



Title	K-空間（Kontorovitch空間）ニ就イテ
Author(s)	小笠原, 藤次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 240, p. 1192-1231
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74992
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1060. K-空間 (Kantorovitch 空間) = 就イテ

小笠原 藤次郎(廣島文理大)

本誌、数箇所ヲ述ベタ Kantorovitch-Vulich
ノ $\bar{K}_2$ -空間⁽¹⁾ノ性質、或ハベクトル束ノ性質ヲ纏メテ見ル、
先ヅ $\bar{K}_2$ -空間ノ定義ニツイテハ Banach 束トシテ考ヘル
ヲラバ、 K_6 型“正則”⁽²⁾ Banach 束ト同義デアル。(§1)
或ハ Kantorovitchノ B_2 空間⁽³⁾ト同ジ形ヲ持タセル=
ハ $|x| < |y|$ ノトキ $\|x\| < \|y\|$ ヲ $\|x\| \leq \|y\|$ ト置キカヘレ
ビヨイ。(§2) コノ方が“正則”ベクトル束トイフ條件ガト
レテ Banach 空間トシテ研究スルニ便利デアル。コレヲ K-
空間ト呼ブ。

K-空間ト $\bar{K}_2$ -空間トハ同義デアル。Banach 束
ガ K-空間ニナル條件ハ弱完備デアル (§3)。Banach 束
ガ正則 Banach 空間ニナル條件ハ、ソノ共軛空間ト共ニ K-
空間ニナルコト (§4) 前ハ Banach 束ガ弱コンパクト
デアル (§4)。Banach 束デハノルムデノ収斂ハ相對

(1) Kantorovitch-Vulich. Compositio Math 5
(1938) 120

(2) “正則”ハ Kantorovitchノ意味ニ、正則ハ Banach
空間ノ意味ニ使フ。

(3) L. Kantorovitch, Recueil Math 2 (1937) 153.

Kantorovitch (I) トシテ引用

一樣 (*) 收斂⁽⁴⁾ト同義デアルが、ノルム位相ト (t) 位相が一致スル。結局 $x_n \rightarrow 0$ トキ $\|x_n\| \rightarrow 0$ トナル。完全 Banach 束ヲ考ヘルが自然デアル。コレヲ K -空間ト呼バ、 K -空間ノ特性ハ、スベテノ有界線形汎函数ガ (0)-連続ノコト。或ハ任意ノ區間ガ列的 (或ハ位相的) 弱コンパクトナルコト。或ハコレガ弱コンパクトナルコトヲ特性ヅケラレド。⁽⁵⁾

又 K -空間ハ K_0 型 "正則" Banach 束ト同義デアル。コレヲ K -空間ガエルゴード論ノ他ノ研究ノ材料シテ用ヒラレルコトガ判ル。⁽⁵⁾ 可分 Banach 束 X ガ $\overline{X}$ ガ可分ノトキ X ガ正則ニナル⁽⁵⁾。又 $\overline{X}$ ガ可分ナ K -空間 X ハ正則デア⁽⁵⁾。 K -空間 X ハ、 $\overline{X}$ ノスベテノ (0)-連続線形汎函数ヨリナ⁽⁵⁾ Banach 束トシテ特性ヅケラレド。⁽⁵⁾ 共軛 Banach 束 $\overline{X}$ ガ K -空間ニナル條件ハ $\overline{X}$ ガ X ヲ含ム最小ノ正規イデアルトナルコトデア⁽⁵⁾。最後ノ §7 デハベクトル束ニ對シ §1—§6 ノ証明法ガ成立ツ場合ヲ考ヘ、Bochner 條件ヲ満足スルベクトル束⁽⁶⁾ トノ關係ヲ述ベド。

§1. $\mathcal{H}_2$ -空間

完全ベクトル束ニ於テ次ノ性質ヲ考ヘル。

4) Birkhoff. Lattice Theory: 117

5) 紙数誌 1022, p. 35.

6) 同上 1021

(i) $\{E_n\}$ を上方 (0) - 有界部分集合列で, Kantorovitch の意味で $(0) - \lim \{ \sup E_n \}$ が有限或は無限大
 のとき, E_n の有限部分集合 E'_n を適當にとると, $(0) - \lim \{ \sup E'_n \} = (0) - \lim \{ \sup E_n \}$ とする。

(ii) $\{E_n\}$ が $\sup E_n = +\infty$ となる部分集合列とする。 E_n の有限部分集合 E'_n を適當にとると

$$\sup \{ \sup E'_n \} = +\infty$$

(iii) E を任意の部分集合とする。 $0 =$ 収斂する任意の数列 $\{\lambda_n\} =$ 對し, E からとりだした任意の列 $\{x_n\}$ について $\lambda_n x_n \rightarrow 0$ (0) が成立つとき, E は (0) - 有界である。

(i), (ii) を満足する完全ベクトル束を “正則”, (i) を満足する完全ベクトル束を K_0^- 型 “正則”, (i), (iii) を満足する完全ベクトル束を K_0 型 “正則” と呼ぶ。⁽¹⁾

“正則” ベクトル束は K_0 型 “正則” であるが逆は必ずしも成立しない。 K_0^- 型 “正則” ベクトル束では有限要素への (0) - 収斂 (以後單に (0) - 収斂といへば, この意味である) は相對一致収斂と一致する。

Kantorovitch - Vulich⁽²⁾ は

定義 1.1. “正則” ベクトル束が, その各要素 = 実数 $\|x\|$ が對應シ

(1) L. Kantorovitch, *Recueil Math* 7 (1940)

以後 Kantorovitch (II) として引用する。

(2) Kantorovitch - Vulich, 前掲

$$(I) \quad \|x\| \geq 0, \quad x=0 \text{ のとき } \|x\| = 0$$

$$(II) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$(III) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \alpha \text{ は実数}$$

$$(IV) \quad |x| \leq |y| \text{ のとき } \|x\| \leq \|y\|$$

$$(VI)' \quad x_n \uparrow +\infty \text{ のとき } \|x_n\| \rightarrow +\infty$$

ヲ満足スルとき, $\bar{E}_2$ -空間ト呼ブ。

ト定義シタ。コノ定義デ“正則”ヲ K_b 或ハ K_b^- 型トシテモ
差支ヘタイコトハ後ニ判ル。ベクトル束ガ (I) - (IV) ヲモツ
Banach 空間ノとき *Banach* 束トイフ。 $\bar{E}_2$ -空間ハ常
Banach 束デアル。 $\bar{E}_2$ -空間ハ常ニ

$$(V) \quad x_n \downarrow 0 \text{ のとき } \|x_n\| \rightarrow 0$$

ヲ満足スルコトハ明カデアル。(VI)'ハマタ次ノ

$$(VI) \quad 0 \leq x_n \leq x_{n+1}, \quad n=1, 2, \dots \quad \|x_n\| \text{ が有界ノ} \\ \text{とき } \sqrt{x_n} \text{ が存在スル。}$$

トシテモ差支ヘタイコトハ明デアル。

定理1.1. *Banach* 束ガ K_b 型正則ノとき $\bar{E}_2$ 空間
デアル。

(証) 上述ノ注意カラ (VI) 成立ヲ証スルニ充分。 $\{x_n\}$
ヲ $0 \leq x_n \leq x_{n+1}, \quad n=1, 2, \dots \quad \|x_n\| \leq C$ ヲ満足スル
トスル。 $\{x'_n\}$ ヲ $\{x_n\}$ ノ任意ノ部分集合トスル。先ヅ
 $\frac{1}{2^n} x'_n \rightarrow 0(0)$ ヲ証スル。 $\|\frac{1}{2^n} x'_n\| \leq \frac{C}{2^n}$ ハ無限級数
 $\sum \frac{1}{2^n} x'_n$ ハ強収斂スル。

$$y_n = \sum_{p=n}^{\infty} \frac{1}{2^p} x'_p \text{ ト置クトキ } \|y_n\| \leq \sum_{p=n}^{\infty} \frac{C}{2^p} = \frac{C}{2^{n-1}}, \text{ 且ツ}$$

$y_{n+1} \leq y_n$. $\{y_n\}$ は 0 = 強収斂するから $y_n \downarrow 0$. 故 =

$\frac{1}{2^n} x'_n \leq y_n$ から $\frac{1}{2^n} x'_n \rightarrow 0(0)$ とする. $\{\lambda_n\}$ を λ_n

$\rightarrow 0$ とする任意の数列とする. $\lambda_n \downarrow 0$, $\lambda_n \leq \frac{1}{2}$ として差
をとり. この假定, m = 自然数, 増加列 $\{m_n\}$,

$1 < m_1 < m_2 < \dots$ を

$1 \leq p < m_1$ のとき $\lambda_p \leq \frac{1}{2}$,

$m_{n-1} \leq p < m_n$ のとき $\lambda_p \leq \frac{1}{2^n}$

とる様 = とり $x''_n = V(x'_p; 1 \leq p < m_n)$ と定まる.

$m_{n-1} \leq p < m_n$ のとき $\lambda_p x'_p \leq \frac{1}{2^n} x''_n$ とするから

$\lambda_p x'_p \rightarrow 0(0)$ が成立す. K_6 型 "正則" の定義から $\{x\}$
は (0) - 有界とする. 従って $V x_n$ が存在する. (証明)

この定理から $(VI)'$ の空間の完備性と同義 = するが K_6 型
"正則" としては定理 1.1 の一般 = 成立しない. この例と
して (C_0) を導くことが出来る.

Kantorovitch の σ -完全ベクトル束 = 對シ

定義 1.2. σ -完全ベクトル束の各要素 = 実数 $\|x\|$ が
對應シ, 上述の (I), (II), (III), (V), $(VI)'$ と (IV) の代り, 更
= これより強い.

$(IV)^+ \quad |x| < |y|$ のとき $\|x\| < \|y\|$

を満足するときは, B_2 -空間と呼ぶ.

と定義する. ⁽¹⁾

$(IV)^+$ が成立するとき, $|x| \leq |y|$ = 對シテ, ε を任意の正

(1) L. Kantorovitch (I)

線トスルトキ $\|y\| > 0$ ナラバ $\|x\| < (1+\varepsilon)\|y\|$ トナルカラ
 $\|x\| < \|(1+\varepsilon)y\| = (1+\varepsilon)\|y\|$ コレカラ $\|x\| \leq \|y\|$.
 $\|y\| = 0$ ノトキ 明ニ $\|x\| = \|y\|$ トナリ (IV) ガ成立ツ.

B_2 -空間ハ “正則” ベクトル束デアル.⁽¹⁾ 故ニ B_2 -空間ハ
 (IV)⁺ 成立ツ $\tilde{B}_2$ -空間トシテ特性ヲケラレル. 定義 1.2. デ
 ベクトル束ニ σ -完全ノ條件ヲ表面ニ出サナイ様ニスルニハ
 (VI)' ア (VI) ア置キ代ヘレバコイ. コレ等ノ事情カラ次ノ定義
 ヲ導入スルコトハ自然ト考ヘラレル.

定義 1.3. (I), (II), (III), (IV), (V), (VI) ヲ満足スルベクトル束ヲ K -空間トイフ.

K -空間ハ B_2 -空間ト (IV) ト (IV)⁺ デ異ツテキル. 然レ
 K -空間ハ $\tilde{B}_2$ -空間ト同義デアルト予想ガツク. コレハ §2
 デ証明スル.

§2. $\tilde{B}_2$ -空間ト K -空間ノ一致

X ヲ定義 1.1 ノ (I), (II), (III), (IV) ヲ満足スルベクトル束 (完全ハ假定シナイ) トスル. スベテノ正要素 $x \geq 0$ ニ
 對シ $f(x) \geq 0$ トナル有界線形汎函数⁽²⁾ ナヲ共軌空間 $\bar{X}$ ノ
 正要素トスルトキ共軌空間ハ完全 Banach 束デアル.
 束ニ $\bar{X}$ ヲ考ヘルト, X ハ $\bar{X} =$ ノルムヲケラレタベクトル束

(1) L. Kantorovitch (I)

(2) 有界トハ Banach 空間的意味トスル. 束的意味トシテモ差支ヘナイ. (Birkhoff, Lattice Theory (1940) 115. 定理 9.19.
 但シ我々ノ場合空間ヲ完備化シテ考ヘレバコイ)

トシテ埋藏サレテキル。 $X, \bar{X}$ / 要素ニツイテ次ノ補題が成立ツ。

$$\begin{aligned}\text{補題1. } \|x\| &= \text{l.u.b. } \{|f(x)|; \|f\| \leq 1\} \\ &= \text{l.u.b. } \{f(x); 0 \leq f, \|f\| \leq 1\}\end{aligned}$$

(証) 略

$$\begin{aligned}\text{補題2. } \|f\| &= \text{l.u.b. } \{|f(x)|; \|x\| \leq 1\} \\ &= \text{l.u.b. } \{|f|(x); 0 \leq x, \|x\| \leq 1\}\end{aligned}$$

(証) 略

$\bar{X}$ / 単位球ヲ X / 要素ニヨル弱位相デ位相化スルトビコムバクト Hausdorff 空間ニナル。従テ $\bar{X}$ / 単位球ノ正要素ノ全体ヲ I' トスルト $I' \in$ ビコムバクトナルコトが容易ニ判ル。 $f(x)$ ハ x テ固定シテ, 之ヲ I' 上ノ函数ト考ヘレトキ, 連続デアル。

補題3. $x_\delta \downarrow 0$ ナル directed set $\{x_\delta\}$ ガ X / 要素ニ弱収斂スルトキ $\|x_\delta\| \rightarrow 0$

(証) 上述ノ単位球 I' デ $f(x_\delta)$ ハ x_δ テ固定スルト f / 連続函数デアル。 $\{x_\delta\}$ / 弱収斂極限ヲ y トスレバ $f(y) \leq f(x_\delta)$, $f \in I'$ カラ $y \leq x_\delta$ 。コレカラ $y = 0$ ナルコトガ判ル。 Axiom 1 / 定理ヲ使ツテ, $f(x_\delta)$ ハ I' 上デ一様 $\rightarrow 0$ ニ収斂スル。従テ補題1カラ $\|x_\delta\| \rightarrow 0$ 。

補題4. $x_n \downarrow 0$ ナル $\{x_n\}$ ガ X / アル要素ニ弱収斂スルトキ $\|x_n\| \rightarrow 0$

(証) 補題3カラ

補題5. 定義1.3 / (V) (VI) ハ次ノ條件ト同義

アアル。

(K) $0 \leq x_n \leq x_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ $\|x_n\|$ が有界ノトキ $\{x_n\}$ ハアル要素 = 強収斂スル。

(証) (V) (VI) が満足サレルトキ $(\vee x_p) - x_n$ を考ヘ
ルトキ (V) カラ $\{x_n\}$ ハ $\vee x_p$ = 強収斂スル。逆 = (K) が
成立ツトキ, (VI) ノ成立ハ自明。 (V) ハ $\{x_1 - x_n\}$ ナル要素
列ヲ考ヘレハ容易ニ判ル。

補題5カラ K-空間ノ定義ヲ

定義2.1. (I), (II), (III), (IV), (K) ノ成立ツベクトル
束ヲ K-空間トイフ。

條件 (K) = 於テ強収斂ヲ弱収斂ヲ置キカヘテモヨイ。コ
レハ條 = 使フ。

K-空間ノ例トシテ

例1. 抽象 L-空間

$x \geq 0$, $y \geq 0$ ノトキ $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ を満足ス
ル Banach 束ヲ抽象 L-空間トイフ。條件 (K) ノ成立が
容易ニ判ル。 ($x \wedge y = 0$ ノトキ $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ ト
シテモ同義ノ抽象 L-空間 = ナル) 尚コレハ B_2 -空間ナ
ル。

例2. ノルムが狭義ノ單調性ヲモツ Banach 束

(SMB 束)

任意ノ正数 ε = 對シ正数 δ が存在シテ $x, y \geq 0$, $\|x\| \leq 1$,
 $\|x + y\| \leq 1 + \delta$ カラ $\|y\| < \varepsilon$ ガデル Banach 束ヲ SMB
束トイフ。コレモ條件 (K) を満足スル。⁽¹⁾ — 脚註次葉 —

コレハ B_2 -空間デアル。

例3. *uniformly convex* + *Banach* 束。

(K)ヲ満足スルコトハ, $n, m \rightarrow +\infty$ ノトキ $\|x_n\|$,

$\|x_m\|$, $\|\frac{x_n + x_m}{2}\|$ が同一ノ極限ヲモツコトカラ,

$\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ トナルコトカラ判ル。尚コレハ B_2 空間
デアル。

定理2.1. 弱完備 *Banach* 束ハ K -空間デアル。

(証) 条件(K)ノ要素列 $\{x_n\}$ ハアル要素ニ弱収斂ス
ル。コレハ $\forall x_n$ ナルコトが判ルカラ, 補題4ヲ使ツテ (K)
ノ成立が判ル。

§3 デ定理2.1ノ逆が成立ツコトヲ証明スル。従ツテ
 K -空間ノ例トシテ

例4. *Banach* 空間トシテ正則 + *Banach* 束。
ヲ導ゲルコトが出来ル。

補題6. K -空間ハ σ -完全 *Banach* 束デアル。

(証) σ -完全ハ (VI) カラ。マタ $x_n \rightarrow x_0(0)$ ノトキ
 $\|x_n - x_0\| \leq \epsilon_n$, $\epsilon_n \downarrow 0$ ナル ϵ_n が存在スルカラ (V) カ
ラ (0)-収斂ハ強収斂ヲ意味スル。 $m > n$ ノトキ $\|x_n - x_m\|$
 $\leq \frac{1}{2^n}$ ナル基本列 $\{x_n\}$ ハ (VI) ヲ使ツテ (0)-収斂, 従ツテ
強収斂スルコトが容易ニ示サレル。コレカラ任意ノ基本列
が強収斂, 即チ空間が *Banach* 空間ニナル。

補題7. X ヲ K -空間トスル。 E ヲ任意ノ部分集合トシ
 $\sup E$ ハ有限或ハ無限大トスル。 E ノ可附着部分集合 E' が

(1) *Birkhoff*, 前掲, 118。

存在して $\sup E' = \sup E$.

(証) E が正要素カラナリ $x, y \in E$ / トキ $x \cup y \in E$ ナル場合ニ証明スレバ充分. コノ假定ノモトニ $\lambda = l, u, b$.
(1) $\|x\|, x \in E$ / トスル. $\lambda = +\infty$ / トキ $x_n \in E$ 7
 $\lambda = \lim x_n$ ナル様ニトルト $\sup \{x_n\} = +\infty$ トナル.
 $\lambda < +\infty$ / トキ E_1 7 E / 可附番集合 / l, u, b デイルムガ
 λ = 等シイモノノ全体トスル. E_1 / ナカニ $\sup E$ カ存在
シナイトキハスベテ, 第一級, 第二級ノ順序数 α = 對シ,
 E_1 カラ $\{x_\alpha\}$ 7 $x_\alpha < x_\beta, \alpha < \beta$ ナル如ク選バレル. 通常ニ
正量 ε 7 トルトキ $\|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\| \geq \varepsilon, \alpha_{n+1} > \alpha_n$. 然
ルニ $\|x_\alpha\| = \lambda$. コレハ (K) ト矛盾スル.

定理 2.2. K -空間ト $\bar{K}$ -空間トハ本質的ニハ同シモノ
デアル.

(証) $\bar{K}$ -空間ハ K -空間ニナルコトハ §1 デ述ベタ.
 X 7 K -空間トスル. §1 / (i) / 成立ヲ示スタメ, コノ場
合ノ記号ヲ使ツテ, $a_n = \sup E_n$ トオリ. 補題7カラ E_n
ノ有限部分集合 E'_n 7 $x_n = \sup E'_n$ ト置クトキ $\|a_n - x_n\|$
 $\leq \frac{1}{2^n}$ ナル様ニトレル. (0)- $\lim a_n$ ガ有限, 無限大トニ
カニハラズ (0)- $\lim x_n$ = 等シイコトガ判ル. §1 / (ii) ハ
 E_n ガ正要素ノミカラナル場合ニ証スレバヨイ. E_n / 部分
集合 E'_n 7 $\sup E'_n \geq n$ ナルヤウニトレバ $\sup \{\sup E'_n\}$
 $= +\infty$ トナル. 完全デアールコトハ補題7カラ判ルカラ X ハ
“正則” トナル.

§1. = 於テ述ベタ如ク定義 1.1 デ“正則”ヲ K_b 型

トシテヨイ。

§3. K -空間ノ性質, K -空間

補題1. Banach 束ガ K -空間トナル條件ハ任意ノ可
分部分 Banach 束ガ K -空間トナルコトデアアル。

(証) K -空間ノ條件カラ自明。

補題2. K -空間ノ任意ノ正規イデアルハ K -空間デア
アル。

(証) 自明

定理3.1. K -空間ハ弱完備デアアル。

(証) X ヲ K -空間トスル。 $\{x_n\}$ ヲ X ノ弱基本列トス
ルトキ $f \in \overline{X} =$ 對シテ $f(x_n) \rightarrow f(y)$ ナル $y \in X$ ノ存在
ヲ証明スレバ充分、 X ガ可分。従ツテ單位 e ヲ $\varepsilon < x_n$ ガ e
ニ關シテ有界ノトキニ証明スレバヨイ。 $\{\Omega, e, \mu(E)\}$
デ X ノ表現アール空間 Ω 上ハ e ヲ恒等的 $= 1$ ニスル X ノ表
現デ、 $\mu(E)$ ハベクトル値測度函数ヲ表スモノトスル。即
チ Borel 集合 E ノ特性函数ト對等ト連続函数ヲ表現函数ト
スル X ノ要素ヲ $\mu(E)$ ト定ナルノデアアル。 $\mu(E)$ ハ (0) -收歛
デ完全加法的デアアル。 X ガ可分ノトキ正要素 $g \in \overline{X}$ ヲ適當ニ
トルト $g(|x|) = 0$ カラ $|x| = 0$ トナル。

今 $m(E) = g(\mu(E))$ ト置クト $\mu(E)$ ハ Ω ノ測度函
数デ $m(E) = 0$ ト E ガ第一種ノ集合トハ同義ニナル。コノ
性質ガ以下ニ重要ト役割ヲスル。 $f \in \overline{X} =$ 對シ $m_f(E) = f(\mu(E))$
スルトキ $m_f(E)$ ハ $m(E)$ ニ關シテ絶対連続デアアルカラ
Radon-Nikodym 定理カラ (今述ベク注意ヲ願

成シテ)

$$m_f(E) = \int_E F(\beta) dm$$

トナル $\mathcal{B}$ 上ノ連続函数 (第一種集合ヲ除イテ有限値ヲトル)
 $F(\beta)$ カ一意ニ定マル。コノトキ $f(x)$ ハ (0)-連続線形汎函数
 デアルカラ $x \in X$ ノ表現函数ヲ $x(\beta)$ トスルト

$$(1) \quad f(x) = \int_{\mathcal{B}} x(\beta) F(\beta) dm$$

カ成立ツ。任意ノ有界連続函数 $F(\beta)$ = 成シテハ, 逆 = (1)
 = ヨツテ定義サレル線形汎函数 f ハ $\overline{X}$ = 属スル。コノ性質ガ
 アルタメ, 可積分函数空間ノ弱完備性カラ, スベテノ有界ト
 $F(\beta)$ = 應ダル $f \in \overline{X}$ = 成シテ

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{B}} x_n(\beta) F(\beta) dm \\ = \int_{\mathcal{B}} \xi(\beta) F(\beta) dm$$

トナル。第一種集合ヲ除イテ有限値ヲトル連続函数 $\xi(\beta)$
 カ存在スル。 $\xi(\beta)$ カ X ノ要素ノ表現函数デアルコトト任意
 $f \in \overline{X}$ = 對シ (2) カ成立ツコトヲ云ハバヨイ。

$f(P_n x)$ ($P_n x$ ハ正規イデヤル $\mathcal{O}_n$ = x ノ射影
 ヲ表ス) ハ x ノ (0)-連続線形汎函数デアルコトニ注意ス
 ルト (2) = 於テ $\xi(\beta) \geq 0$ トシ, f ガ正線形汎函数 従ツテ
 $F(\beta) \geq 0$ ノトキニ証明スルバ充分デアル。 $\{\|x_n\|\}$ ハ有
 界列ニナルカラ $\|x_n\| \leq 1$ トシテ差支ヘナイ。 $0 \leq f \in \overline{X}$,

$\|f\| \leq 1$ とシテ、之 = 應ズル $F(\xi)$ カラ $F_p(\xi) = \min(F(\xi), p)$ ノ作リ、 $F_p(\xi) =$ 應ズル $\bar{X}$ ノ要素ヲ f_p デ表ス。 $\xi_N(\xi) = \min(\xi(\xi), N)$ トスレバ $\xi_N(\xi)$ ハ有界デアルカラ $\bar{X}$ ノ要素ノ表現函数デアル。コノ $\bar{X}$ ノ要素ヲ ξ_N デ表ス。

$$f_p(\xi_N) = \int_{\Omega} \xi_N(\xi) F_p(\xi) dm \leq \int_{\Omega} \xi(\xi) F_p(\xi) dm \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} f_p(x_n) \leq 1$$

コノ式カラ $p \rightarrow \infty$ ノ場合ヲ考へルト $f(\xi_N) \leq 1$ 。任意ノ $\bar{X}$ ノ正要素 f , $\|f\| \leq 1$ = 對シコノ不等式ハ成立ツカラ $\|\xi_N\| \leq 1$ 。 K -空間ノ性質 (VI) カラ $\forall \xi_N$ ハ存在スル。ソノ表現函数ハ明カニ $\xi(\xi)$ デアル。 $\xi = \sum \xi_N$ トオク。

$$(3) \quad f_E(x) = \int_E x(\xi) F(\xi) dm = \int_{\Omega} x(\xi) F_E(\xi) dm.$$

$$\text{コノ } F_E(\xi) = F(\xi) \times (E \text{ ノ特性函数})$$

ト置クト、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_E(x_n)$ ハ存在スルカラ、 f ノ固定シテ考へルト Lebesgue ノ定理⁽¹⁾ヲ使フト。集合函数 $\{f_E(x_n)\}$, $f_E(\xi)$ ハ *equi-absolutely continuous* デアル。正数 ε ノ任意ニトルトキ、正数 δ ハ存在シテ $m(E) < \delta$ ノトキ、スベテ、 n ニツイテ $|f_E(x_n)| < \varepsilon$, $|f_E(\xi)| < \varepsilon$ トナル。
 $E_p = [F(\xi) \leq p]$ トスルトキ p ノ充分大ニトレバ $m(\Omega - E_p) < \delta$ トナル。故ニ

$$f(x_n) - f(\xi) = \{f_{E_p}(x_n) - f_{E_p}(\xi)\} + \{f_{\Omega - E_p}(x_n) - f_{\Omega - E_p}(\xi)\} \\ = \left\{ \int_{\Omega} x_n(\xi) F_{E_p}(\xi) dm - \int_{\Omega} \xi(\xi) F_{E_p}(\xi) dm \right\}$$

$$+ \{ f_{\Omega - E_p}(x_n) - f_{\Omega - E_p}(\xi) \}$$

$$\text{故} \lim_{n \rightarrow \infty} \int x_n(\xi) F_{E_p}(\xi) dm = \int_{\Omega} \xi(\xi) F_{E_p}(\xi) dm$$

トナルカヲ, $\lim f(x_n) = f(\xi)$ が証明ナレル. (証明終
畢)

コレカヲ

定理3.2. Banach 束が K -空間ニナル條件ハ弱完
備デアル。

故ニ弱完備 Banach 束ヲ K -空間ト定義シテモヨ
イ。

定理3.3. K -空間, (0) -有界集合ハ制限的弱コンパクト
デアル。(1)

(注意) 弱コンパクトトハ列的弱コンパクトノ意味。従ッ
テ勿論位相的ニモ弱コンパクトデアル。後ヲ (0) -有界集合
ハ制限的弱コンパクトナルコトヲ証明スル (§)

(証) X が可分ヲ單位ビテモテ, $\{x_n\}$ が $0 \leq x_n \leq e$
ノトキ $\{x_n\}$ ノ弱収斂部分列ノ存在ヲ証明スルベヨイ。
表現 $(\Omega, e, \mu(E))^{(2)}$ ヲ考ヘル。定理3.1ノ証明中ノ記
法ヲ使フト

増頁脚註 (1) Saks. Trans. Amer. Math. Soc.
35(1933) 549-556.

脚註

(1) 小笠原藤次郎, 紙數誌, 1035 定理1.

(2) 定理3.1ノ証明中.

$$m_f(E) = \int_E F(f) dm$$

$$(1) \quad f(x) = \int_{\Omega} x(f) F(f) dm$$

$0 \leq x_n \leq 1$ カラ $0 \leq x_n(f) \leq 1$. 有界な $F(f) = \sum$, $\{x_n\}$ の部分列 $\{x'_n\}$ と $\xi(f)$ が存在し

$$(2) \quad \lim f(x'_n) = \int_{\Omega} \xi(f) F(f) dm$$

明 = $0 \leq \xi(f) \leq 1$. 故 = $\xi(f)$ は X の要素, 表現函数である. $\therefore X$ の要素が ξ となる. (2) が任意の $f \in \overline{X} = \sum$ に対して成立つことを証明する. $F(f) \geq 0$ とき, 即ち $f \geq 0$ とき = 証明すればよい. 定理 3.1. の証明の最後の部分ヲ繰返シ述べればよいことになる. (証明終り)

定理 3.3 の証明では (VI) を使っていよいよ. $\therefore$ 注意の後が必要となる. 定理 3.3 カラ, $\therefore$ 逆の問題ヲ考へるコトが自然である.

定理 3.4. Banach 束 X の任意の区間が弱コンパクト (列的或ハ位相的) となる条件は X が σ -完全で (V) が成立つコトである. 或ハ (V) の代りに之と同等

(V)' $x_n \downarrow 0$ とき $\{x_n\}$ は 0 に弱収束する.

トシてよい.

(注意) X の σ -完全と (V) とは等価である

$0 \leq x_{n+1} \leq x_n$, $n = 1, 2, \dots$ とき x_n は

極(弱)収斂スル。

コトニナル。

(証) 必要ナルコトノ証。 $0 \leq x_{n+1} \leq x_n$, $n=1, 2, \dots$ ノトキ $\{x_n\}$ ノ少クトモ一ツノ弱位相デノ集積点ガ存在スル。コレヲ与ヘタルト, $0 \leq f \in \overline{X}$ 示シ明カニ $f(\xi) \leq f(x_n)$, $\lim f(x_n) = f(\xi)$ ガ成立ツ。コレカラ与ヘタル $\{x_n\}$ ノ弱収斂極限デ $\xi = \wedge x_n$ ナルコトガ判ル。コレカラ X ハ σ -完全性(V)ガ成立ツコトガ判ル。充分ナルコトヲ証明スルマヘニ次ノ定義ヲ設ケル。

定義3.1. (V)ヲ満足スル σ -完全 Banach 束ヲ K^- -空間トイフ。

K^- -空間ガ (VI)ヲ満足スルトキ始メテ K^- -空間ニナル。 K^- -空間ノ任意ノ区間ガ弱コンパクトナルコトヲ示セバヨイ。先ヅ次ノ補題カラ始メル。

補題9. K^- -空間ハ完全ベクトル束デアアル。

(証) E ヲ正要素カラナル任意ノ(0)-有界集合トスル。 $x, y \in E$ ノトキ $x \vee y \in E$ トシテ差支ヘナイ。 $\lambda = \beta, \alpha, b$. $(\|x\|; x \in E)$ ト置クト λ ハ有限。 E ノ可附番部分集合ノ β, α, b デノルムガ入トナル E ノ全体ヲ E_1 トスル。
§2. 補題9ノ証明ヲ繰返スコトニヨツテ E_1 ノうちニ $\sup E$ ガ存在スルコトガ判ル。(コノ場合(VI)ヲ使ハナイデスルコトハ、空間ヲ最初カラ Banach 束トシタコトカラ)。

定理3.5. K^- -空間ハ K_6 型"正則"ベクトル束デ

アル。

(証) §1 / (i) / 成立ヲ証明スレバヨイ。方法ハ定理 2.2 / 証明 / 初メ / 部分ト同ジ。(証終リ)

K -空間ハ K_0 型正則 Banach 束トシテ特性ツケラレル。 K -空間ハ必ずシモ K -空間デナイ。例トシテ既述ノ如ク (C_0) ヲトレバヨイ。明カニ

補題4. K -空間デハ

(V)* $x_\delta \downarrow 0$ ナル directed set $\{x_\delta\}$ ニ對シ $\|x_\delta\| \rightarrow 0$

ユレカラ定理3.4ノ充分條件ノ証明ニイル。 X ガ可分デ單位 e ヲモテ $0 \leq x_n \leq e$ ノトキ $\{x_n\}$ カラ弱收斂部分列ノ存在ヲ示セバ充分デアル。コレハ定理3.3ノ証明ト同様ニ出來ル。(証終リ)

§4: 共軌空間ノ表現ブール空間

補題1. X ヲ Banach 束トスル。 X_0 ガ X ノ正規部分空間デ、 K -空間 且ツ $X_0 \perp X_0^\perp$ ニ直交スル X ノ要素が存在シナイトキハ $X_0 = X$ トナル。

(証) X_0 ガ正規イデマルナルコトヲ示セバ可。 $x \geq 0$ ガ $x = V(x_\alpha; 0 \leq x_\alpha \in X_0)$ ノトキ $\|x_\alpha\| \leq \|x\|$ カラ K -空間ノ性質ヲ使ツテ $x \in X_0$ トナルコトカラ明カデアル。

補題2. X ヲ σ -完全ベクトル束トスル。(0)-連続線形汎函数 $f(x), g(x)$ ガ $f \wedge g = 0$ ノトキ X ノ任意ノ正要素 $a =$ 對シ $a = a_1 + a_2, a_1 \wedge a_2 = 0, f(a_2) = 0 = g(a_1)$

ナル a_1, a_2 が存在スル。

(註) a が X の単位トシテ証明スレバ充分。 X の主イデヤルノ作る表現バール空間ヲ Ω トシ $(\Omega, a, \mu(E))^{(1)}$ ヲ考ヘル。 $m_f(E) = f(\mu(E))$, $m_g(E) = g(\mu(E))$ トスル
ト $f(x) = \int_{\Omega} x(\xi) d m_f$, $g(x) = \int_{\Omega} x(\xi) d m_g$ トナル。

$f \wedge g = 0$ ハ $m_f \wedge m_g = 0$ ト同義デアアル。コレカラ基本開集合 Ω_1, Ω_2 , $\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega$ が存在シ $m_f(E \cap \Omega_2) = 0$, $m_g(E \cap \Omega_1) = 0$ トナル。 Ω_1, Ω_2 の特性函数ヲ表現函数トスル X の要素ヲ a_1, a_2 トスレバ, コレが上述ノ性質ヲモツコトハ明カデアアル。(証終リ)

以下本 § = 於テ明カニ断ラナイ限り X ハ K -空間トスル。

定義4.1. A が X の任意ノ部分集合トスル。

$A^+ = \{f; |f|(|x|) = 0, x \in A, f \in \bar{X}\}$ ト定ナル。

A が正規部分空間ノトキ, 定義ノ下カテ $|f|(|x|) = 0$ 1代リ $f(|x|) = 0$ 或ハ $f(x) = 0$ トシテヨイコトハ明カデアアル。又 A が主イデヤル $\mathcal{O}(2)$ ノトキハ e = 開スル特性要素 e_i ノ全体ヲ考ヘ $f(e_i) = 0$ トシテヨイ。

定義4.2. B が $\bar{X}$ の任意ノ部分集合トスルトキ,

$B^* = \{x; |f|(|x|) = 0, f \in B, x \in X\}$ ト定ナル。

コレニツイテ定義4.1ノトキト同様ニ注意ヲナスコト

(1) a が恒等的ノ表現スル x の表現。ベクトル値測度函数ハ基本開集合ヲ含ム最小ノ Borel 族ヲ定義サレル。

が出来る。

補題3. A^+, B^* は夫々 $\overline{X}, X$ の正規イデアルデアル。

(証) 定義から A^+, B^* が正規部分空間デアルコト明カデアル。 $g \in \overline{X}$ 7 $g = \vee (f_\alpha; 0 \leq f_\alpha \leq g, f_\alpha \in A^+)$ トスルトキ g , 定義から $g(|x|) = 0, x \in A$ が成立ツカラ $g \in A^+$ 即チ A^+ の正規イデアルニナル。次ニ

$y = \vee (x_\alpha; 0 \leq x_\alpha \leq x, x_\alpha \in B^*)$ トスルトキ, X ハ K -空間デアルカラ, 可附番個ノ x_α , 例へバ $\{x_n\}$ ノ $l.u.b.$ ニナル。茲ニ $x_n \leq x_{n+1}$ トシテヨイ。 $\{x_n\}$ ハ y ニ強収斂スル。從テ $|f|(x_n) = 0, f \in B$ ノトキ $f(y) = 0$ トナルカラ $y \in B^*$, 即チ B^* の正規イデアルデアル。

補題4. $\mathcal{O}$ が X の正規イデアルノトキ $\mathcal{O}^{+*} = \mathcal{O}$

(証) 明カニ $\mathcal{O}^{+*} \supset \mathcal{O}$ 。 $\mathcal{O}^{+*} \neq \mathcal{O}$ トスルト, $\mathcal{O}^{+*}$ が正規イデアルデアルカラ $\mathcal{O}^{+*}$, 正要素 $x > 0$ が存在シテ $\mathcal{O}$ ノスベテノ要素ニ直交スル。Hahn-Banachノ定理ヲ使フト $f(x) > 0$ ナル $0 < f \in \mathcal{O}^+$ が存在スルコトが判ル。コレハ $f \in \mathcal{O}^{+*}$ ト矛盾スル。故ニ $\mathcal{O}^{+*} = \mathcal{O}$ トナル。

補題5. $\mathcal{L}$ が $\overline{X}$ の正規イデアルノトキ $\mathcal{L}^{*+} = \mathcal{L}$ 。

(証) $\mathcal{L}^{*+} \supset \mathcal{L}$ ナルコトハ明カデアル。 $\mathcal{L}^{*+} \neq \mathcal{L}$ トスルト, $\mathcal{L}^{*+}$ が正規イデアルデアルカラ, $\mathcal{L}^{*+}$ 正要素 $g > 0$ が存在シテ, $\mathcal{L}$ ノスベテノ要素ト直交スル。 $g > 0$ ノ定義から $g(a) > 0$ ナル X ノ正要素 a が存在スル。コレニ a ハ $0 \leq b < a$ ノトキ $g(b) < g(a)$ ト假定シテヨイ。(何者、 $0 \leq a_\alpha, a_\beta \leq a, g(a) = g(a_\alpha) = g(a_\beta)$ ノトキ

$g(a) - g(a_2 \wedge a_p) = g((a - a_2) \vee (a - a_p)) \leq g(a - a_2)$
 $+ g(a - a_p) = 0$ カラ $g(a_2 \wedge a_p) = g(a)$ トナレ. コレ
 カラ a_2 が上述 a の性質ヲモツカラ. 今 f テ L の任意,
 正要素トスル. $f \wedge g = 0$ カラ, 補題 2 = ヨリ $a = a_1 + a_2$,
 $a_1 \wedge a_2 = 0$, $f(a_2) = 0 = g(a_1) + \nu a_1$, a_2 が存在
 スル. a の性質カラ $a = a_2$ トナレ. 故ニ $a \in L^*$, コレハ
 $g \in L^*$ ト示值スルカラ $L^* = L$ デナレバナラヌ.
 (証明終)

$X, \overline{X}$ のイデアルノ間ニ次ノコトガ成立ツ. $A \rightarrow A^{+*}$,
 $B \rightarrow B^{*+}$ ハ Birkhoff の closure operation デ,
 閉子集ノ集合ガ正規イデアルト同義ニナル. A ノ生成スル, 即
 チ A ヲ含ム, 最小ノ正規イデアルハ A^{+*} デアル. $B = \emptyset$ イテ
 モ同様.

$f < g$ ヲ $g(x) = 0$ ノトキ $f(x) = 0$ (即チ f ハ g = ツイ
 テ絶対連続) ト定義スルコトト $f \in \mathcal{O}(g)$ ト定義スルコト
 ガ同義ニナル. X ノ要素ニツイテモ同様デアル. X ノ正規イ
 デアルノ作ル完全ブール代数, 表現ブール空間及ビソノ点ヲ
 $\mathbb{N}, \Omega, \mathcal{F}, \overline{X} = \mathcal{N} \cup \overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{F}}$ デ表ス. $\alpha \in \mathbb{N} = \mathcal{O}^{+1}$
 (α' ハ α の complement) ヲ對應サセルトキ, $\mathbb{N}$ ト $\overline{\mathbb{N}}$ ノ
 同型對應ヲ定メル. ソノ逆對應ハ $\alpha \in \overline{\mathbb{N}} = \mathcal{O}^{*+}$ = 對應サセ
 ル. (補題 4, 5) 従ツテ Ω ト $\overline{\Omega}$ トノ位相的對應ガ定マル.
 $\mathcal{F}$ = 對應スル点ヲ $\overline{\mathcal{F}}$ デ表ス.

先ヅ $X, \overline{X}$ ノ単位 $e, \overline{e}$ ヲモツ場合カラ始メル. X ノ表
 現 $(\Omega, e, \mu(E))$ ヲ考ヘル. $\overline{e}(\mu(E))$ ヲ $m(E)$ トスル

ト $m(E)$ は完全加法的測度函数デ, $m(E) = 0$ ハ E が第一種集合デアレコトノ同義デアレ, コレガ以下ノ推論ニ重要ナ役割ヲスル。 $m_f(E) = f(\mu(E))$ ト置クト, $m_f(E)$ ハ $m(E)$ ニ関シテ絶對連續デアルカラ

$$(1) \quad m_f(E) = \int_E F(\xi) d m$$

$$(2) \quad f(x) = \int_{\Omega} x(\xi) F(\xi) d m$$

ナル第一種集合ヲ除イテ有限値ヲトル連續函数 $F(\xi)$ ガ一意ニ定マル, 但シ $x(\xi)$ ハ x ノ表現函数デアル。

$\bar{X}$ ノ表現 $(\bar{\Omega}, \bar{e}, \bar{\mu}(E))$ ヲ考ヘル。 f ノ表現函数ヲ $f(\bar{\xi})$ トスルトキ, $\xi \rightarrow \bar{\xi} = \exists \eta \ E \rightarrow \bar{E}$ トスルト

$$(3) \quad f(\bar{\xi}) = F(\xi)$$

$$(4) \quad \bar{\mu}(E)(e) = \bar{e}(\mu(E))$$

トナルコトヲ証明スル, (3) ノ証明ハ $[f(\bar{\xi}) < \lambda] = [F(\xi) < \lambda]$ ガ對應スルコト, 結局 $\bar{\mu}[f(\bar{\xi}) < \lambda] = \mu[F(\xi) < \lambda]$ が對應スルコトヲ証明スレバヨイ。然ルニ (2) カラ

$$(5) \quad (f - \lambda \bar{e})_-(x) = \int_{[F(\xi) < \lambda]} x(\xi) F(\xi) d m$$

$$(5) \text{ カラ } \{ \alpha((f - \lambda \bar{e})_-) \}^{*'} = \alpha(\mu[F(\xi) < \lambda])$$

$$\text{一方 } \alpha((f - \lambda \bar{e})_-) = \alpha(\bar{\mu}[f(\bar{\xi}) < \lambda])$$

トナルカラ, $[f(\bar{\xi}) < \lambda]$ ト $[F(\xi) < \lambda]$ ノ對應, 従テ (3) ノ成立ガ判ル。

(4) $\wedge$ (2) カラ, $f \in \mathcal{M}(\bar{E})$, $\mu \in \mathcal{M}(E)$ トスルト, (4) / 各辺ハ何レモ $\mu(E)$ トナル。

一般ノ場ハ X / 正要素ノ集合 $\{e_\alpha\}$ ヲ

$$(i) \quad \alpha \neq \beta \quad \text{ノトキ} \quad e_\alpha \wedge e_\beta = 0$$

(ii) スベテ, $e_\alpha =$ 直交スル X / 要素ハ $0 =$ 限ル。

(iii) $\mathcal{M}(e_\alpha) =$ $\wedge X$ / 主イデヤルガ對應スル, (對應ハ勿論 $\mathcal{M}(e_\alpha) \rightarrow \{\mathcal{M}(e_\alpha)\}^{+1}$

ヲ満足スル様定メルコトガ出来ル。 $\{\mathcal{M}(e_\alpha)\}^{+1} = \mathcal{M}(\bar{e}_\alpha)$ ナル $\bar{e}_\alpha$ ヲトリ $\{\bar{e}_\alpha\}$ ヲ作ルト (i), (ii), (iii) = 對應シタ性質ヲモツ。 $\{(\mathcal{B}_\alpha, e_\alpha, \mu_\alpha(E))\}$ π 基本開集合 $\mathcal{B}_\alpha$ / 特性函数ガ e_α / 表現函数トナル X / 表現デ, $\mu_\alpha(E)$ $\pi \mathcal{B}_\alpha$ / ベクトル値測度函数トスル。 $\bar{e}_\alpha(\mu_\alpha(E)) = m_\alpha(E)$ トスルトキ $m_\alpha(E)$ $\wedge \mathcal{B}_\alpha$ / 測函数デアアル。 $f \in \mathcal{M}(\bar{e}_\alpha) =$ 於ケル射影ヲ f_α π 表シ, $f(\mu_\alpha(E)) = m_{\alpha, f}(E)$ トスルト, (i), (2) = 對應シテ

$$(b) \quad m_{\alpha, f}(E) = \int_{\mathcal{B}_\alpha} F_\alpha(\bar{f}) d m_\alpha$$

$$(c) \quad f(x_\alpha) = \int_{\mathcal{B}_\alpha} x_\alpha(\bar{f}) F_\alpha(\bar{f}) d m_\alpha, \quad x_\alpha \in \mathcal{M}(e_\alpha)$$

ガ成立ツ連續函数 $\{F_\alpha(\bar{f})\}$ ガ定マル。コレカラ定マル $\mathcal{B}$ 上ノ連續函数ヲ $F(\bar{f})$ トスル。一方 $\{(\mathcal{B}_\alpha, \bar{e}_\alpha, \mu_\alpha(E))\}$ ヲ考ヘルトキ $f \in X =$ 對シ, π / 表現函数ヲ $f(\bar{f})$ トスルト。容易 $= f(\bar{f}) = F(\bar{f})$ ナルコト及ビ

$$\alpha \neq \beta \quad \text{ノトキ} \quad \mu_\alpha(E)(e_\beta) = \bar{e}_\alpha(\mu_\beta(E)) = 0$$

$$\text{及ビ } \bar{\mu}_\alpha(\bar{E})(e_\alpha = \bar{e}_\alpha(\bar{\mu}_\alpha(E)) = m_\alpha(E)$$

が知ラレル。マタ

$$(8) f(x) = \sum_\alpha \int_{\Omega_\alpha} x(f) F(f) dm_\alpha$$

ト書カレル。但シ $\sum_\alpha$ ハ可附番順ノ項ノミヲイコト及ビソノ絶對收斂ヲ表ス。

次ニ、更ニ $\bar{X}$ モ K -空間 (共軌空間ヲ (VI) が成立ツカラ K -空間トシラモ同義) ノトキ $\bar{X}$ ハ如何ニ表現サレルカヲ調べル。

先ツ Ω ト $\bar{\Omega}$ ノ点 $f, \bar{f}$ ヲ恒等視シ $\bar{\Omega}$ ノ代リニ Ω ト書ク。然テ $\bar{\mu}_\alpha(\bar{E})$ ノ代リニ $\bar{\mu}_\alpha(E)$ ト書ク。(7) カラ $\bar{\mu}_\alpha(E)(x) = \int_E x(f) dm_\alpha$, 特ニ x ヲ e_α トスレバ $\bar{\mu}_\alpha(E)(e_\alpha) = m_\alpha(E)$. x ヲ $\bar{X}$ ノ要素ト考ヘ $f(x)$ ノ代リニ $x(f)$ トカクト

$$(9) x(\bar{\mu}_\alpha(E)) = \int_E x(f) dm_\alpha$$

$$(10) x(f) = \sum_\alpha \int_{\Omega_\alpha} x(f) F(f) dm_\alpha$$

トナル。

次ニ $\xi \in \bar{X}$ ナル任意ノ ξ ニ對シ $\xi(\bar{\mu}_\alpha(E)) = m_{\alpha, \xi}(E)$ トスレト, $m_{\alpha, \xi}(E)$ ハ $m_\alpha(E)$ ニ關シテ絶對連續ナルカラ

$$(11) m_{\alpha, \xi}(E) = \int_E \xi_\alpha(f) dm_\alpha$$

ナル Ω_α 上ノ連續函數 $\xi_\alpha(f)$ が一意ニ定マリ, コレカラ

$\mathcal{L}$ 上の連続函数 $\xi(f)$ が一意に定まる

$$(12) \quad \xi(f) = \sum_{\alpha} \int_{\mathcal{L}_{\alpha}} \xi(f) F(f) d\mu_{\alpha}$$

トナル。

X が K -空間, $\overline{X}$ が K -空間 (K -空間トナルコトト同義) ノトキ補題1ヲ使フ

定理4.1. K -空間ノ共軛空間が K -空間ノトキ, コノ K -空間ハ正則 Banach 空間デアル。(1) コトカ判ル。共軛 Banach 束が K -空間トナル条件ヲ種々考へルト正則 Banach 空間トナル条件カ得ラレル。例ハバ

定理4.2. 局所弱コンパクト Banach 束ハ正則 Banach 空間デアル。

(註) X が局所弱コンパクトノトキ弱完備デカラ X ハ K -空間デアル。 X が局所弱コンパクトノトキ $\overline{X}$ 局所弱コンパクトトナルトノ定理ヲ使ハバ $\overline{X}$ K -空間トナル。故ニ前定理ニヨリ X ハ正則 Banach 空間トナル。或 $\overline{X}$ ノ局所弱コンパクトヲ使ハズニ次ノ様ニシテ $\overline{X}$ が K -空間トナルコトヲ証明シラモヨイ。

X ノ単位球ノ正要素ノ全体ハ $\overline{X}$ ノ要素ノ弱位相デコンパクトデアルカラ §2. 補題3ノ証明法ニヨリ, Diniノ定理ヲ使ツテ $f_n \downarrow 0$ ノトキ $\|f_n\| \rightarrow 0$ ガ成立ツ。(VI) ハ共軛 Banach 束ノ端ニモツ性質デカラ $\overline{X}$ が K -空間トナル。

(1) Banach 束 X が正則ナル条件ハ X 及ビ $\overline{X}$ が K -空間トナルコトデアル。(定理3.2)

(後着ノ方法デハ位相的弱コンパクトノ意ニ解シテ定理ノ成立スルコトが判ル)。

定理4.2ハ局所弱コンパクト(列的デモ位相的デモ)ハ局所弱ビコンパクトト同義ニナルコトヲ示ス。

定理4.3. 可分共軌空間ヲモツ K -空間ハ正則 Banach 空間デアアル。

(証) K -空間ハ弱完備ナルコトニ注意スレバ、定理ノ條件カラ對角線的方法ニコツテ、局所弱コンパクトニナリ、前定理カラ正則 Banach 空間ニナル。

X ヲ K -空間トシ、 X ヲ $\overline{X}$ ニ埋藏シテ考ヘルト

定理4.4. X ヲ K -空間トスル。 X ハ $\overline{X}$ ノ (0) -連續有界線形汎函数ノ全体カラナル。

(証) $\overline{X}$ ノ (0) -連續線形汎函数ノ全体ヲ X_1 トスルト、明ニ $X \subset X_1$ 、 $x \in X$ 、 $\xi \in X_1$ ニ對シテ本節(10)、(12)が成立ツカラ補題1ヲ使ツテ $X_1 = X$ ナルコトが判ル。

定理4.4カラ定理4.1が出ル。又 K -空間 X ハ $\overline{X} =$ 於ケル正規イデマルデアアル。 X ニ束的單位 e ガアルトキ X ハ $\overline{X} =$ 於テ e ノ生成スル主イデマルデアアル。定理4.4ヲ逆が成立ツ。

定理4.5. Banach 束 X ガ $\overline{X}$ ノ (0) -連續、有界線形汎函数ノ全体ト一致スルトキ X ハ K -空間デアアル。

(証) $\overline{X}$ ハ完全ベクトル束デアアル。ソノ表現アール空間ヲ $\overline{E}$ トシ、表現 $\{(\overline{E}_\alpha, \overline{e}_\alpha, \mu_\alpha(\overline{E}))\}$ ヲ考ヘル。

f , 表現函数ヲ $f(\bar{z})$ トスル. $x \in X =$ 對シ $m_{\alpha, x}(\bar{E}) = \bar{\mu}_{\alpha}(\bar{E})(x)$ ト定義スルト $m_{\alpha, x}(\bar{E})$ ハ完全加法的デアアル.

且ツ $f(x) = \sum_{\alpha} \int_{\bar{\Omega}_{\alpha}} f(\bar{z}) d m_{\alpha, x}$ が成立ツ. X ハ明 = 完全ベクトル束デアアル. 故ニ $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$ 且 $\|x_n\|$ が有界ノトキ $\{x_n\}$ が或ル X ノ要素ニ弱收斂ナルコトヲ示セバヨイ. コノトキ $\lim f(x_n)$ が存在スルカラ

$$\xi(f) = \lim f(x_n)$$

$$\text{トスルト } \xi \in \bar{X}, \quad f(x_n) = \sum_{\alpha} \int_{\bar{\Omega}_{\alpha}} f(\bar{z}) d m_{\alpha, x_n},$$

$$m_{\alpha, x_n}(\bar{E}) \leq \|x_n\| \cdot \bar{\mu}_{\alpha}(\bar{E}) \text{ カラ}$$

$$m_{\alpha}(\bar{E}) = \lim m_{\alpha, x_n}(\bar{E})$$

トスルト $m_{\alpha}(\bar{E})$ ハ完全加法的デア

$$\xi(f) = \sum_{\alpha} \int_{\bar{\Omega}_{\alpha}} f(\bar{z}) d m_{\alpha}$$

トナル. $f_n \downarrow 0$ トスルト第一種集合ヲ除イテ $f_n(\bar{z}) \downarrow 0$. 且ツ第一種集合デハ $m_{\alpha}(\bar{E}) = 0$ トナレカラ $\xi(f_n) \rightarrow 0$ 即チ $\xi(f)$ ハ (0) -連続, 有界線形汎函数ニナル. 故ニ $\xi \in X$ デアル. $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$ トナルカラ x_n ハ ξ ニ弱收斂スル.

定理 4.6. K -空間ノ任意ノ区間ハ弱ビコムバクトデアアル.

(証) $(0, a)$ デ $0 \leq x \leq a$ ナル K -空間 X ノ点 x ノ集合ヲ表ス. X ノ要素ニヨル弱位相デ $(0, a)$ ガビコ

Δ パクトナルコトヲ証明スル。 $\overline{X}$ ノ単位球が $\overline{X} = \text{ヨル弱位相}$ デビ⁰コンパクトデアルカラ $(0, \alpha)$ ヲ $\overline{X} = \text{恒範}$ シタトキ $\overline{X} = \text{ヨル弱位相}$ デ開チテキルコトヲ示セバヨイ。 $(0, \alpha)$ ノ集積点ノ一ツヲ ξ トスルト, 任意ノ $0 \leq f \in \overline{X} = \text{對シ}$, 明カニ $0 \leq \xi(f) \leq f(\alpha)$, コレカラ $\overline{X}$ デ $0 \leq \xi \leq \alpha$. 故ニ定理 4.4 カラ $\xi \in X$ トナリ, $\xi \in (0, \alpha)$ が成立シ。

K^- -空間ニ對シテモ, 本節 (10), (12) カラ, X が K^- -空間ノトキ, X ハ $\overline{X} =$ 於テ正規部分空間ヲ作ルコトが判ルカラ 定理 4.6 ト同一法ヲ

定理 4.7. K^- -空間ノ任意ノ區間ハ弱ビコンパクトデアル。

が判ル。從¹テ K^- -空間ハ任意ノ區間ガ弱ビコンパクトト Banach 束トシテ特性ダケラレル。(定理 3.4). 換言スレバ Banach 束ノ任意ノ區間ガ弱ビコンパクトト任意ノ區間ガ弱コンパクト(列的或ハ位相的)ハ全く同義デアル。

§ 5. 共軛空間ガ可分ト Banach 束

X ヲ Banach 束トシ, X ノ共軛 Banach 束 $\overline{X}$ ガ可分トスル。 $\overline{X}$ ノ単位球デ稠密ト可附着集合ヲ $\{f_n\}$ トスル。

$\xi \in \overline{X}$ ノ任意ノ要素トスルト, *Idelly*ノ定理ヲ使ヘバ, ξ ハ X ノ要素列 $\{x_n\}$ ノ弱極限ニナルコトガ知ラレル。(柯着, x_n ヲ $\xi(f_1) = f_1(x_n), \dots, \xi(f_n) = f_n(x_n)$, $\|x_n\| \leq \|\xi\| + 1$ トスレバヨイ。) $\overline{X}$ ハ共軛 Banach 束ヲ

アルカラ完全ナル, 且ツ単位が存在スル. 之ヲ $\bar{E}$ トスル.

$\bar{X}$ ノ表現 $(\bar{\mu}, \bar{e}, \bar{\mu}(\bar{E}))$ ヲ考ヘ f ノ表現函数ヲ $f(\bar{p})$ ヲ表ス.

X が可分 = ナルカラ, $X \in$ 単位 $\in \mathbb{Y}$. コレヲ E トスル. $\bar{\mu}(\bar{E})(e) = m(\bar{E})$ ト置クト $m(\bar{E})$ ハ完全加法的, 且 $m(\bar{E}) = 0$ ト $\bar{E}$ が第一種集合トが同義 = ナル 極 E ヲ トルコトが出来る. $m_x(\bar{E}) = \bar{\mu}(\bar{E})(x)$ トスレバ, $m_x(\bar{E})$ ハ完全加法的デ $m(E) =$ 同シテ 絶對連續デアル. 故

$$(1) \quad m_x(\bar{E}) = \int_{\bar{E}} x(\bar{p}) dm$$

ナル連續函数 $x(\bar{p})$ が一意 = 定マリ, 任意ノ $f \in \bar{X} =$ 對シ

$$(2) \quad f(x) = \int_{\bar{\Omega}} x(\bar{p}) f(\bar{p}) dm$$

トナル. $\xi \in \bar{X}$ ヲ $\bar{X}$ ノ任意ノ (0) -連續線形汎函数トスルトキ, $m_\xi(\bar{E}) = \xi(\bar{\mu}(\bar{E}))$ トオクトキ

$$(3) \quad m_\xi(\bar{E}) = \int_{\bar{E}} \xi(\bar{p}) dm$$

ナル連續函数 $\xi(\bar{p})$ が一意 = 定マリ, 任意ノ $f \in \bar{X} =$ 對シ

$$(4) \quad \xi(f) = \int_{\bar{\Omega}} \xi(\bar{p}) f(\bar{p}) dm$$

が成立ツ. カナル ξ ノ全体ヲ X_1 トスル. X_1 ハ Banach 束デ X ヲ埋藏スル. $\bar{X} = X_1$ ナルコトヲ証明スル. $\xi \in \bar{X}$ ノ任意ノ要素トスルトキ, ξ ハ X ノ $\{x_n\}$ ノ弱收歟極限

デアルカラ

$$(5) \quad \xi(f) = \lim \int_{\Omega} x_n(\bar{x}) f(\bar{x}) dm$$

可積分函数空間ノ定理ニヨリ、スベテノ有界サ $f(\bar{x}) =$ 對應スル $f =$ 對シ

$$(6) \quad \xi(f) = \lim \int_{\Omega} x_n(\bar{x}) f(\bar{x}) dm = \int_{\Omega} \xi(\bar{x}) f(\bar{x}) dm$$

ナル連續函数 $\xi(\bar{x})$ が存在スル。 (6) が任意ノ f ニツイテ成立ツコトヲ言ヘバ $\xi \in X$ 、トナルコトが容易ニイヘル。

先ヅ、任意ノ f ニツイテ (6)、最後ノ項ノ積分が存在スルコトヲ示スニハ、 $\xi(\bar{x}) \geq 0$ 、 $f(\bar{x}) \geq 0$ トシテ差支ヘナイ。

$f_n(\bar{x}) = \min(f_n(\bar{x}), n)$ ト置ケト、

$$\int_{\Omega} \xi(\bar{x}) f_n(\bar{x}) dm \leq (\|\xi\| + 1) \|f_n\| \leq (\|\xi\| + 1) \|f\|$$

$\int_{\Omega} \xi(\bar{x}) f(\bar{x}) dm$ / 存在が判ル。後ハ定理3.1ノ証明ノ最後ノ部分ニテヘベヨイ。

定理5.1 Banach 束 X 、共軛 Banach 束 $\bar{X}$ が可分ノトキ $\bar{X}$ ハ K -空間デアル。

(証) (VI) ノ共軛 Banach 束が常ニエツ性質デカラ、(V)ノ成立ヲ証明スレバヨイ。 $f_n \downarrow 0$ トスレバ第一種集合ヲ除イテ $f_n(\bar{x}) \downarrow 0$ 。且ツ第一種集合ヲハ $m(E) = 0$ トナルカラ

$$\xi(f_n) = \int_{\Omega} \xi(\bar{x}) f_n(\bar{x}) dm$$

カラ $(f_n) \rightarrow 0$ とナル。故ニコレカラ (Y) 成立ガ判
ル。

定理5.2. Banach 束 X に対シ $\overline{X}$ が可分ノトキ X
ハ正則 Banach 空間デアアル。

(証) $\overline{X}$ ハ可分ニナルカラ, $\overline{X} \in \overline{X} \in K$ -空間ニナ
ル。故ニ $\overline{X}$ ハ正則, 然テ $X \in$ 正則デアアル。

定理5.3. Banach 束 X が $\overline{X}$ ト Banach 束ト
シテ同型トスル。 X が可分ナラバ X ハ正則デアアル。

(証) 定理5.2 カラ。

次ニ Banach 束 X が $\overline{X}$ ト Banach 束トシテ同
型トスル。 X が可分トスルトキ, $\overline{X} \in$ 可分, コレカラ $\overline{X} \in$ 可
分トナルカラ X ハ正則トナル。 $x \in X$ = 對應スル要素ヲ $\overline{x}$ デ
表スト, $f(\bar{p})$ 代リ = $\overline{x}(\bar{p})$ ト書イテ

(2) カラ

$$(1) \quad \overline{x}(x) = \int_{\overline{\Omega}} x(\bar{p}) \overline{x}(\bar{p}) d\mu$$

ガ成立スル。 $\overline{x}(\bar{p})$ ハ $\overline{x}$ ノ表現函数デアアル。 今 $x(\bar{p})$ 及 $\overline{x}$
ノ表現函数ト見ルト表現ノ單独性カラ $\overline{\Omega}$ ヲ $\overline{\Omega}$ 移ス位相的
変換 $T\bar{p}$ ガ存在シテ $x(\bar{p}) = \overline{x}(T\bar{p})$ トナル。 $T\bar{p} \neq \bar{p}$ ナ
ル $\bar{p}$ ガ存在スルトキハ正要素 $\varepsilon > 0$ デ $\overline{x}(x) = 0$ ナルモ、ガ
アル。 故ニ $\varepsilon > 0$ ノトキ $\overline{x}(x) > 0$ ナル條件ヲ満足スレバ
 $\bar{p} = T\bar{p}$ トナル。 コノトキ $\overline{x}(\bar{p}) = x(\bar{p})$ トナルカラ

定理5.4. Banach 束 X が $\overline{X}$ ト Banach 束ト
シテ同型デ, $x \in X$ = 對應スル $\overline{X}$ ノ要素ヲ $\overline{x}$ トスルトキ,

$x > 0$ ならば $\bar{x}(x) > 0$ を満足スルモノトスル。モシ x が
可分ならば $\|x\|^2 = \bar{x}(x)$ トナル。コレカラ x はヒルベルト
空間デ $\bar{x}(y) \leftarrow x, y$ の内積 = ナル。

が成立ツコトが判ル。

定理 5.5. 前定理ニ於テ $x > 0$ ノトキ $\bar{x}(x) > 0$ ナル
條件ヲ $x \perp y = 0$ ノトキ $\bar{x}(y) = 0$ デオキカヘラモヨイ。

(証) アル $x > 0$ = 對シ $\bar{x}(x) = 0$ トスル。 x ノスベテ
ノ直交要素ノ作る正規イデヤルへノ e ノ射影ヲ e_1 トスルト
 $x + e_1$ は x ノ單位デアアル。 $\bar{x}(x + e_1) = \bar{x}(x) + \bar{x}(e_1) = 0$
カラ $\bar{x} = 0$ 即チ $x = 0$ トナリ矛盾ヲ起ス。

§ 6. 問題

X が K -空間ノトキ, 延ラク $\bar{X} \in K$ -空間 = ナルモノト
予想サレルガ, コレニ對スル解答が與ヘラレナイ。 Banach
空間デイト, X が弱完備ノトキ $\bar{X} \in$ 弱完備デアルトイフ問
題 = ナル。 Banach 空間論デハ X カラ $\bar{X}$ へノ移行ニ於テ
保存サレル性質ノ研究ハアルガ X カラ $\bar{X}$ へノ移行ニ於テ保存
サレル性質ノ研究ハ乏シイ。

上ノ問題ニ對スル解答デハナイガ, 共軌 Banach 束が
 K -空間 = ナル條件ヲ與ヘテオフ。

定理 6.1. Banach 束 X ノ共軌 Banach 束 $\bar{X}$ が K -
空間 = ナル條件ハ, $X \rightarrow \bar{X}$ = 埋藏シタトキ X = 直交スル $\bar{X}$
ノ要素ハ 0 以外ニ存在シナイコト, 換言スレバ X ヲ含ム最小
ノ正規イデヤルが $\bar{X}$ ト一致スルコトデアアル。

(証) 必要ナルコトノ証。 $\bar{X}$ が K -空間トナシタトス

ル。 X が $\overline{X} = \text{埋藏スル}$ と、 ξ の記法ヲ使ツテ、 $\overline{X}$ と $\overline{X}$ の正規イデアルノ對應デ $X^{*+} = \{0\}^+ = \overline{X}$ とナル。

充分ナルコトノ証 $\{e_\alpha\}$ が $\alpha \neq \beta$ ノトキ $e_\alpha \wedge e_\beta = 0$ ナベテ、 e_α = 直交スル X ノ要素ハ 0 以外ニ存在レキイ族トスル正要素ノ集合トスル。 $\overline{X} = \text{埋藏シテ}$ $\overline{X}$ デ同ジ性質ヲエツ。 ξ が $\overline{X}$ ノ任意ノ正要素トシ、 $\overline{X} = \text{於テ}$ e_α ノ生成スル主イデアル $\pi(e_\alpha) \in \xi$ ノ射影ヲ ξ_α トスレバ、
 $\xi_\alpha = \lim (\xi_\alpha \wedge n e_\alpha)$ 。 $e_\alpha(f)$ ハ (0) -連続デアルカヲ $\xi_\alpha(f) \in (0)$ -連続ニナル。 何者 $f_n \downarrow 0$ トシ、 ξ が任意ノ正数トスルトキ $\xi_\alpha(f_1) - (\xi_\alpha \wedge n e_\alpha)(f_1) < \xi$ 満足スル n が存在スル。 $\xi_\alpha(f_n) \leq (\xi_\alpha \wedge n e_\alpha)(f_n) + \xi_\alpha(f_1) - (\xi_\alpha \wedge n e_\alpha)(f_1) \leq (\xi_\alpha \wedge n e_\alpha)(f_n) + \xi$ カラ $\xi_\alpha(f_n) \rightarrow 0$ ナルコトヲ知ル。 マタ $\xi_\alpha(f_1) > 0$ ナル α ハ高々可附個個デアツテ $\xi(f_1) = \sum \xi_\alpha(f_1)$ 。 コレカラ $\xi(f_n) \rightarrow 0$ ヲ証明スルコトが出来ル。 故ニ $\|f_n\| \rightarrow 0$ トナリ (V) が成立ツ。 (VI) ハ共軛 Banach 束が常ニエツ性質デカラ $\overline{X}$ ハ K -空間ニナル。

コノ定理カラ $\overline{X}$ が K -空間ノトキ X = 単元が存在スレバ $\overline{X}$ ノ単位ニナルコトが判ル。

§7. ベクトル束

§6 マデニ述べタ結果ヲ、ベクトル束ヘ擴張スルニハ、証明法がベクトル束ヘ適合スルヤウ概念構成ヲサレバヨイ。ベクトル束自体ハ空間トシテ豊富ナ内容ヲモツモノデナイカラ、興味フル結果ヲ期待スルコトハ出来ナイ。ニニ

蛇足ヲ加ヘテミル。

X ヲベクトル束トシ, X ノ有界線形汎函数⁽¹⁾, 全体ヲ $\overline{X}$ トスル。 $\overline{X}$ ハ完全ベクトル束トナルコトハ周知ノ通りデアル。
 X ガ條件

(*) 任意ノ正要素 $x > 0$ = 正值ヲ與ヘル有界線形汎函数
數が存在スル。

ヲ満足スレバ明カニアルヤメデス的デアル。共軛ベクトル束
ハ常ニ(*)ヲ満足スル。

補題 1.⁽²⁾ (*)ヲ満足スルベクトル束ニ對シ, 任意ノ
 $0 < f \in \overline{X}$ ニ對シ $f(x_0) \geq 0$ ガ常ニ成立スル x_0 ハ $x_0 \geq 0$
デアル。

(証) $x_0 = (x_0)_+ - (x_0)_-$ トシ, $(x_0)_- = 0$ ナルコト
ヲ示セバヨイ。 $(x_0)_- > 0$ ナラバ(*)ト Hahn-Banach
ノ定理カラ x_0 = 負値ヲ與ヘル $0 < f \in \overline{X}$ ノ存在ヲ証明ス
ルコトが出素ル, 故ニ $(x_0)_- = 0$ デナケレバナラヌ。

K -空間ニ對應スルベクトル束ノ概念ニ到達スルヲ
次ノ條件ヲ設ケル。

(α) $x_n \downarrow 0$ ナル directed setニ對シ, スベテノ
 $f \in \overline{X}$ ニツイテ $f(x_n) \rightarrow 0$

(β) E ヲ $x, y \in E$ ノトキ, $x, y \leq z \in E$ ナル z ノ
存在スル, X ノ正要素カヲナル directed setトワル。モ
シ各ニ $0 \leq f \in \overline{X}$ ニ對シ l. u. b. $(f(x); x \in E) < +\infty$

(1) Birkhoff: 前掲 115-116 頁

(2) コレニヨリ X ハ $\overline{X}$ ニベクトル束トシテ埋藏サレル

ノトキ $\sup E \in X$. ($\sup E$ が存在シ $\sup E \in X$, 意)

K -空間ハ $(*)$, (α) , (β) ヲ満足スル. 逆 = (α) , (β) ヲ満足スル Banach 束ハ K -空間デアアル. K -空間ハ $(*)$, (α) ヲ満足スル. かつ (α) ヲ満足スル σ -完全ナ Banach 束ハ K -空間デアアル.

X ヲ $(*)$, (α) ヲ満足スルベクトル束トスル. §4ノ記法ヲ踏襲スルト §4ノ補題 2.3.4.5 が成立ツカラ X ノ表現バーン空間 Ω ト $\bar{X}$ ノ表現バーン空間 $\bar{\Omega}$ ノ互相対応が正規イデアルノ対応ヲ定メラレル. コレカラ Ω , 或ハ $\bar{\Omega}$ 上ハ, X ハ或ハ $\bar{X}$ ノ表現ノーツヲ知レバ, 他ハ線形汎函数ノ積分表示 = ヨツテ表現が得ラレル. §4ノ記法ヲ $x \in X$, $f \in F$ = 對シ, ソコノ式 (2)

$$f(x) = \sum_{\alpha} \int_{\Omega_{\alpha}} x(\beta) F(\beta) d m_{\alpha};$$

可附番個ノ項ノミカノデナリ.

が成立スル. $x \in X$ ヲ $\bar{x} =$ 埋藏セテ $f(x)$ ノ代リ = $x(f)$ ト書イテモ同じ等式が成立ツ.

Moore-Smithノ意味ヲ (1)-連続ナ $\bar{X}$ ノ有界線形汎函数ノ形ヲ求メル, §ヲカ、ル正線形汎函数トスル.

§4ノ記法ヲ, $m_{\alpha}, \xi(E)$ ハ完全加法的且 $m_{\alpha}(E) =$ 関シテ絶対連続 = ナリ, (11), (12) が成立ツ. 逆 = (12)ノ右辺が意味ヲモツ連続函数 $\xi(\beta)$ ヲ考へルト, コレハ $\bar{X}$ ノ有界線形汎函数ヲ定義スル. 即チ $\bar{X}$ ノ要素ヲ定メル, コレヲ ξ ヲ表ソ $\xi(f)$ ヲ (12)ノ式ヲ與ヘルモノトスル. $\xi(f)$ ガ Moore-

Smith, 意味デ (i) - 連続 + レコトヲ示スニハ, $\xi(f) \geq 0$
 トシ $\xi(f)$ が $f \searrow 0$ + レ directed set $\{f_\delta\}$ = 對シ
 $\xi(f_\delta) \rightarrow 0$ ヲ満足スルコトヲ示セバヨイ。一ツノ f_δ ヲト
 ルト $1/n$ ノ $\sum_{n=1}^{\infty}$ ノ 0 デ + イ 項 = 對應スル μ ヲ $\{\mu_n\}$ トスル。 ε
 ヲ任意ニ與ヘタ正數トシ, 自然數 N ヲ $\sum_{N+1}^{\infty} \int_{\Omega_{\mu_n}} \xi(f) F_{\delta_0}(f) d\mu_{\mu_n}$
 $< \varepsilon$ + レ 様ニ トル。次ニ自然數 p = 對シ $\xi_p(f)$ ヲ $\sum_{n=1}^N \int_{\Omega_{\mu_n}}$ 上
 $\leq \min(\xi(f), p)$, $\sim$ ノ他ノ点デハ 0 ト定メル。 p ヲ充分
 大ニ トル

$$\sum_{n=1}^{N_0} \int_{\Omega_{\mu_n}} (\xi(f) - \xi_p(f)) F_{\delta_0}(f) d\mu_{\mu_n} < \varepsilon$$

トラシタルコトが出来る。 $f_\delta \leq f_{\delta_0}$ = 對シ

$$\begin{aligned} \xi(f_\delta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_{\mu_n}} \xi(f) F_\delta(f) d\mu_{\mu_n} \\ &\leq \sum_{n=1}^N \int_{\Omega_{\mu_n}} \xi(f) F_\delta(f) d\mu_{\mu_n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{\Omega_{\mu_n}} \xi(f) F_{\delta_0}(f) d\mu_{\mu_n} \\ &< \sum_{n=1}^N \int_{\Omega_{\mu_n}} \xi_p(f) F_\delta(f) d\mu_{\mu_n} + 2\varepsilon \end{aligned}$$

然ルニ $\xi_p(f)$ ハ X ノ要素ニ對應スル $\overline{X}$ ノ線形汎函數デアアル。

コノ X ノ要素ヲ ξ_p ト書クト上共ハ

$$\xi(f_\delta) < f_\delta(\xi_p) + 2\varepsilon$$

故ニ $f_\delta \searrow 0$ トキ $\xi(f_\delta) \rightarrow 0$ ガ成立ツコトが判ル。

上述ハ X カ (※), (α), $\overline{X}$ ガ Ω ヲ満足スルトキ, $\overline{X}$ ノ
 有界線形汎函數ノリチ Moore-Smith 意味デ (i) - 連

連続 $\pm \varepsilon$ / / 全体 X 上 X を含むことを示す。 X が (β) を満足することを保証すればよい限り、一致するところがある。

§4 の補題 1 = 対しては次の補題 2 を使えばよい。

補題 2. ベクトル束 X の部分ベクトル束 X_0 が $(*)$, (α) , (β) を満足する X の正規部分空間で $X_0 =$ 直交する X の要素 $\neq 0$ 以外に存在せずとする。 X_0 の任意の有界線形汎函数が X のそれと拡大されるならば $X_0 = X$ が成立す。

(証) §4 の補題 4 = 準じて行えばよい。

定理 7.1. X が $(*)$, (α) , (β) を満足するベクトル束 X のとき、 X は $\overline{X}$ の有界線形汎函数 φ を Moore-Smith 意味で (0) 連続とする ε / / 全体からなる。

(証) X_1 は $\overline{X}$ の有界線形汎函数 φ を Moore-Smith 意味で (0) 連続とする ε / / 全体とする。 X は X_1 の正規部分空間で補題 2 の条件を満足するから $X = X_1$ となる。

定理 7.2. X が $\overline{X}$ の有界線形汎函数 φ を Moore-Smith 意味で (0) - 連続とする ε / / 全体からなり、且 X の相異なる要素 f は、異なる φ を $\overline{X}$ の有界線形汎函数を表すとす、 X は $(*)$, (α) , (β) を満足する。

(証) X が $(*)$ を満足するところ自明。 $x_0 \downarrow 0$ となる $\overline{X}$ の正要素 $f = \varphi$ に対して $f(x_0) \rightarrow 0$ である $\varepsilon > 0$ があれば $\overline{X}$ は $\wedge x_0 = \xi$ となる $\xi > 0$ $\overline{X}$ の正要素 $f = \varphi$ に対して $\xi(f) \leq f(x_0)$ が成立すから、 $\xi(f)$ は Moore-Smith 意味で (0) - 連続となる。故に $\xi \in X$ となる。これは $\xi > 0$ となるもの、故に (α) が成立す。 (β)

ヲ満足スルコトモ同様ノ論法ヲ判ルカラ、結局 X が $(*)$, (α) , (β) ヲ満足スルコトニナル。

定理 7.2. ベクトル束 X が $X = \overline{X}$ ヲ満足スル条件ハ X が $(*)$, (α) , (β) ヲ, $\overline{X}$ が (α) ヲ満足スルコトヲアル。

(証) 必要ナルコトノ証 $X = \overline{X}$ カラ X ハ開カ $= (*)$ ヲ満足スル。 X ヲ $\overline{X}$ ノ共扼ベクトル束ト考へれば (α) , (β) ノ成立ニ容易ニ判ル。 $\overline{X}$ が $\overline{X} = X$ ノ共扼ベクトル束ト考へテ (α) ノ成立モ容易ニ証明サレル。

充分ナルコト。 定理 7.1 カラ。

定理 7.3. $(*)$ ヲ満足スルベクトル束 X ノ任意ノ区間ハ弱ビコムバクトトレタノ条件ハ X が (α) ヲ満足スル完全ベクトル束ニナルコトヲアル。

(証) 必要ナルコトノ証 $x_\delta \downarrow 0$ トスルトキ、 E_δ ヲ $x_\delta' \leq x_\delta + \text{ル } x_\delta'$ ノ集合ノ弱位相ヲノ閉包トスル。スベテ $E_\delta =$ 共通ノ点が存在スル。コレハ $0 = \text{外}$ ヲラヌ。 $\overline{X}$ ノ任意ノ正要素 $f = \text{對シ}$, 與ヘテ $\text{ル正数 } \varepsilon = \text{對シ}$ $f(x_\delta) < \varepsilon$ ナル x_δ が存在スル。コレカラ $f(x_\delta) \rightarrow 0$ ナルコト判ル。

充分ナルコトノ証 $0 \leq x \leq a$ ヲ満足スル $x \in X$ ノ全体ヲ $(0, a)$ トスル。各々ノ正要素 $f \in \overline{X} = \text{對シ}$, 実数区間 $[0, f(a)]$ ヲ考へ, コノ直積ヲ作ルト, ビコムバクト空間ヲ得ル。 $x \in (0, a) =$ ハコノ積空間ノ点 $\{f(x)\}$ が應ズル。カナル点ノ集合ハ開チラキルコトヲ示セバヨイ。コノ集合ノ累積点ノ一ツヲ考へ, $f =$ 應ズル区間 $[0, f(a)]$ へノ座標ヲ

$\xi(f)$ ト スル ト $\xi(f)$ ハ $\overline{X}$ ノ 要素ヲ 定メル。 $0 \leq \xi(f) \leq f(\alpha)$
 カテ $\overline{X}$ デ $0 \leq \xi \leq \alpha$ ト ナル。 $\xi(f)$ ハ Moore-Smith,
 意味デ (10) 連続トナル。 $\xi(f)$ ノ 積分表示式 (12) オラ $0 \leq \xi(\gamma)$
 $\leq \alpha(\gamma)$ トナリ $\xi \in X$ トナルコトガ判ル。

$X = \overline{X}$ ナルベクトル束デ Banach 束或ハ空間ノ弱位
 相ニヨル特性ツケニ並行ナ概念ヲ作ルコトガ問題ニナル。例
 ヘバ スベテノ X ノ 正要素 f ニ 對シ 正数 C ガ 對應シ (コレヲ $C(f)$
 トカク) $f(x) \leq C(f)$ ヲ 満足スル X ノ 集合ガ 弱コンパクト
 トト置クト $X \triangleq (*)$, (α) , (β) ノ 成立カイヘルガ $\overline{X}$ ガ (α)
 ヲ 満足スルカ否カハ判ラナイ。(Banach 束デハ $\overline{X}$ ガ (α)
 ヲ 満足スルコトハイヘルガ)

$(*)$, (α) ヲ 満足スル 完全ベクトル束ノ任意ノ 区間ハ 列的
 弱コンパクトナリヤヲ考ヘルガ自然デアル。 $\overline{X}$ ノ 單位或ハ
 $\{e_\alpha\}$ ニ 關スル條件ガ 必要ニナルト思ハレルカラ 形ガキタナ
 ナナルヲ 略スル。

定理 7.4. $(*)$, (α) , (β) ヲ 満足スルベクトル束ハ 弱完
 備デアル。

(証) X ヲ $(*)$, (α) , (β) ヲ 満足スルベクトル束トシ,
 スベテ $f \in \overline{X}$ ニ 對シ $\lim f(x_n)$ ガ 有限確定ノトキ,
 $\lim f(x_n) = f(y)$ ナル $y \in X$ ノ 存在ヲ 証明スルベヨイ。
 §4 ノ 記法ヲ 使フ。 先ツ $f \in \mathcal{O}(\bar{e}_\alpha)$ ナルトキヲ考ヘ
 ル。 コノトキ

$$f(x_n) = \int_{\mathcal{O}(\bar{e}_\alpha)} x_n(\gamma) F(\gamma) d\mu_\alpha$$

トナル。コレカラ Ω_α 上ノ連続函数 $\xi_\alpha(\beta)$ が定まり、スベ
 テ $f \in \mathcal{M}(\bar{E}_\alpha) =$ 對シテ $\lim_n f(x_n) = \int_{\Omega_\alpha} \xi_\alpha(\beta) F(\beta) d\mu_\alpha$
 が証明サレル。(定理3.1ノ証明ト同ジ考ヘ方) コノ $\xi_\alpha(\beta)$
 フノキ β ナル $\beta =$ 對シ Ω_β 上デ 0 トスルト、 X ノ要素ガ應ズ
 ル。コレヲ ξ_α トスル。コノトキ $\lim f(x_n) = f(\xi_\alpha)$ 。
 スベテ $\xi_\alpha(\beta)$ カラ定マル Ω ノ連続函数ヲ $\xi(\beta)$ トスル。
 $\xi(\beta) = X$ ノ要素ガ應ズルコトヲ示スニハ $\xi(\beta) \geq 0$ トレテ
 ヨイ。 $f \in \bar{X}$ ナル任意ノ正要素 f ヲ考ヘ、コレヲ固定ス
 ル。 $\int_{\Omega_\alpha} (x_n(\beta) F(\beta) d\mu_\alpha$ ハ高々可附番個ノ $\alpha =$ 對シテ
 1ニ 0デナリ。カナル α ヲ $\alpha_n = 1, 2, \dots$ トシ、今正数列 λ_n
 ヲ $\sum \lambda_n m_{\alpha_n}(\Omega_{\alpha_n}) < +\infty$ ナル様ニトリ

$$m(E) = \sum \lambda_n m_{\alpha_n}(E \cap \Omega_{\alpha_n}),$$

$E \cap \bigcup_n \Omega_{\alpha_n}$ Borel 集合

ト置クト $f(x_n) = \sum \int_{\Omega_{\alpha_n}} x_n(\beta) \frac{F(\beta)}{\lambda_n} d\mu$ トナル。

$$f_E(x_n) = \sum \int_{E \cap \Omega_{\alpha_n}} x_n(\beta) \frac{F(\beta)}{\lambda_n} d\mu \text{ ト置キコレ} = \int f d\mu_n$$

1 定理ヲ使ツテ $\lim f(x_n) = \sum \int_{\Omega_{\alpha_n}} \xi(\beta) F(\beta) d\mu_{\alpha_n}$
 が証明サレル。コレガ條件 (β) ヲ使ツテ $\xi(\beta)$ ガ X ノ要素ニ
 對應スルコト、 X ノ要素ヲ y トスルト $\lim f(x_n) = f(y)$
 が成立ス。

定理1.5. $(*)$ ヲ満足スルベクトル束 X ノ共観ベクトル
 束 $\bar{X}$ が (β) ヲ満足スル條件ハ、 X ヲ $\bar{X} =$ 埋藏スルトキ $\bar{X}$
 が X ヲ含ム最小ノ正規イデアルトナルコトデアル。

(註) 定理6.1と同論法。

束 = 条件 (α), (β) が簡単 + 条件 = 置きかへラレル場合
ヲ調べルコト = ナルが, *trivial* + コトヲ繰返ス = スヤ
+ イナヲ 唯 Bochner 束ヲ導ゲテオク。

定義 ベクトル束 X が次ノ条件ヲ満足スルトキ Bochner
束トイフ。 X = 高々可附番個ノ正線形汎函数 f_n が
存在シテ

$$(i) \quad x_n \downarrow 0 \text{ ノトキ各々 } f_m = \text{ツイテ } f_m(x_n) \rightarrow 0$$

$$(ii) \quad 0 \leq x_n < x_{n+1}, n = 1, 2, \dots \text{ 各々 } m = \text{ツイテ}$$
$$\text{テ } \lim_n f_m(x_n) < +\infty \text{ ノトキ } \forall x_n \text{ が存在スル。}$$

Bochner 束ハ K_6 型 "正則" ベクトル束デ, 任意ノ
区間カ列的弱コンパクトデアアルコトが証明サレル。(因答)

コレカラ明 = (*), (α), (β) ヲ満足スルベクトル束 = ナ
リ, 任意ノ区間ハ弱コンパクト = ナル。又弱完備デア
ル。((i), (ii) ヲ満足スルベクトル束ヲ以前ニハ Bochner
ノ条件ヲ満足スルベクトル束ト呼ンダ)