



Title	一ツノ Mixing Theorem ニ就テ
Author(s)	安西, 廣忠
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 238, p. 1142-1149
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74987
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1055. ↳ Mixing Theorem = 就テ

安西 廣 忠 (阪大學生)

Ω ヲ measure space, $m(\Omega) < +\infty$ トシマ
ス。

實數 t ヲ parameter トスル Ω ノ上ノ measure
preserving transformation T_t ノ集リガ,
ドンナ $-\infty < t, s < +\infty$ = 對シテ $T_{t+s} = T_t T_s$,
 $T_0 = I$ ヲ満足シテキルトキ之等ノ作ル one-parameter
linear group $\{T_t\}$ ノコトヲ流レトイヒ, t ヲ時
間ト呼ブコト = シマス。

$T_0 = I$ 八 identical transformation 即チ
 Ω ノ各点ヲ動かサナイ変換ヲ表シマス。

T_t 流レハ measurable ナルトシマス。流レガ
measurable ナルトイフハ Ω ノドンナ measurable
set $A =$ 對シテ $\forall T_t P \in A$ トナル P ト t ノ pair
(P, t) ノ作ル集合ガ Ω ト時間 (t) トノ product space
 $\Omega \times (t) =$ 於テ兩者ノ direct product measure

= 関シテ measurable = ナルコトデス。

\mathcal{B} / 上テ 定義セラレタ 絶対値, 自乗が積分可能ナ 函数, 作ル Hilbert space \mathcal{H}_f トシマス。 $f(p) \in \mathcal{H}_f$
= 対シテ $U_t f(p) = f(T_t p) =$ ヨツテ 生ズル one-parameter unitary group $\{U_t\}$ ナリ。 此ノ 形 = スペクトル分解スルコトが出来マス。

$$U_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} dE(\lambda)$$

又 measure preserving transformation T
= $\wedge U f(p) = f(Tp) =$ ヨツテ 生ズル unitary operator U ノ スペクトル分解 $U = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} dF(\lambda)$ ナリ。 此ニ 応ジマス。

流レノ 場合 = \mathbb{R} , 変換ノ 場合 = \mathbb{R} 上ニ 掲ノ スペクトル表示ニ 於テ $\lambda = 0$ ガ 単純固有値トナルトキ = 流レ又ハ 変換ガ ergodic ナリトイヒ。 ergodic ナリ。 シカ \mathbb{R} 以外ニハ 固有値ヲ 持タナイトキ = mixture-type ナリトイヒマス。
($e^{i\lambda}$ ナリ 固有値, λ ナリ 固有振動数 [Eigen frequency] ト呼ブノガ 普通デアリマスガ, コノテハ λ ナリ 固有値ト呼ブコトニシマス) 定義ハコレ位ニ致シマシテ

§1. 流レガ ergodic ナリタルトキ = \mathbb{R} , 構成分子トシテ \mathbb{R} ナリ \mathbb{R} ergodic ナリ 変換ヲ 念メバ 充分デアリマスガ 少シキ 条件ヲ 強メテ

定理 I Mixture type ナリタルトキノ 条件ハ \mathbb{R} 。

以外ノ構成分子ガスバテ *ergodic* = ナルコトガ必要ニシテ且ツ充テアル。

(註) マツ流れ $\{T_t\}$ ガ *mixture* デナイトシマス。

ソノトキハ

(i) $\lambda = 0$ ガ單純固有値デナカ。

(ii) $\lambda \neq 0$ ナル固有値ガ現ハレルカ。

ドチラカデス。

(i) ノトキハ $U_t f = f$ ナル Ω 全体デ常數デハナイ。

$f \in \mathcal{E}$ ガ存在シマスカラ、スベテ $-\infty < t < +\infty$ = 對シテ

T_t ガ *ergodic* デナクナリ問題デアリマセン。

(ii) ノトキハ $U_t f = e^{i\lambda t} \cdot f$ ナル *non-constant*

ナ $f \in \mathcal{E}$ ガ存在シマス。

ココデ $t = \frac{2\pi}{\lambda}$ トオキマスト、 $U_{2\pi/\lambda} f = f$ トナツテ

$T_{2\pi/\lambda}$ ナル *non-ergodic* ナ分子ガ現ハレマス。

逆ニアル $a \neq 0$ = 對シテ T_a ガ *ergodic* デナイト

シマスト、 $T_a(A) = A$ 、 $0 < m(A) < m(\Omega)$ トナル A

ガ存在シマス。 A ガ流レ = 對シテ *invariant* デアレバ

$\{T_t\}$ ハ *ergodic* デナクナリマスカラ或ル $b \neq a$ = 對

シテ $T_b(A) \neq A$ (嚴密 = 云ハバ $m(T_b(A) - A) > 0$) ト

シテ宜シイ。

又、スベテノ t = 對シテ $T_{t+a}(A) = T_t(A)$ ガ成立

シマスカラ

$$m(T_t(A) \cdot A) = m(T_{t+a}(A) \cdot A) \neq m(T_{t+b}(A) \cdot A)$$

コノコトト流レノ *measurability* トカラ $m(T_t(A) \cdot A)$

ハ常数 = 非ガル t / 連続週期函数デアレコトガ命リマ
 ス。 A , Characteristic function $\chi_A(p)$ ト
 スレバ

$$\begin{aligned} (\mathbb{U}_{-t} \chi_A, \chi_A) &= (\chi_A(\mathbb{T}_{-t}(p)), \chi_A(p)) \\ &= (\chi_{\mathbb{T}_t(A)}(p), \chi_A(p)) \\ &= \int_{\Omega} \chi_{\mathbb{T}_t(A)}(p) d\mu = \mu(\mathbb{T}_t(A) \cap A) \end{aligned}$$

流レガ mixture デアレバ

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |(\mathbb{U}_{-t} \chi_A, \chi_A) - (\chi_A^*, \chi_A)|^2 dt = 0$$

トナル答デアス。

[E. Hopf: Ergodentheorie, 36 頁, 定義 11.2]

(χ_A^*, χ_A) ハ常数, $(\mathbb{U}_{-t} \chi_A, \chi_A)$ ハ連続週期函数
 デ而モ常数デアリマセンカラ上記ノ式ハ成立シマセン。

故ニ流レハ mixture デハナクナツテ、証明ハ終リマ
 シ。

\mathbb{U}_t = group \mathbb{U}_t / 単位分解ト。 group / 構成分子
 \mathbb{U}_a / unitary operator トシテ / 単位分解ト / 關
 係カラ得ラレルニ三ノ簡單ノ結果ニツイテ述ベルコトニ
 マス。

$$\mathbb{U}_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} dE(\lambda), \quad E(\lambda - 0) = E(\lambda) \text{ for all } \lambda$$

$a > 0$ / トキ

$$\begin{aligned}
U_a &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda a} dE(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda} dE(\lambda/a) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} e^{i\lambda} dE(\lambda/a) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} d\left\{ E\left(\frac{\lambda+2n\pi}{a}\right) - E\left(\frac{2n\pi}{a}\right) \right\} \\
&= \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} d\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ E\left(\frac{\lambda+2n\pi}{a}\right) - E\left(\frac{2n\pi}{a}\right) \right\}
\end{aligned}$$

$= U_a$ / unitary operator トシテ、單位分解ヲ $F(\lambda)$

トスレバ

$$U_a = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} dF(\lambda), \quad F(\lambda-0) = F(\lambda)$$

分解ノ一意性カヲ

$$F(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\left(\frac{\lambda+2n\pi}{a}\right) - E\left(\frac{2n\pi}{a}\right) \quad 0 \leq \lambda \leq 2\pi$$

$$F(\lambda+0) - F(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\left(\frac{\lambda+2n\pi}{a} + 0\right) - E\left(\frac{\lambda+2n\pi}{a}\right)$$

特ニ $\lambda=0$ ト置ケバ

$$F(+0) - F(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\left(\frac{2n\pi}{a} + 0\right) - E\left(\frac{2n\pi}{a}\right)$$

ヲ得マス。

$a < 0$ ノトキハ

$$F(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\left(\frac{2n\pi}{a}\right) - E\left(\frac{2n\pi+\lambda}{a}\right) \quad 0 \leq \lambda \leq 2\pi$$

トナリマス。然シコノトキノ $F(\lambda)$ ハ右カラ連続即チ
 $F(\lambda+0) = F(\lambda) + \text{ル単位分解}$ デス。

コノトキハ

$$F(\lambda) - F(\lambda-0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\left(\frac{2n\pi + \lambda}{a} + 0\right) - E\left(\frac{2n\pi + \lambda}{a}\right)$$

トナリマス。

故ニ次ノ關係式式ヲ得マス。

$$(A) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\left(\frac{\lambda + 2n\pi}{a} + 0\right) - E\left(\frac{\lambda + 2n\pi}{a}\right) = \begin{cases} F(\lambda+0) - F(\lambda) & a > 0, \text{トキ} \\ F(\lambda) - F(\lambda-0) & a < 0, \text{トキ} \end{cases}$$

$$(B) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\left(\frac{2n\pi}{a} + 0\right) - E\left(\frac{2n\pi}{a}\right) = \begin{cases} F(+0) - F(0) & a > 0, \text{トキ} \\ F(0) - F(-0) & a < 0, \text{トキ} \end{cases}$$

關係式 (B) コラ定理 I が導ケルコトハ明瞭デス。

(A) ト (B) = 着目スレバ定理 I 次ノ又ウニ更ニ詳シクス
 ルコトが出来マス。

系1 *mixture type* ノ流レ $\{T_t\}$ ノ T_0 以
 外ノ構成分子ハスベテ *mixture type* デアル。

系2 流レガ *mixture type* ノ構成分子ヲ一ツ
 デモ含メバ、流レハ *mixture type* トナル。

系3 *ergodic* ノ流レ $\{T_t\}$ ガ、*ergodic*
 デナイ構成分子 T_a ヲ含メバ T_a 、 $\lambda = 0$ = 於ケル固有値ノ
 重複度ハ $+\infty$ デアル。

系3ハ *ergodic* ノ流レノ固有値ガ *modul* ヲ

非ルトイフコトは (β) 式より出ス。

次ニ流レ $\{T_t\}$ が ergodic ナルガ mixture ナ
ハナイ場合ヲ考ヘマス。コノトキノ $\{T_t\}$ ノ固有値ノ作ル集
合ヲ \mathcal{O}_f トスレバ、ヨリ知ラレテキレマシ \mathcal{O}_f ハ可附番ナ且
シ modul \mathbb{Z} ヲ作リマス。

$S = r t$ (r ハ有理数, $t \in \mathcal{O}_f$) ナル形ノ S 全体ノ集
合ヲ \mathcal{O} ナリ表シマス。 \mathcal{O} ハ矢張り modul \mathbb{Z} ヲ作り可附
番ナ、実軸上ニ稠密ニナリマス。次ニ $\left\{ \frac{2\pi}{s} \right\} S \in \mathcal{O}$ ナ
ル集合ヲ \mathcal{Z} トシマス。 \mathcal{Z} ハ実数上ノ可附番稠密集合ナリ。

r ナリ任意ノ有理数トスルトキ $a \in \mathbb{Z} \rightarrow r a \in \mathbb{Z}$,
 $a \in \mathbb{Z} \rightarrow r a \in \mathbb{Z}$ トイフマシ性質ヲモツテキルコト
ハ明カナリ。コノ \mathcal{Z} ガ、流レノ non-ergodic ナ構成
因子ノ parameter ノ作ル集合ニ外ナラナイコト
ナリ。

$$\text{今 } a \in \mathbb{Z} \text{ トシマス。 } \frac{2\pi}{a} \in \mathcal{O}, \frac{n}{m} \frac{2\pi}{a} \in \mathcal{O}_f$$

($m = n$, n ハ 0 ナラザル適當ニ整数), \mathcal{O}_f ガ modul

$$\rightarrow \frac{2\pi}{a} \in \mathcal{O}_f \rightarrow E\left(\frac{2\pi}{a} + 0\right) - E\left(\frac{2\pi}{a}\right) \neq 0,$$

$$n \neq 0$$

コトヲ (β) 式ニヨリ T_a ガ non-ergodic ナ交換
ニナルコトガ分リマス。全然今ノ証明ヲ逆ニスルコトニ
ヨツテ T_a ガ non-ergodic ナラバ $a \in \mathbb{Z}$ ナルコト
ガ証明ナリマス。

定理2 流れ $\{T_t\}$ が ergodic ならば、その構成分子が non-ergodic + ε の確率測度又は可附番である。後1場合 = \wedge non-ergodic + 変換 \wedge ergodic + 変換1回 = 一樣 = バラ撒かれる。