cdots$ (ii) $\mathfrak{G}$: Gruppe : $x, y, \cdots$

(ii) Norm $\|f\|$ (ii) Weil ノ Mass $m^*(E)$

(iii) lineare Funktional L (iii) messbar Charakter χ

(iv) konjugierter Raum $\overline{\mathfrak{L}}$.

(v) $\mathfrak{L}$ / konj. Raum $\overline{\mathfrak{L}}$

(vi) schwache Topologie von $\mathfrak{L}$,

(vii) $\mathfrak{L} = \overline{\overline{\mathfrak{L}}}$ ナルタメノ條件ハ $\mathfrak{L}$ ノ單位球ガ schwache Topologie デ bikompakt

(viii) $\mathfrak{L}$ ガ separabel ナラバ $\mathfrak{L} = \overline{\overline{\mathfrak{L}}}$ ナルタメノ條件ハ $\mathfrak{L}$ ノ單位球ガ schwache kompakt ナルコト。

(iv) Charakterengruppe $\mathfrak{X}$

(v) $\mathfrak{X}$ / char. gr. $\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{f}}$

(vi) $\mathfrak{o}\mathfrak{f}$ / Topologie (i)(ii)

(vii) $\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{f}} = \mathfrak{o}\mathfrak{f}/\mathfrak{N}$ ナルタメノ條件ハ (i)(ii) ノ Topologie デ im Klein bikompakt.

(viii) $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{o}\mathfrak{f})$ ガ separabel ナラバ $\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{f}} = \mathfrak{o}\mathfrak{f}/\mathfrak{N}$ ナルタメノ條件ハ $\{\mathfrak{X}(\mathfrak{A}_n)\}$ ガ各 $\mathfrak{X} \in \mathfrak{X}$ デ基本列ナラバ $\mathfrak{X}(\mathfrak{A}_n) \to \mathfrak{X}(\mathfrak{A})$ ナル $\mathfrak{A} \in \mathfrak{o}\mathfrak{f}$ ノ存在スルコト。

§5

定理14 m ヲ $\mathfrak{o}\mathfrak{f}$ ノ上ノ invariant ナ Mass m トスル。今アル m-messbar ナ集合 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots\cdots$, $m(E_n) < \infty$ ヲ適當ニトレバ，任意ノ $\mathfrak{o}\mathfrak{f}$ ヲ $\mathfrak{A}$ ニ對シテ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(E_n)} m\left(E_n \sim (E_n + \mathfrak{A})\right) = 0 \tag{17}$$

デアッタトスル。然ラバ任意ノ $\mathfrak{o}\mathfrak{f}$ ノ上ノ messbar ナ fast periodische Funktion $f(\mathfrak{x})$ ニ對シテ

(18) $$Mf = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} f(x)\, m(dx)$$

トナル。

(証) Mf ノ定義ヨリ，任意ノ ε ニ對シテ $\sum a_i, \alpha_i > 0$ $(i = 1, \cdots, n)$ $\sum \alpha_i = 1$ ヲ適當ニトレバ

$$| Mf - \textstyle\sum_1^n \alpha_i f(x - a_i)| < \varepsilon_1, \quad x \in \mathfrak{o}_f$$

ナラシメルコトガ出來ル。故ニ

$$\left| \frac{1}{m(E)} \int_E \sum \alpha_i f(x - a_i)\, m(dx) - Mf \right| < \varepsilon_1$$

一方

$$\left| \frac{1}{m(E)} \left\{ \int_E f(x)\, m(dx) - \int_E \sum \alpha_i f(x - a_i)\, m(dx) \right\} \right|$$

$$= \frac{1}{m(E)} \sum_1^n \alpha_i \left| \int_{E \sim (E + a_i)} f(x)\, m(dx) \right|$$

$$\leqq \mathrm{Max} |f(x)| \cdot \frac{1}{m(E)} \sum_1^n \alpha_i\, m(E \sim (E + a_i))$$

ヨッテ (17) ノ假定ヨリ $n \geqq n_0$ ナラバ $\frac{1}{m(E_n)} m(E_n \sim (E_n + a_i)) < \varepsilon_2$ $(i = 1, \cdots, n)$ トスレバ，上ノニツノ式ヲ合セテ

$$\left| Mf - \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} f(x)\, m(dx) \right| \leqq \varepsilon_1 + \varepsilon_2\, \mathrm{Max} |f(x)|,$$

$n \geqq n_0$ トナル故。故ニ $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$，$\varepsilon_2\, \mathrm{Max} |f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ トスレバ，(18) ガ証明サレル。

定理 15

(17) ノ假定ノモトニ，m ガ $\mathfrak{o}_f$ ノ Weil ノ mass デアレバ $f \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{o}_f)$

(19) $\lim_{(Stark)} \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} U_x f \, m(dx) = f_0$

$$U_x f_0 = f_0 \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{o}_f)$$

トル f_0 が存在スル。コノ $= U_x f(y) = f(x+y)$ トス。

コレハ定義4ノ $\mathfrak{o}_f$ ノ Parameter トスル mess bar ナ流レ $\{T_x\}$, $f \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{S}_b)$, $U_x f = f(T_x \omega)$ ニ對シテモ同様。

(註) 定理10, 11トカラ

$$\frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} U_x f \, m(dx) = \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} \int_{\chi} \chi(y) \, dP(E) f \cdot m(dy)$$

$$= \int \left(\frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} \chi(y) \, m(dy) \right) dP(E) f$$

トナル。$\chi(y)$ ハ $\mathfrak{o}_f$ ノ mess bar ナ fast periodische Funktion デアルカラ, (17) ノ假定ノモトニ

$$\lim \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} \chi(y) \, m(dy) = M\chi = \begin{cases} 1 & \chi = \chi_0 = \text{Haupt charakter} \\ 0 & \chi \neq \chi_0 \end{cases}$$

故ニ定理9, (iv) ヨリ $\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = \chi_0 \\ 0 & x \neq \chi_0 \end{cases}$ トスレバ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} U_x f \, m(dx) = \int_{\chi} \delta(\chi) \, dP(E) f$$

$$= P(0) f = f_0$$

トナル。 q. e. d.

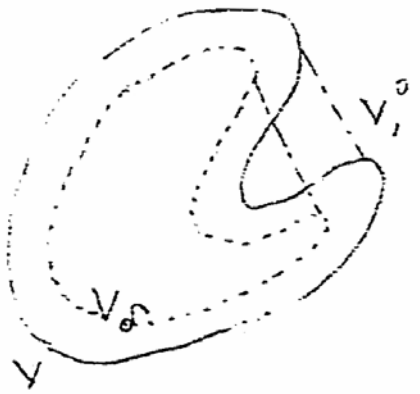
定理16 $\mathfrak{o}_f$ が in Kleinen bikompakt 且ツ zusammenhängend デ m ガソノ Haar-

Imass デアルモノトスル。

G ヲ含ム任意ノ $\mathfrak{O}_f$ ノ total beschränkt + offene Menge トスレバ $E_n = G^n = (x_1 + \cdots + x_n;\ x_i \in G,\ i = 1, \cdots, n)$ ニ對シテ (17) ガ成立スル。從ッテ (18), (19) モ $E_n = G^n$ ニ對シテ成立スル。

(証) Pontrjagin ノ Strukturssatz ニヨリ $\mathfrak{O}_f = \mathfrak{J}_r + \mathfrak{k}$ トナル r 次元ユークリッド空間ノ Translations gruppe $\mathfrak{J}_r$, Zusammenhängend + bikompakte Gruppe $\mathfrak{k}$ トノ直和ニ分解サレル。ヨッテ $G \supset G_1 + G_2$, $G_1 \subset \mathfrak{J}_r$, $G_2 \subset \mathfrak{k}$ トナル 0 ヲ含ム offene Menge ノ直和集合ヲ含ム。一方 $\sum_1^\infty G_2^n = \mathfrak{k}$ カラ, $\mathfrak{k}$ ハ bikompakt ナル故, アル n_0 ニ對シテ $G_2^{n_0} = \mathfrak{k}$ トナル。

ヨッテ $n \geq n_0$ ハ mod $\mathfrak{k}$ ノ Restklasse ノ集リトナル。今 V ヲ G ノ $\mathfrak{J}_r$ ヘノ正射影トスル。十分小サイ



$\delta > 0$ ニ對シテ V_δ ヲ δ-Umgebung ガスベテ V ニ属スル V ノ部分集合トスル。V^0 及 V_δ^0 デ夫々 V 及ビ V_δ ノ convexe Hülle ヲアラハス。

$\frac{V^n}{n} = (\eta;\ n\eta \in V^n)$ トスレバ, $n > n_0$ ナラバ $\frac{V^n}{n} \supset V_\delta^0$ ナルコトガ証明サレル。

何トナレバ V_δ^0 ヲ $\eta_0 = \alpha a + \beta b$, $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$,

$\alpha, b \in V_\delta$. 故ニ V ト V_δ トノ関係カラ通常ナル $n_0(\delta)$ ニ対シテ，$n > n_0(\delta)$ ナラバ $y_0 = \frac{a}{n}\alpha_0 + \frac{b}{n} b_0$，$\alpha_0, b_0 \in V$，$a, b$：整数 $a+b=n$ トナル様ニ出来ル．

即チ $a\alpha_0 + b b_0 \in V^n$ カラ，$V^n/n \supset V_\delta^0$ トナッテ．同様ニ $\frac{V^n}{n} \subset V^0$ モ明ラカ．

ヨッテ $\mathfrak{J}_r$, k ノ Haar-Imass ヲ m_1, m_2 トスレバ，$m = m_1 \times m_2$ デアルカラ $m(G^n) = m(V^n + k)\, m_1(V^n)$ $(n > n_0)$ カラ

$$\overline{\lim}\left\{ \frac{1}{m(G^n)}\, m\left(G^n \sim (G^n + a)\right)\right\}$$

$$= \overline{\lim}\left\{ m_1\left(\frac{V^n}{n}\right)^{-1} m_1\left(\frac{V^n}{n} \sim \left(\frac{V^n}{n} + \frac{a}{n}\right)\right)\right\}$$

$$\leqq \overline{\lim}\left\{ m_1(V_\delta^0)^{-1}\left[m_1\left(V^0 \cup \left(V^0 + \frac{a}{n}\right)\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - m_1\left(V_\delta^0 \cap \left(V_\delta^0 + \frac{a}{n}\right)\right)\right]\right\}^{*}$$

一方 $\lim m_1\left(V^0 \cup \left(V^0 + \frac{a}{n}\right)\right) = m_1(V^0)$ 等カラ

$^{*} \leqq m_1(V_\delta^0)\left\{ m_1(V^0) - m_1(V_\delta^0)\right\}$ トナル．コレデ $\delta \to 0$ トスレバコノ値ハ何程デモ小サクナル．即チ (17) ガ成立スル．——

（注意） E_n ハ $E_1 \subset E_2 \subset \cdots\cdots$, $\lim E_n = \mathfrak{o}$ トイフ丈ノ条件デハ (17) ハ必ズシモ成立シナイ．カノル反例ヲ容易ニ作ルコトガ出来ル．

定理17 $\mathfrak{o}$ ガ im Kleinen bikompakt, m ガ Haar-Imass, $\mathfrak{o} = \sum_1^\infty A_n$, $m(A_n) < \infty$ ト

アラハサレルナラバ，適當ナ $\{E_n\}$ ヲトレバ (17) ガ成立スル。

(証) Pontrjagin-Kampen ノ Strukturssatz カラ

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{J}_r + \mathfrak{h}_y,\quad \mathfrak{h}_y / \mathfrak{k} \cong \mathfrak{d},\quad \mathfrak{k}: \text{bikompakt},\quad \mathfrak{d}: \text{diskret}$$

ト直和ニ分解サレル。$\mathfrak{J}_r$, $\mathfrak{h}_y$ ノ Haar-Mass ヲ夫々 m_1, m_2 トスル。

今 $E_n^{(1)} \subset \mathfrak{J}_r$, $E_n^{(2)} \subset \mathfrak{h}_y$ ニ對シテ (17) ガ夫々 $\mathfrak{J}_r$ 及 $\mathfrak{h}_y$ ノ中デ成立スレバ，

$E_n = E_n^{(1)} \times E_n^{(2)}$ トスレバ $m = m_1 \times m_2$ ヨリ (17) ガ $\mathfrak{G}$ デ成立スル。

$\mathfrak{J}_r$ ノ中デカニル $E_n^{(1)}$ ノトレルコトハ明カデアル。次ニ $\mathfrak{h}_y = \sum_1^\infty A_n$, $m_2(A_n) < \infty$ トアラハサレルコトヲ，Haar-Mass ノ性質カラ $\mathfrak{d}$ ハ高々可算個ノ元シカ含マナイ。

ヨッテ $E_n^{(2)}$ ヲ mod $\mathfrak{k}$ ノ Restklasse ヨリナル集合ヲ考ヘレバ，$\mathfrak{d}$ デ (17) ヲ成立セシナル $E_n^{(2)}$ ヲ作レバヨイ。$\mathfrak{d}$ ノ中デ Ordnung ガ有限ナ元ノ全体ヲ $\mathfrak{E}$ トスレバ，$\mathfrak{d} = \mathfrak{E} + \mathfrak{U}$，トアルスベテノ元ガ Ordnung ∞ ナル群 $\mathfrak{U}$ トノ直和トシテアラハサレル。故ニ又 $\mathfrak{E}+\mathfrak{U}$ ト別々ニ考ヘレバ十分デアル。

$\mathfrak{E} = \{x_1, x_2, \cdots\cdots\}$ トスレバ，E_n ヲ $x_1, \cdots\cdots, x_n$ ヨリ erzeugen サレル $\mathfrak{E}$ ノ Untergruppe トスレ

ベ，E_nハ endliche Gruppe ナル故 Inass ハ有限デ，コレガ (17) ヲ満足スル。

$\mathfrak{U}$ ハソノ Erzengende ヲ $\{x_1, x_2, \cdots\cdots\}$ トスル。$\mathfrak{U}$ ノ元ハ一般ニ $a_1x_1 + \cdots\cdots + a_nx_n$ (a_i ハ整数) ト表ハサレル。ヨッテ

$$E_n = (a_1x_1 + \cdots\cdots + a_nx_n;\ i-n-1 \leqq a_i \leqq n+1-i,\quad i = 1, \cdots\cdots, n)$$

トスレバ，(17) ヲ満足スルコトガワカル。以上合セテ (17) ヲ満足スルヤウナ E_n ($\subset \mathfrak{o}_f$) ヲモトメルコトガ出来タコトニナル。 q. e. d.