



Title	p 葉函數ノ歪曲定理ニ就テ
Author(s)	福島, 豊
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 239, p. 1178-1191
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74991
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1059. p 葉函数 / 歪曲定理 = 就テ

福島 豊 (阪大工學部)

Cartwright⁽¹⁾、Littlewood, Fraser、
彼ヲ系ケテ單葉函数ニ於ケル Koebe / 歪曲定理ヲ
 p -valent 函数ノ場合ニ拡張シテキル。茲ニ p -valent
函数トハ同じ値ヲ高々 p 個取ル正則函数ノコトデアル。

Cartwright ハ其ノ論文中特ニ p -valent / 特殊ノ場
合トシテ、次ノ結果ヲ得テキル。

定理. 函数

$$w(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots$$

ガ $|z| \leq 1$ デ正則デ且ツ p -valent デアルトスレバ

$$|w(z)| \leq e^{8\pi p} r^p (1-r)^{-2p}, \quad (|z|=r < 1) \quad (A)$$

Cartwright ハ以上ノ結果ヲ L. Ahlfors⁽²⁾ /
等角寫像ノ定理ヲ用ヒテ出シテキル。

筆者ハ最近 Teichmüller⁽³⁾ ガ *Deutsche
Mathematik* = 發表シタ。所謂 *Modulsatz* ヲ利
用シテ $e^{8\pi}$ ヲ 16 デ置き換ヘルコトが出来タ。即チ

$$|w(z)| \leq 16^p r^p (1-r)^{-2p} \quad \text{トナル} \quad (B)$$

(B) ヲ得ルタメ、先ヅ Cartwright / 方法及ビ
Teichmüller / *Modulsatz* ヲ必要ノ部分ガ簡
單ニ紹介スル。

$$I. \quad w(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + \dots \quad (1)$$

が $|z| \leq 1$ で正則ナリトスル。次 =

$$\rho = M(r) = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |w(re^{i\theta})| \quad (0 < r < 1) \quad (2)$$

トスル。

$|w(z)| < \rho$ を満足スル $|z| \leq 1$ 内ノ像ヲ考ヘル = 一般 = コレハ Open set ナリ且ツ又ハ一ツ以上ノ connected sets ヨリ出来テキル。然ルニ (2) ヨリコレヲ、中ニハ必ず $|z| < r$ を含ム simply-connected region D が存在スル。コノ D ノ frontier ハ勿論 $|w(z)| = \rho$ を満足スルカ Cartwright = ヨレバ

此ノ frontier ハ $|z| < 1$ ナ double pt. を有セズ且ツ $\arg w(z)$ ハコノ frontier ノ各部分ニ於テ單調デアル。

コトが証明サレテアル。 (Fig. 1) (3)

$|z| \leq 1$ ノ内周上ニ点 $e^{i\varphi}$ を取り 0 ト $-e^{i\varphi}$ を結ビ直線ヲ用: $|z| \leq 1$ を切断シテ得ル region を $D(\varphi)$ トスレバ $D(\varphi)$ ハ

$$\left| \arg \frac{e^{i\varphi} z}{(e^{i\varphi} - z)^2} \right| < \pi$$

ヲ満足スル。

コノ $D(\varphi)$ ノ frontier 中

$$\arg \frac{e^{i\varphi} z}{(e^{i\varphi} - z)^2} = \pi \text{ヲ満足スル部分ヲ } \gamma_1$$

$$\arg \frac{e^{i\varphi} z}{(e^{i\varphi} - z)^2} = -\pi \text{ヲ満足スル部分ヲ } \gamma_2$$

トスル。
(Fig. 2)

今 $|w(re^{i\varphi})| = \rho$ 對シ $M(r) = \rho$ が成立スル点ヲ $re^{i\varphi_1}$ トスル $C(\rho)$ ヲ D frontier 内 $re^{i\varphi}$ 含ム部分トスルベ $C(\rho)$ 八 D 全体ヲ隔ム閉曲線カ又ハ $|z| = 1$ 上ニツ、終点 $e^{i\varphi_1}$ ト $e^{i\varphi_2}$ ヲ有スル曲線トナシ。(Fig. 3)

$C(\rho)$ ヲ $D(\varphi)$ frontier テ切ツタトキ $re^{i\varphi}$ 含ム $C(\rho)$ 部分ヲ $C(\rho, \varphi)$ トスル。

コノトキ Cartwright ハ次ノ重要ナ結果ヲ得テキル。

即チ上記ノ $\varphi = \varphi(r)$ ヲ適當ニトルト $C(\rho, \varphi)$ ガ γ_1 及ビ γ_2 ノ上ニ各々一ツ宛終点ヲ有スル様ニスルコトが出来ルト云フノデアアル。 (Fig. 4) (4)

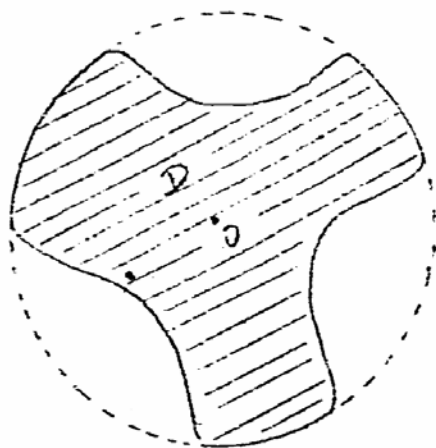


Fig. 1

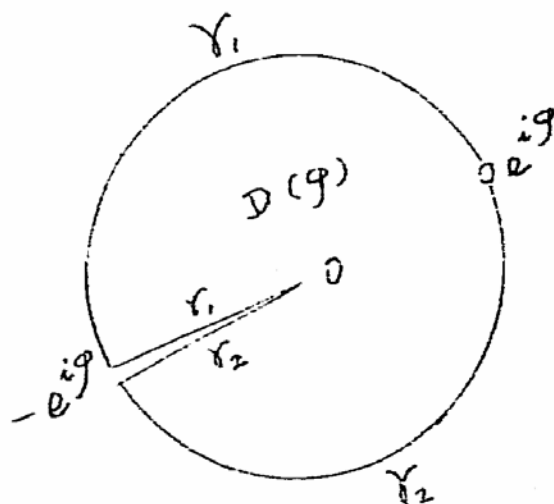


Fig. 2

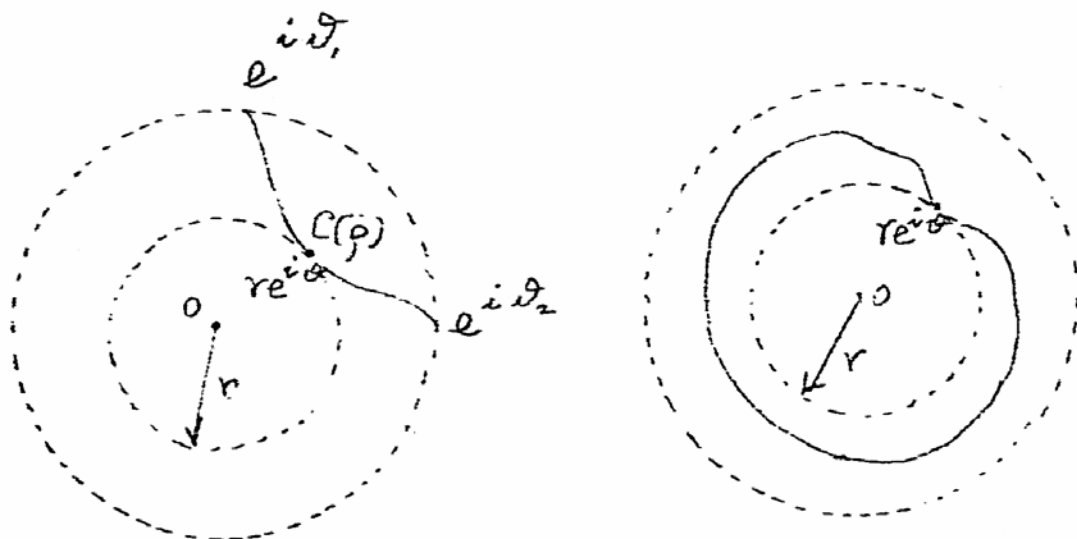


Fig. 3

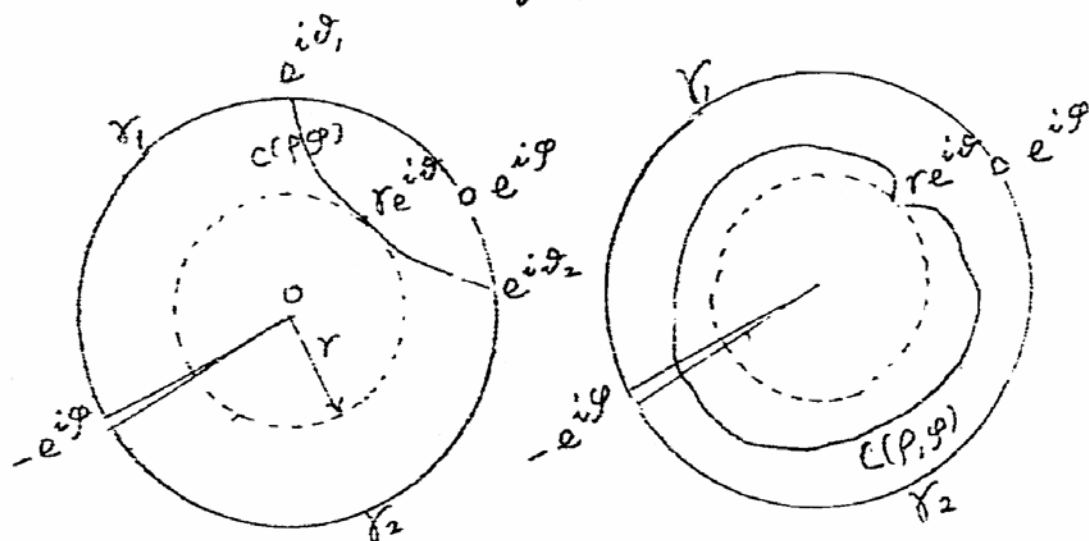


Fig. 4

$$K = D(\varphi) \neq$$

$$\delta = \sigma + i\tau = \log w(z)$$

=ヨッテ δ -plane, $\Delta(\varphi) =$ 移ス. (Fig. 7 (I))

(1) が $|z| \leq 1$ = 於テ 特 = p -valent + リトスレハ

$|z| \leq 1$ = 於テ $z=0$ 以テ 零氣ヲ持タス. 従ッテ $\Delta(\varphi)$

ハ simply-connected + ν region 77 ν .

$D(\varphi)$, γ_1 , γ_2 = 繋スル $\Delta(\varphi)$, curve 7 T_1, T_2

トス.

次 = 交換

$$\left. \begin{aligned} Z(z) &= p \log \frac{e^{i\varphi} z}{(e^{i\varphi} - z)^2} \\ \zeta(\lambda) &= Z(z^{-1}(\lambda)) = \xi + i\eta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ヲ施ス。此処 $= Z^{-1}(\lambda)$ ハ $\lambda = \log w(z)$, 逆函数デ
アリ $w(z)$ が $D(\varphi)$ 内ニ零點ヲ有セスカラ $\Delta(\varphi)$ ハ $D(\varphi)$
ニ正則ニ移サレル。変換 (5) = ヨリテ $D(\varphi)$ ハ ζ -平面上
ノ端 $|\eta| < p\pi$ ニ移サレル。 (Fig. 7. (I)')

Γ_1, Γ_2 ハ $\eta = p\pi, \eta = -p\pi$ ニ移サレル。サテ (3)
及ビ (4) ナル結果ニヨリ z -plane, $C(p, \varphi)$ ハ λ -plane
ニ於テ Γ_1, Γ_2 = 跨ガル $\sigma = \log M(r) (= p_r)$ ナル切断
= 一対一連續對應スル。

而シテコノ切断ハ $|w(re^{i\varphi})| = M(r)$ = 相應ス
ル點ヲ實際ニ通ル ($re^{i\varphi}$ ハ $C(p, \varphi)$ ノ上ニアルカラ)
..... (6)

コノ $\sigma = p_r$ ナル切断, (5) = ヨル ζ -plane 上, 像
ヲ C_r トスル。 (Fig. 7. (I)')

II. 次ニ Teichmüller, 所論ニ移ル。今又平
面上ニ單葉ト二重連結領域 G ヲ考ヘル。特ニ G ノ補集
合が G = ヨリ分タレルニツノ連續集合ヨリ成ルトキ G ヲ
ring domain ト名付ケテ置ク。

スルト G ハ寫像定理ニヨリ原點ヲ中心トシタ同心円ノ
ring $r < |w| < R$ = 等角ニ寫像サレル。コノ場合
Teichmüller, ハ $M = \log \frac{R}{r}$ ナル量ヲ導入シテコ
レヲ G ノ Modul ト名付ケタ。コノ Modul ハ明カニ =

G 、等角寫像的変換 = ユリ不変 + 量デアル。

G = 含マレル任意、ring domain G' を考へ
(Fig. 5) の、modul を M' トスル。然ルトキハ次の定
理が成立スル。

定理 $M' \leq M$ デアル。

等号ハ $G = G'$ のトキノミ成立スル。 (7)

次ニ補集合デアル。ニツノ連続集合ヲ K_1, K_2 トシ次ノ
二條件ヲ満足スル場合ヲ考ヘル。

(a) K_1 ハ原点ヲ中心トシタ單位円 ($|z| \leq 1$) デアル。

(b) K_2 ハ ∞ 及ビ或ル定点 $pe^{i\theta}$ ($p > 1$) + レ點ヲ
含ム。(即チ ∞ 及ビ $pe^{i\theta}$ ハ G 上ニ在リ)

(a) (b) ヲ満足スル G ノ中特ニ (b) ニ於テ K_2 が $P \rightarrow \infty$ ト
ヲ結グ直線ナル場合ヲ考ヘル。(Fig. 6)

コノ特段ナル場合 (Fig. 6) ノ G 、modul を
 $\log \phi(P)$ デ表ハス。スルト次ノ重要ナル結果が得ラ
レテキル。

定理 (a), (b) ヲ満足スル任意ノ領域 G 、modul を M

トスルト

$$M \leq \log \phi(P) \quad (8)$$

尚ホ Teichmüller ハ

$\phi(P)$ ヲ評價シテ

$$\phi(P) < 4P \quad (9)$$

ヲ得テキル。

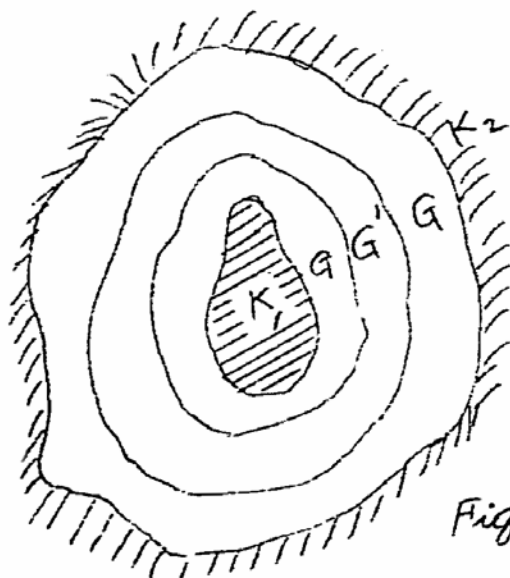
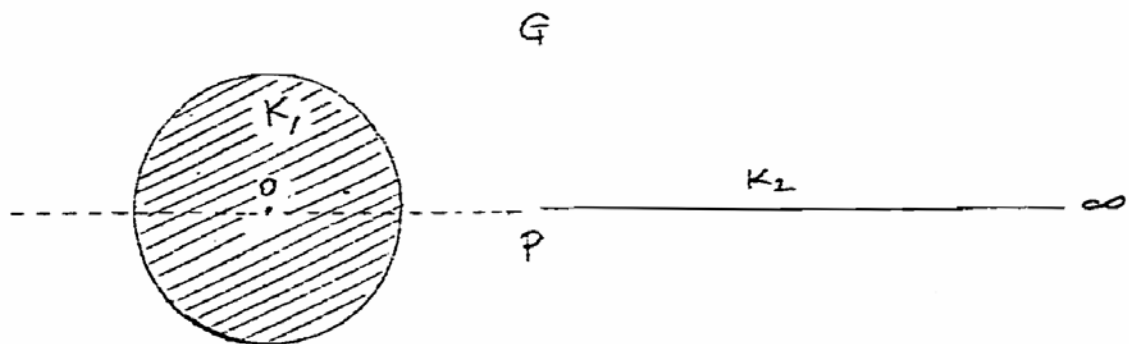


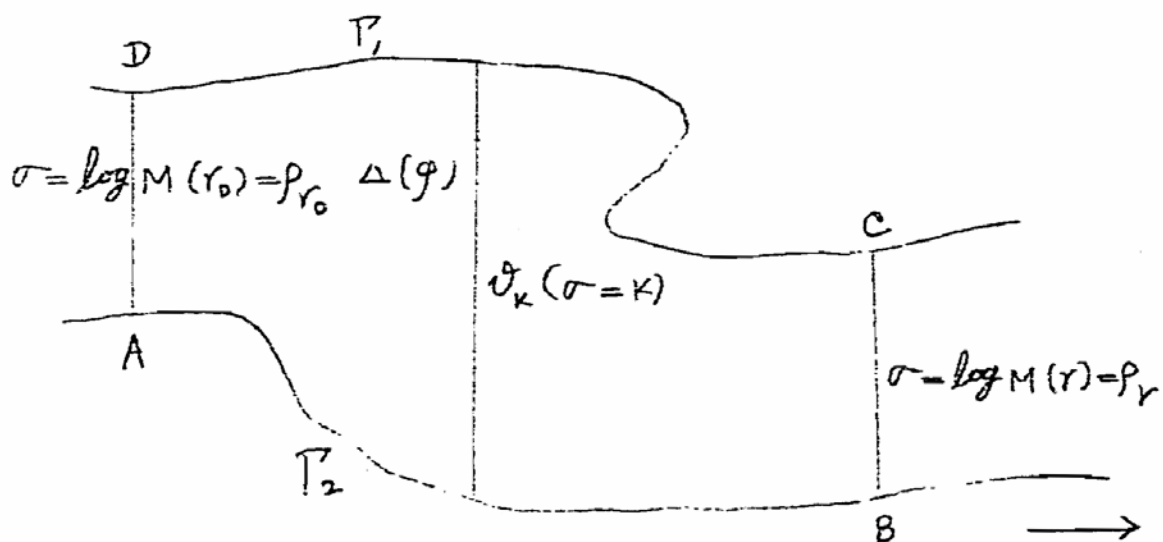
Fig. 5



$$G, \text{ modul} = \log \phi(P)$$

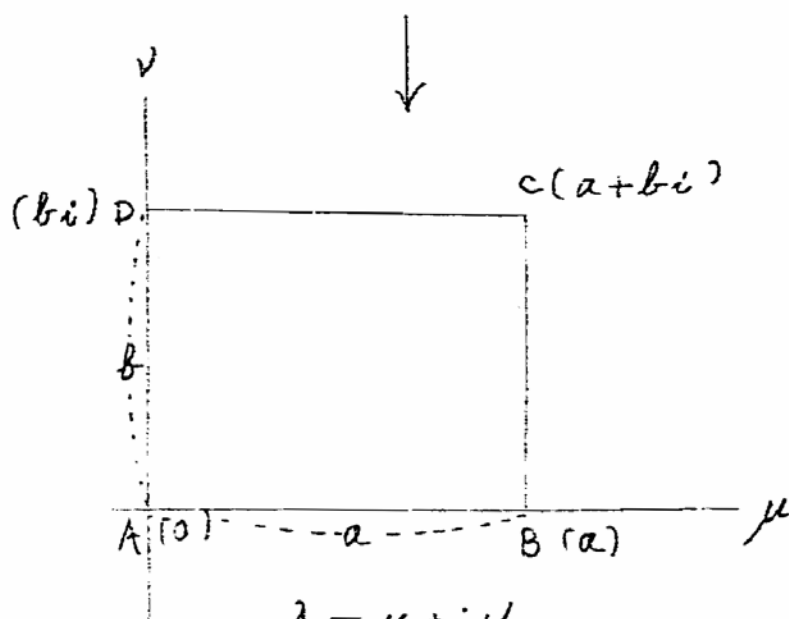
Fig. 6

(I)



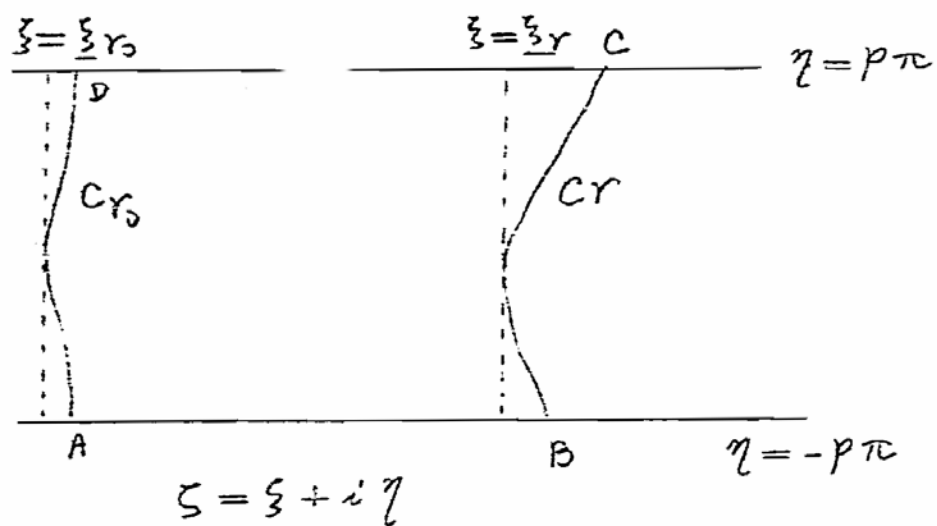
$$\lambda = \log W(z) = \sigma + i\tau$$

(II)

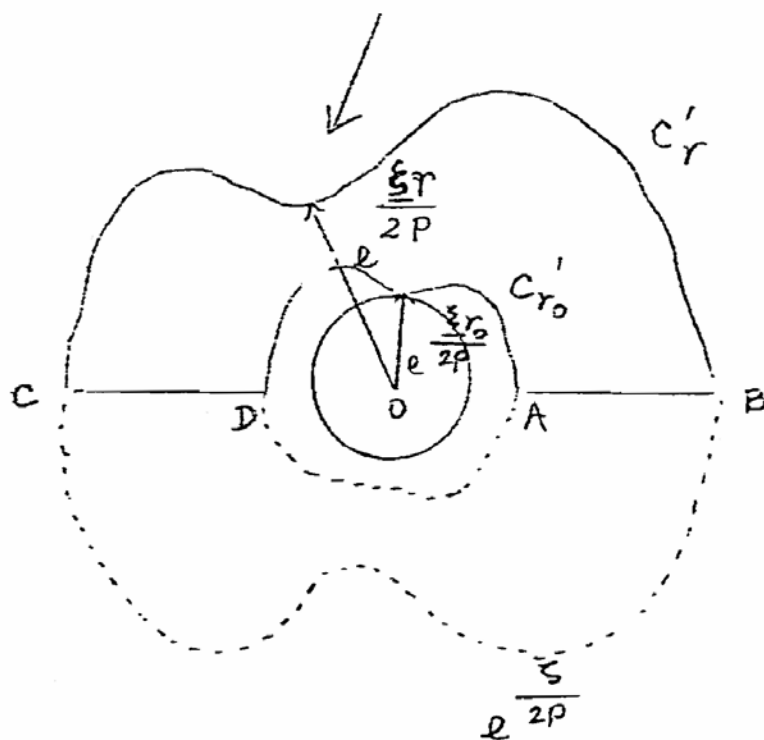


$$\lambda = \mu + i\nu$$

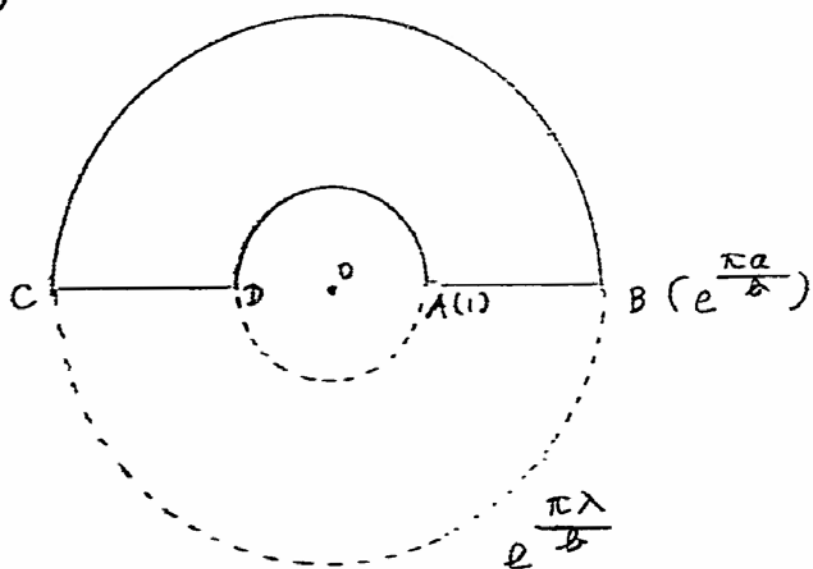
(I)'



(II)'



(III)



III. 以上 I, II, / 準備 / 下 = (B) / 証明ヲスル。

I = 説明シタ λ -plane = 於テ $\sigma = \log M(r) = \rho r$
 +ル切断以外 = $\sigma = k$ +ル切断 γ_k ヲ考ヘル。コノ切断
 / 選ビ方ハ次ノ様ニスル。

「今 T_1, T_2 / 方程式ヲ parameter t ナ次ノ様ニ
 表シテ置ク。

$$T_1: \lambda = \sigma_1(t) + i\tau_1(t),$$

$$T_2: \lambda = \sigma_2(t) + i\tau_2(t)$$

コノ t ハ γ カ γ_1, γ_2 上ヲ 0 ヨリ $e^{i\varphi}$ マデ変化スルト
 キ 0 ヨリ / 迄変化スルトシテ置ク。コノトキ $\sigma = k$ = 對應
 スル T_i 上ノ点ノ t ガ最小ナルモノヲトツテ γ_k ヲ定メルハ
 ヲイ。」

更ニ $\sigma = \log M(r_0) = \rho r_0$ ($r_0 < r$) +ル切断
 $\gamma_{\rho r_0}$ ヲ定メテオク。

γ_k ノ長サヲ $H(k)$ デ表ハス。

次ニ Fig. 7 = 於テ

$T_1, T_2, \sigma = \rho r, \sigma = \rho r_0$ ヲ圓マレタ, $\Delta(\varphi)$ ノ
 部分 (I)ヲ λ -plane ($\lambda = \mu + i\nu$)ノ矩形 (II)ヲ寫
 シ, ソレヲ $e^{\frac{\pi\lambda}{\kappa}} = \gamma$ ヨリ semi-ring (III)ニ移ス。

ζ -planeノ寫像部分 (I)'ヲ, $e^{\frac{\zeta}{2r}} = \gamma$ ヨリ (II)'ニ
 寫像スル。コノトキ C_r, C_{r_0} ハ未タ C'_r, C'_{r_0} ニ移ルニ
 トスル。

「Fig. 7. 中對應ヲ明ラカニスルタメ, 寫像ニ於ケル
 相對應スル點ヲ同一文字 A, B, C, D ガ表ハシテ置ク」

(III) 及び (II)' - 鏡像ノ原理ヲ用ヒテ横軸ニ關シ對稱ナル部分ニ接續スル。スルト (III) 及び (II)' ノ ring domain = ナル。尚 (I)' = 於テ C_r, C_{r_0} ... = 於ケル点ノ real part ξ ノ minimum ヲ夫々 ξ_r, ξ_{r_0} デ表ハス。

スルト明ラカ = (II)' = 於テ C_r' ト原点トノ minimum distance $\propto e^{\frac{\xi_r}{2p}}$ デアリ, C_{r_0}' ト原点トノ minimum distance $\propto e^{\frac{\xi_{r_0}}{2p}}$ デアル。

λ -plane ヨリ λ -plane ノ寫像 = 於テ

$$b \equiv \int_{\gamma_\sigma} \left| \frac{d\lambda}{d\tau} \right| d\tau \quad \left(\begin{array}{l} \gamma_\sigma, \lambda\text{-plane ノ寫像ハ AB,} \\ CD = \text{跨ルアル curve デアルカ} \\ \text{ヲ } b \text{ ヲリ小サクタイ} \end{array} \right)$$

($\sigma = \kappa$ = 相當スル切断ヲ γ_κ トシタガ、特ニ $\sigma = \kappa$ ヲ指定セタイ場)
(合ニハ一般ニ γ_σ デ切断ヲ表ハツテオク。從テ長サハ $\oplus(\sigma)$ デアル)

Schwarz ノ不等式ヨリ

$$b^2 \leq \int_{\gamma_\sigma} d\tau \int_{\gamma_\sigma} \left| \frac{d\lambda}{d\tau} \right|^2 d\tau$$

$$\frac{b^2}{\oplus(\sigma)} \leq \int_{\gamma_\sigma} \left| \frac{d\lambda}{d\sigma} \right|^2 d\sigma$$

$$\therefore b^2 \int_{p_{r_0}}^{p_r} \frac{d\sigma}{\oplus(\sigma)} \leq \int_{p_{r_0}}^{p_r} \int_{\gamma_\sigma} \left| \frac{d\lambda}{d\sigma} \right|^2 d\sigma d\tau \leq ab$$

$$\therefore \int_{p_{r_0}}^{p_r} \frac{d\sigma}{\oplus(\sigma)} \leq \frac{a}{b} \quad (10)$$

$$(III) \text{ , modul } \log \frac{e^{\frac{\pi a}{b}}}{1} = \frac{\pi}{b} a$$

(II)' , modul $\rightarrow M$ トスレバ

(II) ト (II)' ハ等角寫像的對應デアールカラ

$$\frac{\pi}{b} a = M$$

然ル $= M$, modul $\wedge$ (II)' = 於テ C'_{r_0} 7 原点 7 中心
トシ半径 $e^{\frac{\xi_{r_0}}{2p}}$ + ル円デ置キ換ヘテ modul M' ヨリ大
キク + 1 (C'_r ハ ε トノマデ) (II) 定理 (9) = ヨル 即チ

$$M \leq M'$$

$$\text{即チ } \pi \frac{a}{b} \leq M' \quad (11)$$

サテ M' ハ円 $(0, e^{\frac{\xi_{r_0}}{2p}})$ ト中心ヨリ , minimum dis-
tance $e^{\frac{\xi_r}{2p}}$ + ル curve C'_r デ囲マレタ図形 , modul
デアールカラ II 定理 (8), (9) = ヨリ

$$M' \leq \log \phi \left(\frac{e^{\frac{\xi_r}{2p}}}{e^{\frac{\xi_{r_0}}{2p}}} \right) < \log 4 e^{\frac{\xi_r - \xi_{r_0}}{2p}} = \log 4 + \frac{\xi_r - \xi_{r_0}}{2p}$$

$$\text{即チ } M' < \log 4 + \frac{\xi_r - \xi_{r_0}}{2p} \quad (12)$$

(10), (11), (12) ヨリ

$$\pi \int_{r_0}^{r_r} \frac{d\sigma}{H(\sigma)} < \log 4 + \frac{\xi_r - \xi_{r_0}}{2p}$$

然ル $= w(z)$ ハ p -valent デアルカラ

$$(H) (\sigma) \leq 2p\pi$$

デアル。

$$\therefore \frac{1}{2p} (P_r - P_{r_0}) < \log 4 + \frac{\xi_r - \xi_{r_0}}{2p} \quad (13)$$

$$\text{然ル} = P_r = \log M(r) \quad (14)$$

又 $P_{r_0} = \log M(r_0)$ デアルが、任意ノ正数 $\varepsilon = \varepsilon$ 対シテ r_0 ヲ充分小サクトレバ、コレハ $p \log r_0 (1+\varepsilon)$ ヨリ小ナラシタ得 ($w(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots$ ナル展開形式ヨリ明ラカ)

$$\therefore P_{r_0} < p \log (1+\varepsilon) r_0 \quad (15)$$

又 ξ_{r_0} ハ $p \log (1-\varepsilon) r_0$ ヨリ大ナラシタ得。

$$\xi_{r_0} > p \log r_0 (1-\varepsilon) \quad (16)$$

又 ξ_r ハ $\xi_r \leq p \log \frac{r}{(1-r)^2}$ ナ満足スル。

何故ナラバ I ノ所論ガ明ラカナラヤリ $\sigma = P_r$ 上ニハ $z = re^{i\theta}$ = 對應スル点ヲ實際ニトルカラ C_r 上ニハ勿論ソノ對應点ガアル。然ルニ z ト ζ ノ對應ハ (5) = ヲリ

$$\zeta(z) = p \log \frac{e^{i\theta} z}{(e^{i\theta} - z)^2}$$

$$|\zeta(re^{i\theta})| \leq p \log \frac{r}{(1-r)^2} \text{ デアル}$$

終ッテ 勿論

$$\sum r \leq p \log \frac{r}{(1-r)^2} \quad (19)$$

デアル。

条件 (14), (15), (16), (19) を (13) に代入して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p} \{ \log M(r) - p \log r_0(1+\varepsilon) \} &< \log 4 \\ &+ \frac{1}{2p} \{ p \log \frac{r}{(1-r)^2} - p \log r_0(1-\varepsilon) \} \end{aligned}$$

$$\therefore \log M(r) < \log 4^{2p} + p \log \frac{r}{(1-r)^2} + p \log \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

$r_0 \rightarrow 0$ として $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば

$$M(r) \leq 4^{2p} \frac{r^p}{(1-r)^{2p}}$$

即ち $M(r) \leq 16^p \frac{r^p}{(1-r)^{2p}}$

$$\therefore |w(z)| \leq 16^p \frac{r^p}{(1-r)^{2p}} \quad (r = |z| < 1) \quad (B)$$

以上より (B) を証明し得た。

以上、研究に於て本學部城先生に色々御援助を戴
きまして。紙上厚くお禮申上げます。

参考文献

(1) M. L. Cartwright:

Some inequalities in the theory of
functions, Math. Ann., 111 (1935)

(2) R. Nevanlinna:

Eindeutige analytische Funktionen,
Springer, 1936.

(3) V. O. Teichmüller

Untersuchung über konforme und
quasikonforme Abbildung, Deutsche
Mathematik, 3 (1938)