



Title	Trace Ring $\vdash$ Quantum Logic I
Author(s)	小平, 邦彦
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 239, p. 1152-1174
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74989
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1057. Trace Ring と Quantum Logic I

小平 邦彦 (東大)

§1. $\mathbb{P}$ を実数体, 又は複素数体とスル. $\mathbb{P}$ 上, n 次
1 行列環 $\mathbb{P}_n$ を考へルト, $\mathbb{P}_n$ = 於テハ $\mathbb{P}$ 上, algebra
トシテ, 代数的 operation —— $A+B$ と和, 差, 積,
scalar 積 —— 1 他ニ, 各元 $A = (a_{ij})$ = 對シテ
 $A^* = (\bar{a}_{ji})$ を對應セシムル operation $*$ が定義サレ,
更ニ $\text{trace } A = \sum a_{ii}$ とル numerical function
が定義サレル. コレヲ一般化シテ次ノ定義ヲオク:

定義. $\mathbb{P}$ を基礎体トスル ring M が次ノ二ツノ條件
ヲ満足スルトキ M を general trace ring トヨ
ブ.

a) M ノ各元 A = 對シテ $\forall$ "adjoint" トヨバレル
元 A^* が定マリ,

$$(1.1) \begin{cases} \text{i)} & A^{**} = A \\ \text{ii)} & (AB)^* = B^* A^* \\ \text{iii)} & (\rho A + \sigma B)^* = \bar{\rho} A^* + \bar{\sigma} B^*; \text{但 } \rho, \sigma \in \mathbb{P} \end{cases}$$

トスル。

が成立スル。

b) Trace トヨバレル numerical function
 $T(A)$ が定義サレテキテ, 次ノ條件が成立ツ。

$$(1.2) \begin{cases} \text{i)} & T(1) = 1 \quad (1 \in M \text{ ノ 単位元}) \\ \text{ii)} & T(A^*) = \overline{T(A)} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{iii) } T(A \cdot B) = T(B \cdot A) \\ \text{iv) } T(\rho A + \sigma B) = \rho T(A) + \sigma T(B) \\ \text{v) } A \neq 0 \text{ ならば } T(A^* A) > 0 \\ \text{vi) } \sup_{B, C \in M} \frac{|T(CAB)|^2}{T(B^* B) T(C^* C)} < +\infty \end{array} \right.$$

General trace ring M は

$$(1.3.) \quad (A, B) = T(B^* A)$$

が inner product トスル (必ずしも complete デハナ) Hilbert space ト考ヘラレル。カク考ヘタトキ norm $\|A\|$ デ現ハシ, $\|\cdot\|$ デ定マル metric γ trace metric トヨテ。 $B \in M$ = 対シテ

$$(1.4) \quad \begin{cases} B^\circ: B^\circ A = B A \\ B^\psi: B^\psi A = A B \end{cases} \quad (A \in M \text{ ノ中ヲ動ク})$$

= ヨツテ定義サレタ B°, B^ψ ハ, (1.2) vi) カラ用ラカトル如ク, space M ノ bounded operator デアル。
 $h_M = \widetilde{M}$ γ M カラ $\|\cdot\|$ - 完全化 = ヨツテ得ラレル, (complete) Hilbert space トスレバ, B°, B^ψ ハ h_M ノ bounded operator = 一義的 = 擴張セラレル。
 コレヲ再ヒ B°, B^ψ デ表ハシ, B ト B° γ 同一ノ ε ノト見做シテ M γ h_M ノ bounded operator カラ成ル ring ト考ヘル。コノトキ

$$(1.5) \quad \|A\| = \sup_{B, C} |T(CAB)| / \|B\| \|C\|$$

トオケバ, $\|A\|$ は by, linear operator トシテ,
 uniform topology, 意味, norm-他トナリ.
 又 $B \rightarrow B^*$ は M / anti-isomorphic ト表現ヲ與
 ヘル.

定義. General trace ring M は $\mathbb{A} = (A;$
 $A \in M, \|A\| \leq 1)$ が $\|\cdot\|$ -complete トルトキ com-
 plete デアルト言ヒ, complete + general trace
 ring 7 單-trace ring トヨフ.

定理1. General trace ring へ (complete
 + Ⅱ) trace ring = 拡張セテ ⅡⅡ.

証明. $\lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \|A_j - A_k\| = 0$, 且 $\|A_j\| \leq C < +\infty$ トル

sequence 7 fundamental sequence ト考ヘテ,
 コノスベテ limit 7 M = 附加ヘテ得テ ⅡⅡ space 7
 $\overline{M}$ トシ, $\overline{M}$ = 於テ和, 差, 積, $*$, trace 7 limit ト
 シテ定義スレバ, $\overline{M}$ は complete + M / 拡張トトル.

コノ理由ニ基イテ, 以下 trace ring / ミヲ考ヘル事
 = スル. ——— コノ trace ring + Ⅱ 概念ハ J. v. Neumann
 ト F. J. Murray / 所謂 factor of finite class
 7 一般化シタモイデアルガ, Neumann / 未發表ノ結果ニ
 コレバ, trace ring へ factor of finite class
 / “連續的直和” = 分解サレルモノト思ハレル. コノデ
 ハ

i) trace ring 内 projection / 全體ハ

complete ortho complemented modular lattice を作るコト, 及び

ii) trace ring は regular ring = 拡張セラレル。

コトヲ示シ, 更ニコレニ関係シタニ三ノコトニツイテ述ベテ見タイ。

§2. 以下常ニ M は trace ring デアルトシ, $\mathcal{H} = \tilde{M}$, 且ツ M は $\mathcal{H}$ 上 bounded operator カラ成ルモノト考ヘル。スナハチ $B \in M$, $f \in \mathcal{H}$ = 数シテ $B \cdot f$ へ §1 = 述ベタ意味デ, B ヲ $\mathcal{H}$ 上 bounded operator ト考ヘヌトキノ積ヲ現ハスモノトスル。又 $f \cdot B$ ヲ

$$(2.1) \quad fB = B^*f$$

ニヨッテ定義スル。明ラカニ。

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } fB, Bf \text{ は distributive である。} \\ \text{ii) } f(BA) = (fB)A \\ \text{iii) } A(Bf) = (AB)f \\ \text{iv) } (Af)B = A(fB) \\ \text{v) } \|Bf\| \leq \|B\| \|f\| \\ \text{vi) } \|fB\| \leq \|B\| \|f\| \end{array} \right.$$

又 M = 於ケル operation $A \rightarrow A^*$ は唯一通り = $\mathcal{H}$ 内ニ連続的ニ拡張セラレル。コレヲ $f \rightarrow f^*$ デ現ハスコトニスル。明ラカニ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } f^{**} = f \\ \text{ii) } (pf + \sigma g)^* = \bar{p}f^* + \bar{\sigma}g^* \end{array} \right.$$

$$(2.3) \begin{cases} \text{iii)} & (f, g) = (\overline{g^*}, f^*) \\ \text{iv)} & \|f\| = \|f^*\| \\ \text{v)} & (Bf)^* = f^* B^* \\ \text{vi)} & (fB)^* = B^* f^* \end{cases}$$

が成立スル。従ッテ $f \rightarrow f^* = \text{ヨッテ } \mathbb{M} \text{ の } \mathbb{M}^* = \text{conjugate isomorph} = \text{寫サレル}$ 。

Lemma 2.1. $\mathbb{H}$ 1 bounded operator $\bar{A} =$
對シテ, 若シ

(2.4) $A_j \in \mathbb{M}, \|A_j\| \leq C < +\infty, \lim_j A_j = \bar{A}$
in strong topology ナル A_j が存在スルナラバ,
 $\bar{A} \in \mathbb{M}$ デアル。

証明 $\mathbb{H}$ 1 operator トシテ A_j が $\bar{A} =$ 強收斂ス
ルノデアイルカラ, $\lim_j \|A_j \cdot 1 - \bar{A} \cdot 1\| = 0$. 故ニ $A_j \cdot 1$
 $= A_j$ デカラ $\lim \|A_j - \bar{A}\| = 0$.

従ッテ $\mathbb{M}$ が complete (§1 - 定義シタ意味デ) ナ
ルコトカラ $\lim \|A_j - A\| = 0$ ナル $A \in \mathbb{M}$ ガアル。 $B \in$
 $\mathbb{M}$ 7 任意ニトルト $\|A_j B - AB\| \leq \|B\| \|A_j - A\| \rightarrow 0$.
一方 A_j が $\bar{A} =$ 強收斂スルコトカラ $\|A_j B - \bar{A} B\| \rightarrow 0$. 故ニ
 $AB = \bar{A} B$. 故ニ $A = \bar{A}$.

Lemma 2.2. $A \in \mathbb{M}$ ノトキ A 1 canonical
decomposition $A = WH$ (H 1 self adjoint,
 ≥ 0 , W 1 partially isometric), $H = \int \lambda dE_H(\lambda)$

トスレバ $H \in M$, $E_H(\lambda) \in M$ デアル。

証明 $H, E_H(\lambda)$ ハ, $H = \sqrt{A^*A}$ デアルカラ, 共 = A^*A ハ適当 + polynom $p_j(A^*A) = \epsilon_j$ (2.4) / 意味デ近似セラレル。故 = 前 Lemma = ϵ_j M = 含まレルコトガ分ル。

定理 2. $f \in h_f$ ガ M ($M \subseteq h_f'$ デアル) = 含まレル
 771 必要且充分 + 条件ハ

$$(2.5) \sup_{B \in M} \|fB\| / \|B\| < +\infty$$

デアル。

証明. 必要 + コトハ明白。充分 + コトヲ示ス。 h_f / 定義カラ $\lim_j \|f - A_j\| = 0$ + ル $A_j \in M$ ガアル。 A_j / canonical decomposition $A_j = W_j H_j$, $H_j = \int \lambda dE_j(\lambda)$ トシ。 $S = \sup_B \|fB\| / \|B\|$ ヲ用ヒテ $E_j = E_j(s+i)$, $F_j = I - E_j$ トオク。 明ラカ = $\|F_j\| \leq 1$, $\|fF_j\| \leq S\|F_j\|$,
 又

$$\begin{aligned} \|A_j F_j\|^2 &= T(F_j A_j^* A_j F_j) = T(F_j H_j^2 F_j) \\ &= T\left(\int_{s+1}^{\infty} \lambda^2 dE_j(\lambda)\right) \\ &\geq (s+1)^2 T\left(\int_{s+1}^{\infty} dE_j(\lambda)\right) = (s+1)^2 T(F_j) \\ &= (s+1)^2 \|F_j\|^2 \end{aligned}$$

デアルカラ, $\|A_j F_j\| \geq (s+1)\|F_j\|$ デアル。故 =

$$\lim \|F_j\| \leq \lim (\|A_j F_j\| - \|f F_j\|)$$

$$\leq \lim \|(A_j - f) F_j\| \leq \lim \|A_j - f\| \|F_j\| = 0$$

故 = 假定 (2.5) = ヨツテ

$$\lim \|f F_j\| = 0$$

$$\text{デアル. 故} = \|f E_j - A_j E_j\| \leq \|E_j\| \|f - A_j\| \leq \|f - A_j\|$$

だから

$$\begin{aligned} \lim_j \|f - A_j E_j\| &\leq \lim \|f F_j\| + \lim \|f E_j - A_j E_j\| \\ &= 0 \end{aligned}$$

明ラカ $= A_j E_j \in M$, $\|A_j E_j\| \leq s + 1$ デアル. 故 = 完全性 = ヨツテ $f \in M$.

通常ノ用法 = 従ツテ, $\mathcal{H}$ ノスベテ, bounded operator ノケル ring = 於ケル M , M^Ψ , etc. ノ "commutator algebra" $\mathcal{M}'$, $(M^\Psi)'$, etc. テ表ハス. 然ルトキハ

$$\text{定理 3. (i) } M = (M^\Psi)'$$

$$\text{(ii) } M^\Psi = M'$$

証明 i) $M \subseteq (M^\Psi)'$ ハ 明白デアル. $\bar{A} \in (M^\Psi)'$ トシ, $f = \bar{A} \cdot 1$ トオケバ明ラカ =

$$\begin{aligned} \|f B\| &= \|B^\Psi f\| = \|B^\Psi \cdot \bar{A} \cdot 1\| = \|\bar{A} \cdot B^\Psi \cdot 1\| \\ &= \|\bar{A} B\| \leq \|\bar{A}\| \|B\|. \end{aligned}$$

故 = 定理 2 = ヨツテ $f \in M$. コレヲ A ト書ケバ $A = \bar{A} \cdot 1$

ヨリ, 任意ノ $B \in M$ = ツイテ

$$AB = B^\Psi \cdot A = B^\Psi \cdot \bar{A} \cdot 1 = \bar{A} \cdot B^\Psi \cdot 1 = \bar{A} \cdot B$$

故 = $\bar{A} = A \in M$ デアル.

ii) 上ノ結果カラ先ヅ $M' = (M^\perp)^\perp \supseteq M^\perp$ がナル。遂
 $= A' \in M'$ トシ $A' \cdot I = g$ トオクト

$$\begin{aligned} \|g^* B\| &= \|B^* g\| = \|B^* A' I\| = \|A' B^* I\| \\ &= \|A' B^*\| \leq \|A'\| \|B^*\| = \|A'\| \|B\| \end{aligned}$$

故ニ定理2ニヨッテ $g^* \in M$ 。 故ニ $g \in M$ 。 コレヲ A トオ
 ク。

然ルトキハ任意ノ $B \in M$ ニ對シテ

$$A'B = A'B I = B A' I = B g = B A = A^\perp B$$

故ニ $A' = A^\perp \in M^\perp$ デアル。

コノ定理3ヨリ直チニ

定理4. $M, M^\perp$ ハ weakly closed デアル。
 コトガナル。 $M, M^\perp$ ハ スキハチ Heumann ノ言フ意味デ
 ring デアル。

§3. M ニ含マレル projection——コレヲ一
 般ニ E, F , etc. ノ文字ヲ現ハスコトニスル。——ノ全体
 ハ、 $EF = E$ ノトキ $E \leq F$ ト書クコトニスレバ、 $\leq$ ナル
 partially orderニ關シテ latticeヲ作ル。コレ
 ヲ L_M ニ表ハス。 $I-E$ ヲ E ノ ortho complement
 ト考ヘレバ、 L_M ハ ortho complementedデアツテ、
 又明ラカニ completeデアアル。 $E \in M$ ニ對シテ

$$(3.1) \quad D(E) = T'(E)$$

トオキ、コレヲ E ノ dimensionトヨブ。又 by 1 closed
 linear subspace M ハ、 $\forall$ projection P_M

が $M =$ 含マレルトキ $M =$ 属スルト云ツテ $\mathcal{M} \cap M$ ト書キ,

$$(3.2) \quad D(\mathcal{M}) = T(P_M)$$

$=$ ヨツテ定義サレル $D(\mathcal{M})$ $\mathcal{M}$ の dimension ト名付ケル。

$E, F, \dots \in M$ ノ代リニ對應スル $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \dots \cap M$ ヲ考ヘレバ, L_M ハ又 $M =$ 属スル closed linear subspace ノ作ル lattice ト考ヘラレル。定義カラ明ラカナル如ク

$$(3.3) \quad D(E) = (E \cdot 1, 1) = \|E\|^2$$

従ツテ $D(E)$ ハ weakly continuous デアル。

定義. $E, F \in M =$ 對シテ $E = W^*W, F = WW^*$ ナル partially isometric operator $W \in M$ ガ存在スルトキ

$$(3.4) \quad E \sim F$$

ト書ク。又 $\mathcal{M}, \mathcal{N} \cap M$ ノトキ $P_M \sim P_N$ ナラバ

$$(3.5) \quad \mathcal{M} \sim \mathcal{N}$$

ト書ク。

明ラカニ

$$(3.6) \quad \begin{cases} \text{i)} & E \sim E, \\ \text{ii)} & E \sim F \text{ ナラバ } F \sim E, \\ \text{iii)} & E \sim F, F \sim G \text{ ナラバ } E \sim G, \\ \text{iv)} & E \sim F \text{ ナラバ } D(E) = D(F) \end{cases}$$

Lemma 3.1. $A \in M$ ナルトキハ

$$(3.7) \quad [\text{Range } A^*] = h_f - (f; Af=0) \sim [\text{Range } A] = h_f - (f; A^*f=0).$$

証明. A の canonical decomposition 7
 $A = WH$ トスルベ明ラカ $W \in M$ テ $W^*W = P[\text{Range } A^*]$, $WW^* = P[\text{Range } A]$ テアル —.

Lemma 3.2. M, N カ L_M 11 closed linear subspace 11 トキ

$$(3.8) \quad (M \vee N) - N \sim M - (M \wedge N).$$

但シコ $\vee, \wedge, -$ L_M 11 元トシテノ和, 積 orthocomplement 7 表ハス.

証明. $(M \vee N) - N = [\text{Range } (1 - P_N) P_M]$ テアルカラ, コレハ (3.7) = ヲツテ $\sim h_f - (f; (1 - P_N) P_M f = 0)$ トナル, 明ラカ $= h_f - (f; (1 - P_N) P_M f = 0)$ ハ $M - (M \wedge N) =$ 等シイ. 故ニ (3.8) カ成立ツ.

$$\text{コノ (3.8) ト (3.6) iv) = ヲツテ}$$

(3.9) $D(M \vee N) + D(M \wedge N) = D(M) + D(N)$
 カ出ル. $D(M)$ ハス11 modular テアル. 又 (3.3) ヲリ $D(E) = 0$ 11 ラバ $E = 0$ テ11 ケレバ11 ラス. ス11 ハ $D(M)$ ハ positive テアル.

故ニ L_M ハ modular テ11 ケレバ11 ラ11 ス11 ハチ

定理 5. M 11 projection 11 作ル lattice L_M ハ complete orthocomplemented modular lattice テアル, $D(E)$ ハ L_M 11 於ケル positive

modular functional $\neq \neq \vee$.

$\lambda D(E)$ が weakly continuous $\neq \vee$ 事カラ

$$(3.10) \quad \begin{cases} D(\sum_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} D(\sum_{n=1}^m E_n), \\ D(\prod_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} D(\prod_{n=1}^m E_n) \end{cases}$$

ナルコトガ分ル。

§4. Trace ring M , n 次 / 行列環 $\bar{M} = M_n$
 $\wedge$

$$(4.1) \quad \bar{T}(\bar{A}) = \frac{1}{n} \sum_j T(A_{jj}), \quad (\bar{A} = (A_{ik}) \in \bar{M})$$

= ヲツテ trace $\bar{T}$ ヲ導入スルベ trace ring $\neq \vee$.

$$\bar{M} \wedge \text{又}, \quad \bar{h}_y = n \otimes h_y = \underbrace{h_y \oplus h_y \oplus \dots \oplus h_y}_n,$$

operator ring $\neq \wedge$ ラレル。

カク考ヘタトキ $\bar{M}$ $\neq n \otimes M$ デ表ハス。 $\bar{M}$ / "Kom-
 pletierung" $\hat{\bar{M}}$, operator ring $\neq \wedge$ M_n
 $\neq n \otimes M$ $\wedge$ weak, strong, 或ハ strongest
 topology = 関シテ topologically ring iso-
 morphic $\neq \wedge$ ラル。又 $(n \otimes M)' \wedge M'$, n 次 /
 行列環デ, ソレハ M' $\neq$ weak, strong, 或ハ strongest
 topology / 意味デ topologically ring iso-
 morphic $\neq \wedge$ ラル。

一般 = M カ Hilbert space h_y , operator

ring かつ $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ / linear subspace $\mathcal{O}_\Lambda$, ス
ベテ $A' \in \mathbb{M}' = \{A' \mid A' \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O} \text{ かつ } \mathbb{M} = \text{含マ
レルトイヒ } \mathcal{O} \text{ かつ } \mathbb{M} \text{ 卜書ク}\}$. 又 $\mathcal{H}$ / linear operator
 Λ ハソノ domain が $\mathbb{M} = \text{含マレ}$, 且ツ $f \in \text{domain } \Lambda$
 $= \text{對シテ常} = A' \Lambda f = \Lambda A' f (A' \in \mathbb{M}')$ が成立スルトキ
 $\mathbb{M} = \text{含マレルトイヒ}$, $\Lambda \text{ かつ } \mathbb{M}$ デ表ハス. $\Lambda = \text{對シテソノ}$
"graph".

$$\overline{\mathcal{O}}_\Lambda = (\Lambda f \otimes f; f \in \text{Domain } \Lambda)$$

ヲ考ヘルナラバ, $\Lambda \text{ かつ } \mathbb{M}$ ナルタメノ必要且ツ充分ナル条件
ハ $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ / 部分空間: $\overline{\mathcal{O}}_\Lambda$ が $2 \otimes \mathbb{M} = \text{含マレルコ
トデアアル}$.

ヨク知ラレテアル如ク, everywhere dense
domain ヲ有スル linear operator Λ が closed
operator = 拡張サレルタメノ必要且ツ充分ナル条件ハ
domain Λ^* が everywhere dense ナルコトデ
アツテ, コノ条件が満サレルトキ Λ^{**} ハ Λ / 最小ノ拡張
ヲ與ヘル.

吾々ハコレヲ $[\Lambda]$ デ表ハスコトニスル. Graph デ
書ケバ

$$(4.2) \quad \overline{\mathcal{O}}_{[\Lambda]} = [\overline{\mathcal{O}}_\Lambda]$$

Lemma 4.1. $\Lambda \text{ かつ } \mathbb{M}$ ナラバ $\Lambda^* \text{ かつ } \mathbb{M}$, $\Lambda^{**} =$
 $[\Lambda] \text{ かつ } \mathbb{M}$.

証明. i) $\Lambda \text{ かつ } \mathbb{M}$ ナラバ $\overline{\mathcal{O}}_\Lambda \text{ かつ } 2 \otimes \mathbb{M}$
 $[\overline{\mathcal{O}}_\Lambda] = \overline{\mathcal{O}}_{[\Lambda]} \text{ ハ } \mathbb{M} = \text{含マレル}$. 故ニ $[\Lambda] \text{ かつ } \mathbb{M}$

ii) 同様 $= (-g \otimes \wedge^* g; g \in \text{Domain } \wedge^*) =$
 $\mathfrak{h}_g \otimes \mathfrak{h}_g - \overline{\sigma}_\wedge$ が $2 \otimes M = \text{含マレルコトカラ } \wedge^* \eta M +$
 ルコトが余ル。

—— 以下再び M の trace ring をアールス
 ル。

定義. $\mathfrak{h}_g (= \widetilde{M})$, linear submanifold
 of ηM の任意 $\epsilon > 0$ に対して $\mathcal{M} \subset \eta M$, $D(\mathcal{M}) >$
 $1 - \epsilon$ なる closed manifold $\mathcal{M}$ を含ムトキ
 essentially dense であるといふ。

定理 6. i) $\mathcal{O}$, $\mathcal{L}$ が共に ηM , 且つ essentially
 dense ならば $\mathcal{O} \cap \mathcal{L} \subset \eta M$ 且つ essentially dense
 である。

ii) $\mathcal{O}$ が ηM , essentially dense, X が ηM
 なる closed linear operator ならば $(f; Xf \in \mathcal{O})$
 $\in \eta M$ 且つ essentially dense である。

証明. i) は定義から明白である。 ii) を証明するた
 $= \overline{\mathfrak{h}_g} = 2 \otimes \mathfrak{h}_g$ を考へ, コレが

$$\overline{\mathfrak{h}_g} = 2 \otimes \mathfrak{h}_g = \overline{\mathfrak{b}_1} \oplus \overline{\mathfrak{b}_2}, \quad \overline{\mathfrak{b}_1} = (f \oplus 0), \\ \overline{\mathfrak{b}_2} = (0 \oplus f)$$

と表ハシ, 又 $\widetilde{M} = 2 \otimes M = \text{閉スル dimension } 2 \text{ の } \mathbb{D}$
 カク。

Lemma 4.2. X が ηM 且つ closed ならば
 $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{O}_X)} = \frac{1}{2}$ である。

何トナレバ $\overline{\mathcal{O}_X} \cap \overline{\mathfrak{b}_1} = 0$, $\overline{\mathcal{O}_X} \cup \overline{\mathfrak{b}_1} = \overline{\mathfrak{h}_g}$ であるカラ。

$= h_f + \nu$ linear operator $\wedge$, $\eta M + \nu$ closed +
拡張 $[\wedge] = \wedge^{**}$ 以外 $= \wedge$ 存在 $\nu + 1$.

変数 $x, x^*, y, y^*, \dots$, non-commutative
polynomial $P(x, x^*, y, y^*, \dots)$ を考へ, $\eta M + \nu$
closed operator $X, Y, \dots =$ 對 $\nu \neq P(X, X^*,$
 $Y, Y^*, \dots)$ + ν operator $\neq$ 作 ν べ, コレハ定理6カ
ヲ明カナル如ク, essentially dense domain $\neq$ 有
スル. $P(x, x^*, y, y^*, \dots)$ 形式的 $=$ 作 ν $"adjoint"$
 $\neq P^*(x, x^*, y, y^*, \dots)$ トス ν べ

$(P(x, x^*, \dots)f, g) = (f, P^*(x, x^*, \dots)g)$
ガ成立 ν . コレヨリ $(P(x, x^*, \dots))^*$ ガ essentially
dense domain $\neq$ 有スルコトが知ラレ, 従 ν $[P(X,$
 $X^*, \dots)]$ ガ作 ν レル事ガ分ル,

コレ $= \nu$ イテ

Lemma 4.3. i) $[P(x, x^*, \dots)]^* = (X, X^*, \dots)$

ii) $[\rho P(x, x^*, y, \dots)] = [\rho [P(x, x^*, y, \dots)]]$

iii) $[P(x, x^*, \dots) + Q(x, x^*, \dots)]$
 $= [[P(x, \dots)] + [Q(x, \dots)]]$

iv) $[P(x, x^*, \dots) \cdot Q(x, x^*, \dots)]$
 $= [[P(x, \dots)] \cdot [Q(x, \dots)]]$

又 $P(x, x^*, \dots)$ カテ同類項ヲマトメテ得 ν レル

reduced polynomial $\neq P^{(r)}(x, x^*, \dots)$ テ表
ハスコト $=$ ス ν べ

v) $[P(x, x^*, \dots)] = [P^{(r)}(x, x^*, \dots)]$

証明 i) $(P(X, X^*, \dots))^* \supseteq P^*(X, X^*, \dots)$
ヨリ $[\quad]$ ヲ作レバ $(P(X, X^*, \dots))^* \supseteq [P^*(X, X^*, \dots)]$ ヲ得ル. 故ニ定理7カラ $[P^*(X, X^*, \dots)] = (P(X, X^*, \dots))^*$ デナケレバナラヌ. 同様ニ
 $P(X, X^*, \dots) \subseteq [P(X, X^*, \dots)]$ ヨリ $[P(X, X^*, \dots)]^* \subseteq P^*(X, X^*, \dots)$ ヲ得ル. 故ニ $[P(X, X^*, \dots)]^* = [P^*(X, X^*, \dots)]$

ii) — iv) 同様に証明サレル.

コノ Lemma カラ $\mathcal{M}$ ナル closed linear operator, 全体ハ和ヲ $[X+Y]$, 積ヲ $[X \cdot Y]$ ト定義スレバ $\mathbb{C}$ ノ上ノ ringヲ作ルコトガ知ラレル. 吾々ハ之ヲ $\mathcal{R}_M$ デ表ハスコトナシ

$$X+Y = [X+Y]$$

$$X \cdot Y = [X \cdot Y]$$

ト考テコトニスル. $X \rightarrow X^*$ ハ同ラカニ $\mathcal{R}_M$ ノ (conjugate) anti-automorphismヲ與ヘル.

定理8. $\mathcal{R}_M$ ハ M ヲ含ム regular ringナリ.

証明. M ヲ含ムコトハ明ラカデアル. regularナルコトヲ示スタメニ $X \in \mathcal{R}_M$ ニ對シテ, $\forall$ ノ canonical decompositionヲ

$$X = WH, \quad H = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda)$$

トシ, Y ヲ

$$Y = H_1 W^*, \quad H_1 = \int_{+0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} dE(\lambda)$$

ト定義スル。然ルトキハ明ラカニ

$$X = X Y X$$

§5. $X \in \mathcal{R}_M$ が generate する principal right ideal $(X)_r$, principal left ideal $(X)_l$, $(X)_r$ 全体で作る lattice $\bar{R}$. $(X)_l$ 全体で作る lattice $\bar{L}$ を表ハス。

Lemma 5.1. i) $(X)_r = (P[\text{Range } X])_r$,

ii) $(X)_l = (P[\text{Range } X^*])_l$.

証明. $X = XY$ テ 定理 8 の証明ノトキニ定義シタ Y を考ヘレバ

$$\begin{cases} XY = P[\text{Range } X] \\ YX = P[\text{Range } X^*] \end{cases}$$

デアル。コレヨリ直チニ Lemma が証明サレル。

定理 9. i) $E \leftrightarrow (E)_r = \text{ヨツテ } \mathcal{L}_M \text{ ト } \bar{R} \text{ が lattice isomorphic} = \text{ナル。}$

ii) $E \leftrightarrow (E)_l = \text{ヨツテ } \mathcal{L}_M \text{ ト } \bar{L} \text{ が lattice isomorphic} = \text{ナル。}$

証明. 前 Lemma カラ $E \rightarrow (E)_r = \text{ヨツテ } \mathcal{L}_M$ が $\bar{R} = \text{lattice homomorph}$ = 寫サレルコト明カデアル。コレデ $(E)_r = (F)_r$ デアツタトスルト $E = FE$, $F = EF$ デカラ $E = F$ デナケレバナラヌ。スナハチ

$E \rightarrow (E)_r$ は一意的デアル. コレが i) が証明サレ
ヌ.

ii) も同様ニ証明サレル.

コノ isomorphism = ヲツテ $\overline{R}, \overline{L}$ は ortho
complemented lattice トナル. コレニツイテ

定理10. i) $(X)_r$ 1 ortho complement $\wedge (Y; X^*Y$
 $= 0)$ デアル.

ii) $(X)_L$ 1 orthocomplement $\wedge (Y; YX^*=0)$
デアル.

証明 i) $(X^*)_L = (P[\text{Range } X])_L$ デアルカラ $X^*Y=0$
ナルモノ $\Leftrightarrow P[\text{Range } X]Y=0$ ナルコトが必要且充分デ
アル. 故ニ

$(Y; X^*Y=0) = (Y; P[\text{Range } X]Y=0) = (1 -$
 $P[\text{Range } X])_r$. コレハ明ヲカ $= (X)_r = (P[\text{Range } X])_r$
1 ortho complement デアル.

ii) も同様ニシテ示サレル

M 1 center $\neq \mathbb{Z}$, $\eta \mathbb{Z}$ ナル closed operator
1 作ル ring $\neq \mathcal{R}_{\mathbb{Z}}$, $E \in \mathbb{Z}$ ナル E 1 作ル lattice $\neq$
 $L_{\mathbb{Z}}$ トナル, $\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}$ 1 principal right ideal 1
作ル lattice $\neq \overline{R}_{\mathbb{Z}}$, principal left ideal
1 作ル lattice $\neq \overline{L}_{\mathbb{Z}}$ トスル. 然ルトキハ

定理11. i) $\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}$ ハ $\mathcal{R}_M$ 1 center デアル.

ii) $L_{\mathbb{Z}}$ ハ L_M 1 center デアル.

而 $L_{\mathbb{Z}}$ ハ $\overline{R}_{\mathbb{Z}}$ ト lattice isomorphic デアル

ル。

iv) $L_{\mathbb{Z}} \cap \overline{L}_{\mathbb{Z}}$ is lattice isomorphic to $\mathbb{Z}$ ル。

証明. i) $Z \in \text{center of } \mathcal{R}_M$ ならば, $A \in M$
 対して $ZA = [ZA] = [AZ]$ であるから, $AZ \subseteq$
 ZA . 故に $Z \eta \mathbb{Z}$.

逆 = $B \in \mathbb{Z}$ ならば任意 $X \in \mathcal{R}_M$ 対して $BX \subseteq$
 XB , 従って $[BX] = [XB]$ である. $Z \eta \mathbb{Z}$ として,
 Z の canonical decomposition $Z = WH$,
 $H = \int \lambda dE(\lambda)$ として. 然るに $E(\lambda) \in \mathbb{Z}$ であるか

ら, $X \eta M$ 対して

$$[[ZX] E(\lambda)] = [E(\lambda) [ZX]] = [[E(\lambda) Z] X] \\ = [X [E(\lambda) Z]] = [[XZ] E(\lambda)]$$

と分かる

$$E(\lambda) [ZX] \subseteq [ZX] E(\lambda) = [XZ] E(\lambda)$$

である. この事から $\lim_{\lambda} E(\lambda) = I$ によって $[ZX] = [XZ]$
 が得られる. 故に $Z \in \mathcal{R}_M$ の center に含まれる。
 ル。

ii) $E \in L_{\mathbb{Z}}$ が L_M の center に含まれることは明
 白. 逆 = E が L_M の center に含まれるとすれば, $\overline{R}_M$ で
 考へれば $(E)_n$ の complement が一意に定まる.
 然るに $X \in R_M$ 任意とせば $((1-E) + EX(1-E))_n$
 の明か = $(E)_n$ の complement である。

故 = コレハ $(1-E)r$ ト一致タネミナラナイ。故 = $E \times (1-E) = 0$, スナハチ $E \times E = E \times E$. E ト $(1-E)$ ヲ入れ換ヘテ考ヘルハ $X E = E \times E$ ヲ得ル。故 = $E \times E = X E$. 故 = $E \in L_Z$.

iii, iv) ハ明白。

定理 12. $Z = \mathbb{P}$ ナル場合ニハ i) $D(E) = D(F)$ ナルタメノ必要且ツ充分ナ条件ハ $E \sim F$ デアル。従ツテ又 $\Gamma = \Gamma(A)$ ハ M ノ代数的ナ構造ニヨツテ一意ニ定マレル。

何トナレバ, コノ場合ニハ M ハ $\mathcal{H}_Y = \tilde{M}$ ニ於ケル factor = 他ナラナイカラデアル (Heumann: Rings of Operators I 参照)

§6. L_M ハ probability logic (或ハ quantum logic) ノ場トシテ通シテキル。¹⁾ $E, F, \dots \in L_M$ ナ物理的實驗事實ヲ述ベタ命題ト考

$$(6.1) \quad p(E \rightarrow F) = \frac{\Gamma(E \cdot F)}{\Gamma(E)} \quad (E \neq 0)$$

1) Heumann ハ L_M トシテ既約 ($Z=1$) ナル M 上ノ lattice ヲ用ヒテキル (Heumann, quantum logic = 自スル講義, 或ハ Birkhoff: Lattice Theory, 128 頁参照) カ, 古典的ナ確率論ヲ含メテ考ヘルタメニハ一般ノ M ヲ考ヘタ方カヨイ。

E から F へ / transition probability と定義スル。コレヲ又 $p_E(F)$ デ表ハス。特ニ $E=1$ トキ $p_E(F)$ ヲ $p(F)$ ト書ク。即チ

$$p(F) = p_1(F) = \mathbb{P}(F)$$

又

$$(6.2) \quad E \cdot F = F \cdot E$$

ノトキ, E ト F ハ同時観測可能デアルトイフ。例ヘバ次ノ定理ガ成立ツ。

定理 13. i) $p(E \rightarrow F) = 0$ ナルタメノ必要且ツ充分ナ条件ハ $E \cdot F = 0$ ナルコトデアル。

ii) $p(E \rightarrow F) = 1$ ナルタメノ必要且充分ナ条件ハ $F \geq E$ ナルコトデアル。

$$\text{iii) } F_1 \cdot F_2 = 0 \text{ ナラバ}$$

$$p(E \rightarrow F_1 \cup F_2) = p(E \rightarrow F_1) + p(E \rightarrow F_2)$$

$$\text{iv) } p(E) p_E(F) = p(F) p_F(E)$$

v) (Bayes / 定理) $\sum E_j = E_1 + E_2 + \dots + E_n = 1$ ナルトキハ

$$p_F(E_j) = \frac{p(E_j) p_{E_j}(F)}{p(E_1) p_{E_1}(F) + \dots + p(E_n) p_{E_n}(F)}$$

注意 $\sum E_j = 1$ ナルコトハ $E_j \cdot E_k = 0$ ($j \neq k$) 且 $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = 1$ ト一致スル。

L_M = 於ケル "確率変数" ハ次ノ如ク定義セラレル:
定義. 数空間 $(-\infty < x < +\infty)$, Borel 集合族 (B) カラ L_M へノ連続且 lattice homomorphic τ

mapping $\mathcal{E}: B \rightarrow E_{\mathcal{X}}(B)$ デアルヲ, 全空間 $(-\infty, +\infty) = E_{\mathcal{X}} = I$ が對應スルモノヲ 確率変数 (量子力学ノ言ヒ方デハ量) トヨブ。

明ラカ $= E_{\mathcal{X}}(B) (B \in \mathcal{B})$, 全体ハ $L_{\mathcal{M}}$ Boolean sublattice ヲ作ル。 E, F が共ニ $\leq E_0$ ナルトキ $E \cdot F = F \cdot E$ ナルヲノ必要且充分ノ條件ハ $E = (E \wedge F) \vee (E \wedge (E_0 - F))$ デアル。故ニ $L_{\mathcal{M}}$ Boolean sublattice, element ハ相互ニ可換デアル。従ツテ

$E_{\mathcal{X}}(B)$ ハスベテ同時観測可能デアル。

定義. $E_{\mathcal{X}}((-\infty, \lambda))$ ナルノ分布命題函数ト名付ケ $E_{\mathcal{X}}(\lambda)$ デ表ハシ, $f_E^{(\infty)}(\lambda) = \rho_E(E_{\mathcal{X}}(\lambda))$ ナ条件 E ノ下ニ於ケル $\mathcal{X}$ ノ分布函数トヨブ。

$E_{\mathcal{X}}(\lambda)$ ハ明ラカニ単調増大デ上カラ半連続デアル。
 $f_E^{(\infty)}(\lambda)$ モ同ジ性質ヲモツ。 E ト $\mathcal{X}$ ナ固定シテ考ヘルナラバ, $\mathcal{X}$ ハ $f_E^{(\infty)}(\lambda)$ ナ分布函数トスル普通ノ確率変数ニ他ナラナイ。

吾々ハ確率変数 $\mathcal{X}$ が考ヘラレヌトキ

$$(6.3) \quad X = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\mathcal{X}}(\lambda)$$

ニヨツテ $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}$ self adjoint operator X ナ定義スレコトガ出来る。逆ニ self adjoint $X \in \mathcal{R}_{\mathcal{M}}$ が與ヘラレレバ (6.3) カラ $E_{\mathcal{X}}(\lambda)$ が定マリ, 従ツテ $\mathcal{X}$ が定マル。ソコデ吾々ハ $\mathcal{X}$ ナ表ハスニ (6.3) デ定マル X ナ以テシ, 従ツテ $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}$ self adjoint operator ナ

確率変数トヨブコトニスル。

注意 通常、確率論デハ 確率ノ場ハーツノ集合 Ω 、
部分集合カラナル Borel field $\mathcal{F}$ デアツテ、確率変数
ハ Ω 、 $\mathcal{F}$ -可測函数 $x(P)$ ($P \in \Omega$) デ表ハサレル。
コノトキ、有界可測函数全体ノ作ル ring M ハ

$$T(x(P)) = \int_{\Omega} x(P) p(dP)$$

ニヨツテ trace τ 導入スレバ可換 + trace ring
トナリ、 $L(M)$ ハ $\mathcal{F}$ ト lattice isomorphic ト
ナル。又 $\mathcal{R}(M)$ 、self adjoint operator ハ
丁度 確率変数 $x(P)$ ト一致スル。コノ意味デ $L(M)$ ハ
確率ノ場ノ一般化ト考ヘラレル。

—— (續 ク) ——