



Title	超 Poincare 空間ニ於ケル調和函数
Author(s)	小平, 邦彦
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 238, p. 1128-1142
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74986
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1054. 超 Poincare 空間 = 於ケル 調和 函数

小 平 邦 彦 (東大)

筆者ハ超 Fuchs 群ニ関スル談話 (第 234 号) / 中デ非ユークリッド調和函数ナルモノヲ定義シ, コレニ関スル境界値問題ヲ提出シタガ, 其ノ後コレハ Hodge / 意味ノ調和函数ト一致スルコトガ分ツタ.¹⁾ 従ツテ境界値問題モ Hodge ノ一般論ニヨツテ解カレヲキルコトニナル。然シ吾々ノ調和函数ニハ, 空間ガ等留等方ナルコトニヨツテ, 一般論デハ見出し難イ性質が見ラレレ。以下コレ等ノコトニツイテ述ベル。

§1. Green, 定理. n 次元超 Poincaré 空間ハ, 定義ニヨレバ, 長サガ 1 ヲ越エナイ n 次元複素 vector $z = (z', \dots, z^n)$ 全体カラ成ル空間デアツテ

$$(1.1) \quad dS^2 = \frac{|dz|^2}{1-|z|^2} + \frac{|(z dz)|^2}{(1-|z|^2)^2}$$

ナル計量ヲモツ非ユークリッド空間デアル。

1) W. V. D. Hodge: Harmonic Functionals in a Riemannian Space, Proc. London Math. Soc. (2), 38 (1935), 72-95;

The existence Theorem for Harmonic Integrals, Proc. London Math. Soc. (2), 41 (1936), 483-496.

一般 = positive-definit + 計量.

$$ds^2 = \sum g_{jk} dx^j dx^k$$

$\exists \nabla$ Riemann 空間 ∇ へ scalar u , grad へ

$$(1.2) \quad (\text{grad } u)_j = \frac{\partial u}{\partial x^j};$$

vector f , div へ

$$(1.3) \quad \text{div } f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \sqrt{g} f^j;$$

Laplacian Δ へ

$$(1.4) \quad \text{div grad } u = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k} u$$

で定義せられ. 但し $g = \det(g_{jk})$, g^{jk} へ g_{jk} の逆行列を表へ.

Green の定理. G が 区分的 = 滑らかな境界 Γ をもつ有界領域とする. f^j が $G + \Gamma$ で連続, G で連続的可微分,
 の可微分,

$$\int_G \sqrt{g} |\text{div } f| dx^1 \cdots dx^n < +\infty$$

ならば

$$(1.5) \quad \int_G \sqrt{g} \text{div } f dv = \int_\Gamma \sqrt{g} f^j d\sigma_j$$

が成立. 但し dv へ volume-element, $d\sigma_j$ へ

$$(1.6) \quad d\sigma_j = (-1)^{j-1} dx^1 \cdots dx^{j-1} dx^{j+1} \cdots dx^n$$

で現へ.

この定理から Green の公式が導かれる。

$$\left\{ \begin{array}{l} (1.7) \quad \int_G \sqrt{g} f^i \operatorname{grad}_i u \, dv + \int_G \sqrt{g} u \operatorname{div} f \, dv \\ \quad = \int_{\Gamma} u \sqrt{g} f^i d\sigma_i ; \\ (1.8) \quad \int_G \sqrt{g} (u \Delta g - g \Delta u) \, dv \\ \quad = \int_{\Gamma} \sqrt{g} (u \operatorname{grad}^i g - g \operatorname{grad}^i u) d\sigma_i \end{array} \right.$$

又 Dirichlet 積分を次の如く定義する。

$$\begin{aligned} (1.9) \quad D_G(u, \varphi) &= \int_G \sqrt{g} \operatorname{grad}^i u \operatorname{grad}_i \varphi \, dv \\ &= \int_G \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \, dv \end{aligned}$$

$$(1.10) \quad D_G(u) = D_G(u, u).$$

G , 境界が滑らかなとき, Green の公式から

$$\begin{aligned} (1.11) \quad D_G(u, \varphi) &= \int_{\Gamma} \sqrt{g} u \operatorname{grad}^i \varphi d\sigma_i - \int_G \sqrt{g} u \Delta \varphi \, dv \end{aligned}$$

を得る。従って又

$$\begin{aligned} (1.12) \quad D_G(\varphi + w) - D_G(\varphi) &= D_G(w) - 2 \int_G \sqrt{g} w \Delta \varphi \, dv + 2 \int_{\Gamma} \sqrt{g} w \operatorname{grad}^i \varphi d\sigma_i \end{aligned}$$

が成立す。

吾々ハ $\text{Hodge} = \text{従ッテ}$

$$\Delta \varphi = 0$$

ヲ満足スル函数 φ ヲ調和函数ト名付ケル. (1.12) ハ φ が $G + \Gamma$ デ連続的可微分, G デ二回連続的可微分, w が $G + \Gamma$ デ連続, G デ連続的可微分ナルトキ, スベテ $\int_G d\nu$ が存在スルトノ假定ノ下デ成立スル, 従ッテ φ, ψ が共ニ $G + \Gamma$ デ連続, G デ二回連続的可微分ナルトキ, φ ト ψ が Γ 上デ一致シ且ツ φ が Γ ヲ入レテ連続的可微分ナラバ

$$(1.13) \quad D_G(\psi) - D_G(\varphi)$$

$$= D_G(\psi - \varphi) - 2 \int_G \sqrt{g} (\psi - \varphi) \Delta \varphi \, d\nu$$

デアル, 故ニコノトキ φ が調和ナラバ

$$D_G(\varphi) \leq D_G(\psi)$$

スナハチ調和ナル φ ハ D_G ヲ最小ナラシメル. 逆ニ與ヘラレタ境界値ヲモツ函数 φ が D_G ヲ最小ナラシメルナラバ, ソレハ調和デアアル.

何トナレバ, コノトキ w ヲ Γ 上デ0トナル如クトレバ (1.12) カラ

$$\lambda^2 D_G(w) - 2\lambda \int_G \sqrt{g} w \Delta \varphi \, d\nu \geq 0$$

ヲ得ルカラデアアル. コノ際, G ノ代リニ全ク G 内ニ含まレル部分領域 G' ヲトツテ考ヘンバ明カナル如ク, $\varphi = 0$ イテ Γ ヲ入レテ連続的可微分ナルコトヲ假定スル必要ナシ.

以上ノ考察ハ変分原理ノ形ニ要約セラレル. $\delta \int_G$

境界 = 充分近い点 = 於ける値を交換 + 交換分トスレバ,

(1.12) カラ

$$(1.14) \quad \delta D_G(\varphi) = -2 \int_G \sqrt{g} \delta g \Delta \varphi dV$$

ヲ得ル. $\Delta \varphi = 0$ + ル方程式ハ変分方程式.

$$\delta D_G(\varphi) = 0$$

ヲ現ハサレル.

§2. 超 Poincaré 空間 = 於ける Dirichlet 積分. 超 Poincaré 空間ハ analytical manifold テアル. Analytical manifold ハ一般 Riemann 空間 = 十イ 不変式ヲモヤ. 座標ヲ

$$Z = (z^1, z^2, \dots, z^n), \quad z^j = x^j + i y^j$$

トオク. スルト柄ハバ, u が scalar + ルトキ

$$(2.1) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x^j} - i \frac{\partial u}{\partial y^j} \right) dz^j$$

ハ不変式デアアル. 言ヒ換ヘレバ

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x^1} - i \frac{\partial u}{\partial y^1}, \frac{\partial u}{\partial x^2} - i \frac{\partial u}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n} - i \frac{\partial u}{\partial y^n} \right)$$

ハ共変線素 vector デアル. 吾々ハコレヲ ∇u テ現ハス
コト = スル. ストハチ.

$$(2.2) \quad \nabla_j u = \frac{\partial u}{\partial x^j} - i \frac{\partial u}{\partial y^j}$$

$D_G(\varphi)$ ノ形ヲ定メルキト = 先ヤ

$$\text{grad}^i \varphi \text{ grad}_j \varphi$$

ヲ求メヨリ、 $Z = (r, 0, \dots, 0)$ ナル点ニトリ座標ヲ $x^1, y^1, x^2, \dots, y^n$ ノ順ニトツテ (1.1) カラ g_{jk} ヲ求メルト

$$\begin{cases} g_{11} = g_{22} = \frac{1}{(1-|Z|^2)^2}, & g_{33} = \dots = g_{2n2n} = \frac{1}{1-|Z|^2} \\ \text{其他, } g_{jk} = 0 \end{cases}$$

トナシ、従ツテ

$$\begin{aligned} \text{grad}^i \varphi \text{ grad}_j \varphi &= (1-|Z|^2)^2 \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y^1} \right)^2 \right\} \\ &+ (1-|Z|^2) \left\{ \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right)^2 + \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y^j} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

デアル。コレヲ (2.2) ナル記号ヲ使ツテ書直セバ

$$\begin{aligned} \text{grad}^i \varphi \text{ grad}_j \varphi &= (1-|Z|^2) \left\{ \sum |\nabla_j \varphi|^2 - \sum |\nabla_j \varphi Z^j|^2 \right\}; \end{aligned}$$

或ハ vector ノ記号ヲ用ヒテ

$$\begin{aligned} (2.3) \quad \text{grad}^i \varphi \text{ grad}_j \varphi &= (1-|Z|^2) (|\nabla \varphi|^2 - |(\nabla \varphi \bar{Z})|^2) \end{aligned}$$

コノ式ハ $Z = (r, 0, \dots, 0)$ ナル点ヲ求メテ、デアルが、右辺ニ左辺ニ unitary 変換ヲ施シ、任意ノ点ニ成立ツ。故ニ

$$\sqrt{g} = \frac{1}{(1-|Z|^2)^{n+1}}$$

デアルカラ

$$(2.4) \quad D_G(\varphi) = \int_G \frac{|\nabla \varphi|^2 - |\nabla \varphi \bar{z}|^2}{(1-|z|^2)^n} dv$$

§3. 基本解. ユークリッド空間ノ調和函数論デハ r^{2-n} ($r = \sqrt{\sum (x^j)^2}$) ナル“基本解”ガ中心的役割ヲ演ズル. 吾々ノ場合コレニ相當スルモノハ何デアラウカ? コレヲ求めルタニ

$$(3.1) \quad v(r), \quad r = |z|$$

ガ $z=0$ ヲ除イテ至ル所調和デアッタトシテ見ヨウ. 一般ニ φ ガ $r = |z|$ ノミノ函数ナルトキハ, dS^2 ガ球對稱 (unitary 変換ヲ不変!) デアルカラ, $\Delta \varphi \in r$ ノミノ函数デアール. 従ツテ

$$\delta D_G(\varphi) = -2 \int_G \sqrt{g} \, \delta \varphi \, \Delta \varphi \, dv$$

カラ明ラカナル如ク, $\Delta \varphi = 0$ ナルタメニハ φ ラ r ノミノ函数ト考ヘテ作ツタ変分 δD_G ガ0ナルコトガ充分條件ヲ與ヘル. (2.4) カラ $D_G(v)$ ヲ求めルト

$$\nabla_j v = \frac{\bar{z}^j}{r} v'(r)$$

デアールカラ

$$D_G(v) = \int_G \frac{(v'(r))^2}{(1-r^2)^{n-1}} dv$$

トナル. G ヲ Poincaré 空間全体ニトレバ

$$D(V) = \int_0^1 \frac{r^{2n-1} (V')^2}{(1-r^2)^{n-1}} dr$$

但し $\int_0^1$ は単位球ノユークリッド表面積ヲ現ハス。コレヨ

リ $\delta D(V) = 0$ ヲ解ケバ

$$V' = \frac{C(1-r^2)^{n-1}}{r^{2n-1}}, \quad (C \text{ハ積分常数})$$

故ニ

$$(3.2) \quad V(r) = C \int \frac{(1-r^2)^{n-1}}{r^{2n-1}} dr$$

然ルニ一方又カラ $0 =$ 到ル非ユークリッド距離ハ

$$l = \frac{1}{2} \log \frac{1+r}{1-r} = \tanh^{-1} r, \quad r = |z|$$

ヲ與ヘラレ、又半径 l 、非ユークリッド球面積ハ

$$\omega(l) = \frac{\int_0^1 r^{2n-1}}{(1-r^2)^n} = \int_0^1 \sinh^{2n-1} l \cosh l$$

デアル。 V ヲコレヲ用ヒテ表セバ

$$(3.3) \quad V(\tanh l) = C \int_{\infty}^l \frac{dl}{\omega(l)} + \text{const.}$$

ユ、結果ハ當然ノコトト考ヘニレル。 V が 0 ヲ除イテ

$\Delta V = 0$ ヲ満足スルトスレバ、Greenノ定理カラ、 0 ヲ
中心トスル半径 l 、球面 $O(l)$ 上ノ表面積分。

$$\int_{O(l)} \sqrt{g} \operatorname{grad}^j V d\sigma_j$$

ハ一定デナケレバナラズ。コノ事カラ直チニ

$$\omega(l) \frac{d}{dl} V(\tanh l) = \text{const}$$

が結論せられる。

— 吾々の標準基本解として

$$(3.4) \quad V(\tanh l) = - \int_{\infty}^l \frac{dl}{\omega(l)}$$

より、コレを端 = V を表はスコト = スル、 r を書けば

$$(3.5) \quad V(r) = - \int_1^r \frac{(1-r^2)^{n-1}}{\omega r^{2n-1}} dr$$

$r=0$ の近傍では

$$(3.6) \quad V(r) \sim \frac{1}{\omega} \frac{1}{(2n-1) r^{2n-2}}$$

及び

$$(3.7) \quad \nabla_i V(r) \sim \frac{-\bar{x}^i}{\omega r^{2n}}$$

が成立す。又 Γ が 0 を含む閉曲面 + ルトキハ

$$(3.8) \quad \int_{\Gamma} \sqrt{g} \operatorname{grad}^i V d\sigma_i = -1$$

V はユークリッド空間の場合と全く同様 = 次ノ事實が証明せられる。 G が充分²⁾ 滑らかな境界 Γ を有スル

2) 二回連続的に可微分トスレバヨイ。(3.6) から明らかなル如ク、

$V(r)$ 、 $r=0$ = 於ケル特異性ハユークリッド空間ノ調和函数ノ夫レと同ジデアル。故ニ $V(r)$ が含ム積分ノ収斂性、連続性等 = V

イテハユークリッド空間ノ場合ト全く同ジ結果が成立スル。

有界領域, $\varphi \in G + \Gamma$ 連続的可微分 + 函数トビ,

$$v = v(\tanh L), \quad L = L(z, \bar{z})$$

トオケバ

$$(3.9) \quad \int_G \sqrt{g} \operatorname{grad}^i v \operatorname{grad}_j \varphi \, dv \\ = p \varphi(z) + \int_\Gamma \sqrt{g} \varphi \operatorname{grad}^i v \, d\sigma_j,$$

値 p は G が G 内 = アルトキ + 1, Γ 上 = アルトキ + $\frac{1}{2}$,

$G + \Gamma$ の外 = アルトキ 0 を表ハス. 更 = φ が $G + \Gamma$ で二回連続的可微分 + ル場合 = ハ

$$(3.10) \quad p \varphi(z) = - \int_G \sqrt{g} v \Delta \varphi \, dv - \int_\Gamma \sqrt{g} \varphi \operatorname{grad}^i v \, d\sigma_j \\ + \int_\Gamma \sqrt{g} v \operatorname{grad}^i \varphi \, d\sigma_j.$$

§ 4. 平均値ノ定理. 基本解ノヲ用ヒテ平均値ノ定理が証明セラレル. $O(z) = O(z, L)$ ノ z ノ中心トスル非ユークリッド球面, G ノ v ノ内部トビ, φ が $G + O(z)$ で調和デアッタトスル. スルト (3.10) カラ

$$\varphi(z) = - \int_{O(z)} \sqrt{g} \varphi \operatorname{grad}^i v \, d\sigma_j + \int \sqrt{g} v \operatorname{grad}^i \varphi \, d\sigma_j$$

デアルガ, $O(z)$ 上デハ v ハ一定デアルカラ

$$\int_{O(z)} \sqrt{g} v \operatorname{grad}^i \varphi \, d\sigma_j = v \int_{O(z)} \sqrt{g} \operatorname{grad}^i \varphi \, d\sigma_j \\ = v \int_G \sqrt{g} \Delta \varphi \, dv = 0$$

又 $\text{grad}^i \nu d\sigma_j$ は $O(\varepsilon)$ に定まる,

$$\int_{O(\varepsilon)} \sqrt{g} \text{grad}^i \nu d\sigma_j = -1$$

である。

故に $\varphi(\varepsilon)$ は $\varphi(\varepsilon)$, $O(\varepsilon)$ 上の平均値に等しい。

φ が $G + O(\varepsilon)$ で連続, G で調和な場合 $\varepsilon \rightarrow 0$,

$O(\varepsilon) = O(\varepsilon, \ell)$ により $O(\varepsilon, \ell - \varepsilon)$ をとって $\varepsilon \rightarrow 0$

トスレバ同じ結果が得られる。トナハチ

平均値の定理. φ が ε を中心とする非ユークリッド球面 $O(\varepsilon)$ の内部で調和で, $O(\varepsilon)$ に入って連続ならば φ , $O(\varepsilon)$ 上の平均値は $\varphi(\varepsilon)$ に等しい。

逆は:

定理: 領域 G 内で連続な函数 $\varphi(\varepsilon)$ が G 内の任意の球について平均値の定理を満足するならば φ は調和である。³⁾

これを証明するタメに

Lemma. $\varphi(\varepsilon)$ は任意回数連続的に可微分である。³⁾

証明. $f(\ell)$ を充分回数連続的に可微分な

$$\begin{cases} f(\ell) \geq 0, \ell < \varepsilon \text{ 又 } \ell > 2\varepsilon \text{ のとき } f(\ell) = 0, \\ \text{且} \\ \int \sqrt{g} f(\ell) d\nu_{\varepsilon} = 1, \ell = \ell(\varepsilon, 0) \end{cases}$$

なる函数とする。然ると ε は $O(\varepsilon, 2\varepsilon) \subset G$ なる ε に対し

3) R. Courant u. D. Hilbert: Meth. d. Math.-Physik. II. Kap. IV, 251-252. 証明は Courant u. Hilbert と全く同じである。

テハ平均値ノ定理カラ

$$\varphi(\zeta) = \int \sqrt{g} f(\ell(\zeta, z)) \varphi(z) dv_z$$

然ルニ $f(\ell(\zeta, z))$ ハ ζ ニツイテ必要ノ因數ダケ連續的可微分ナル。故ニ $\varphi(\zeta)$ モ同ノ因數連續的可微分ナル。

$\varphi(\zeta)$ が任意因數連續的可微分ナルカラ, (3.10)

ニヨツテ

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) = & - \int_{K(\ell)} \sqrt{g} v \Delta \varphi dv - \int_{O(\zeta, \ell)} \sqrt{g} g \operatorname{grad}^i v d\sigma_i \\ & + \int_{O(\zeta, \ell)} \sqrt{g} v \operatorname{grad}^i \varphi d\sigma_i, \end{aligned}$$

但シコニテ $K(\ell)$ ハ $O(\zeta, \ell)$ ノ内部ヲ現ハス。然ルニ假定ニヨツテ

$$\varphi(\zeta) = - \int_{O(\zeta, \ell)} \sqrt{g} g \operatorname{grad}^i v d\sigma_i$$

デアリ, 又

$$\begin{aligned} \int_{O(\zeta, \ell)} \sqrt{g} v \operatorname{grad}^i \varphi d\sigma_i &= v(\ell) \int \sqrt{g} \operatorname{grad}^i \varphi d\sigma_i \\ &= v(\ell) \int_{K(\ell)} \sqrt{g} \Delta \varphi dv \end{aligned}$$

デアル。故ニ

$$\int_{K(\ell)} \sqrt{g} (v - v(\ell)) \Delta \varphi dv = 0$$

然ル = (3.6) カラ明ラカナル如ク

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l^2} \int_{K(l)} \sqrt{g} (v - v(l)) dv = \frac{n-1}{2n(2n-1)}$$

デアール. 故 = $\Delta \varphi$ ハ連続デアールカラ

$$\Delta \varphi = \frac{2n(2n-1)}{n-1} \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l^2} \int_{K(l)} \sqrt{g} (v - v(l)) \Delta \varphi dv = 0$$

コレデ定理が証明サレタ。⁴⁾

上ニ定理カラ前談話デ定義シタ N. E. - 調和函数
ハ $\Delta \varphi = 0$ デ定義サレタ *Hodge* / 調和函数 ト一致ス
ルコトガ分ル. 従ッテ N. E. - 調和函数 = ツイテノ境界値
問題モ *Hodge* / 一般論 = ヨッテ解カレヲキルコト = ナル。
デ吾々ハ境界値問題 = ツイテハ深入リシナイコトニシ, 唯
基本解ヲ用ヒレバ吾々ノ場合 = ハ所謂 "積分方程式ノ方
法" = ヨッテユークリッド空間ノ場合ト全ク平行ニ論ゼラ
レルコトヲ注意スル = 止メル。

§5. 實超 Poincaré 空間ノ調和函数 norm が
-1/2 超エナイン次元実ベクトル: $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$
全 カラ成ル空間ナ

$$(5.1) \quad dS^2 = \frac{|dx|^2}{1-|x|^2} + \frac{|(x, dx)|^2}{(1-|x|^2)^2}$$

デ計量が定義サレタ非ユークリッド空間ヲ實超 Poincaré

4) 勿論 $n \neq 1$ トスル. $n=1$ ノ場合ハ普通ノ函数論ノ場合
ナ, ヲレハ始メカラ除外シテアル。

空間トヨフ。⁵⁾ コノ空間ニ於テモ左ク同様ノ議論ヲ行フコトが出来ル。

先ヅ $\text{grad}^i \varphi$ $\text{grad}_j \varphi$ ヲ求メルト

$$\text{grad}^i \varphi \text{ grad}_j \varphi = (1 - |x|^2) (|\nabla \varphi|^2 - |(x \nabla \varphi)|^2)$$

トナル。従ツテ

$$(5.2) \quad D_G(\varphi) = \int_G \frac{|\nabla \varphi|^2 - |(x \nabla \varphi)|^2}{(1 - |x|^2)^{\frac{n-1}{2}}} dV,$$

但シコノテ $\nabla \varphi$ ハ $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x^n} \right)$ ヲ現ハス。

基本解ヲ求メレバ

$$(5.3) \quad V(r) = - \int_1^r \frac{(1 - r^2)^{\frac{n-3}{2}}}{\partial \Omega r^{n-1}} dr$$

トナルガ、コレモ非ユークリッド球面積

$$\omega(l) = \frac{\partial \Omega r^{n-1}}{(1 - r^2)^{\frac{n-1}{2}}}, \quad l = \tanh^{-1} r$$

ヲ用ヒレバ

$$(5.4) \quad V(\tanh l) = - \int_0^l \frac{dl}{\omega(l)}$$

ト現ハサレル。

5) 筆者ノ一般非ユークリッド空間ニ関スル前談話ノ記号ヲ言ヘバ

$$S = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 1-1 \end{array} \right], \quad \Delta = -1$$

ナル實非ユークリッド空間デアル。

コノ基本解ヲ用ヒレバ平均値ノ定理及ビソノ逆定理が前
ト同様ニ証明セラレル。