



Title	Spectral Theorem ノ証明二就テ
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 240, p. 1232-1237
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74993
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1061. Spectral Theorem / 証明 = 就テ

吉田 耕作 (名大)

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ = 於ケル有界 + Hermitian 作用素 T / *spectre* 分解定理ヲ束論的 = 取扱フコトハ大分以前カラ行ハレタキル。筆者ニ「位相幾何第三巻第二号」=「Stone - Lenzel / 方法 / 束論的 version」トニテーツノ方法ヲ述ベタコトガアル。

T カラ generate サレタ環 $\mathcal{R}$ ハ $X \in \mathcal{R}$ ガ *positive definite* —— 全テ、 $f \in \mathcal{H} = \text{対シ}$ $(X \cdot f, f) \geq 0$ —— ナルトキ = $X \geq 0$ ト書ケル。

(1) *vector* 束 = ナリ 然レモ σ -complete.

(2) $X \geq 0, Y \geq 0$ ナラバ $XY \geq 0$

(3) $\left\{ \begin{array}{l} \text{単位作用素 } I \text{ フトレバ, 全テ } X \in \mathcal{R} = \text{對シ} \\ \text{テ } \alpha > 0 \text{ フ } -\alpha I \leq X \leq \alpha I \text{ ナル如ク定メ得} \\ \text{ル。} \end{array} \right.$

1 = 條件ヲ満足スル。上掲議論ニヨレバ

$$\left\{ \begin{array}{l} X \geq 0 \text{ ナルトキ} \\ E_\lambda = I - \inf \left(I, \frac{X}{\lambda}, \frac{X^2}{\lambda^2}, \dots, \frac{X^n}{\lambda^n}, \dots \right) \\ \text{トスルベシ } \{ \lambda > 0 \}, \{ E_\lambda \} \text{ ハ } X \text{ / 「単位分解」} \\ \text{ニナリ} \\ X = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda \end{array} \right.$$

コレデ *spectre* 定理が証明デキタ譯ニナル。

然レ「 $\mathcal{R}$ が *vector* 束ニナル」証明ヲ普通ノ *F. Ring*ノ論法 (*Acta Szeged*, 5, 23-54) デマル續リデ
アレ以上 *spectre* 定理ノ本質的? ノ別証明トハ云ヒ
難イ。コノ点ハ今マア知ラレテキル束論的証明全ラニ通ズ
ル難点? デハアレマイカ。

所ヲ最近発表サレタ I. Vernikoff, S. Krein,
A. Jorbinノ論文⁽¹⁾ノ結果ヲ使フナラバ別証明ガ出来
ル譯ニナルヤヲ思フノデ之ヲ述ベテミタイ。蛇足ナガ
ラ上ノ三氏ノ論文ノ紹介ノ續リニモ取ツテ添ギタイ。以上
ヲ前置キトスル。

先ヅ $X \geq 0$ 且ツ $X \neq 0$ ナルトキ $X > 0$ ト書クコトニ
スレバ, $\mathcal{R}$ ニ於テハ

$$(4) \quad X > 0, Y > 0 \text{ ナラバ } X + Y > 0$$

$$(5) \quad X > 0, \lambda > 0 \text{ ナラバ } \lambda X > 0$$

及ビ (2), (3), 成リエツコトハ明カ⁽²⁾。 $\mathcal{R}$ ノ *two-sided*
いである $\mathcal{R}$ ハ次ノ條件ヲ満足スルトキニ「convex」
デアルト云フ。

$x > 0, x \in \mathcal{R}$ ナラバ $-x < y < x$ ナル $y \in \mathcal{R}$ 。
凸いである $\mathcal{R}$ ニヨル剩餘環 $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$ ハ, $X > 0$ ナル

(1) C. R. URSS, 30 (1941), 758-767.

(2) 今ノタメニ (2)ノ証明ノ最後ニ7行ヲ加ヘトク。ソノト
キニ必要ニナルガ暫ラク $\mathcal{R}$ ノ「可換環」ナルコトハ用ヒナ
イデ済ム。

residual class $\neq \mathcal{I}$ $\exists \gamma > 0$ ト書ケル (4), (5), (2),

(3) ノ満足サレルコトガ $\mathcal{I}$ ノ凸性カラワカル。例へバ (4)

ノ証明。 $\mathcal{R}/\mathcal{I} \ni \bar{X}, \bar{Y}, \bar{X} > 0, \bar{Y} > 0$ トスレバ $\bar{X} \ni X,$

$\bar{Y} \ni Y$ 且ツ $X > 0, Y > 0$ ナル如キ $X, Y \in \mathcal{R}$ ガ存在

スル。然ラ、 $0 < X + Y \in \bar{X} + \bar{Y}$ ナラ $\bar{X} + \bar{Y} \neq \mathcal{I}$ ガ

云ヘレバヨイ。若シ $\bar{X} + \bar{Y} = \mathcal{I}$ トスレバ $X + Y \in \mathcal{I}$ 。

従ツテ $0 < X < X + Y \in \mathcal{I}$ ノ凸性カラ $X \in \mathcal{I}$ トナリ $\bar{X} > 0$
ナル假定ニ反スル。

猶テ transfinite induction ヲヨリ、任意ノ
non-trivial two-sided convex ideal =
對シテ之ヲ含ム maximal convex ideal (= m.
C. i. である) $\mathcal{I}$ ノ存在ガ云ヘル。

$\mathcal{R}/\mathcal{I} = \bar{\mathcal{R}}$ ハ simple (convex non-trivial
ideal ヲ含マナイ) ナガ斯ル $\mathbb{R}$ ハ実数体ト isomorphic
ナコトガ証明サレル。以下其ノ証明。⁽¹⁾ 先ツ $\bar{\mathcal{R}}$ ハ Archi-
median 即チ: $\text{order-lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \bar{I} = 0$ 何者、

$\bar{I} > n \bar{Y}$ ($n = 1, 2, \dots$), $\bar{Y} > 0$ トスレバ

$$\frac{\bar{I}}{n} \in \{-\gamma \bar{Y} \leq \bar{Z} \leq \gamma \bar{Y}\}$$

ガ non-trivial convex ideal ナツテ了フカラ。

故ニ $\bar{\mathcal{R}} \ni \{\lambda \bar{I}, -\infty < \lambda < \infty\}$ トスレバ $\bar{X} \neq 0$ ガ存在シ

(1) Krein 等ノ証明ヨリ幾分簡單ナト思フ。寧ろ vector 束表現

ト全ク同方法デアルコトニ注意セラレタイ。

$\neq \mathbb{A}$ 対 $\lambda = \text{対}$ $\overline{X} \neq \lambda \overline{I}$. 今

$$\lambda_0 = \inf_{\lambda} \{ \lambda \overline{I} \geq \overline{X} \}$$

ト γ 4バ *Archimedean* ト云フコトカラ $\lambda_0 \overline{I} - \overline{X} > 0$.

$\overline{Y} = \lambda_0 \overline{I} - \overline{X}$ ト γ 4バ

$$\varepsilon \{ -\eta \overline{Y} \leq \overline{Z} \leq \eta \overline{Y} \}$$

$\wedge \overline{R}$, *non-trivial convex ideal* = + ヲテ
了フ。

結局 *simple* + $\overline{R} = R/\mathcal{I}$, $\wedge$ 実数体 = 同型 = +
ユタ。故 = R , *m. c. ideal* $\mathcal{I}$, $\mathbb{A}$ 体 $\widehat{\mathcal{I}}$ トスレバ
 $\pi \in R = \text{homomorphism } R \rightarrow R/\mathcal{I} \Rightarrow \pi =$ 對
應スル 實数 $\pi(\mathcal{I})$ γ 對應サセルコト = ヨリ, $R \wedge \widehat{\mathcal{I}}$,
上ノ有界函数 $\pi(\mathcal{I})$, 作ル或ル環 $R(\widehat{\mathcal{I}})$ γ *homo-*
morphic = 表現サレタコト = + ヲ。

$R \rightarrow R(\widehat{\mathcal{I}})$ が *isomorphic* + タメ, 充分條件
トシテ R が *Archimedean* γ アレバヨイ。何者,
 $X \neq \lambda I (-\infty < \lambda < \infty)$ トスレバ $\lambda_0 = \inf_{\lambda} \{ \lambda I \geq X \}$
 $\mu_0 = \sup_{\lambda} \{ X \geq \lambda I \}$ ト γ タトキ $\lambda_0 > \mu_0$. 故 = 例ハ
バ $\lambda_0 \neq 0$. 然ラバ *non-trivial convex ideal*
 $\varepsilon \{ -\eta Y \leq Z \leq \eta Y \}$, $Y = \lambda_0 I - X$, γ $\mathbb{A}$ *m. c.*
ideal $\mathcal{I}$ $\wedge Y$ γ $\mathbb{A}$ カラ X γ 含マ + イ。—— X γ 含メバ
 $\lambda_0 \neq 0 = \text{ヨリ } I \in \mathcal{I}$ ト + リ矛盾。

猶テ 例 = ヨリ $\widehat{\mathcal{I}} = \text{weak topology}$ γ 入レル。

即チ

$$\varepsilon \left\{ |X_i(x) - X_i(x_0)| < \varepsilon_i, -1 \leq X_i \leq 1 \right. \\ \left. (i=1, 2, \dots, n) \right\}$$

1) 如き集合 $\subseteq \widetilde{X}$ を X_0 の近傍トスレバ, $\widetilde{X}$ は *bicom-*
pact 且ツ各 $X(X)$ は $\widetilde{X}$ 上で連続ナル。

連続函数環 $R(\widetilde{X})$ は R = 同型且ツ i) 恒等
的ナル函数 $I(X)$ を含ム ii) $\widetilde{X}$ の相異ナル二
点 x_1, x_2 対シ $X(x_1) = 0, X(x_2) = 1$ ナル如キ
連続函数 $X(X)$ を含ム。故ニ良ク知らレタマウニ
 $R(\widetilde{X})$ は $\widetilde{X}$ 上で連続ナル函数ノ全体ノ中デ, 一致収斂
ノ意味デ稠密デアール。故ニ特ニ R が

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} \text{のモ } \|X\| = \inf_{\lambda > 0} \{ \lambda I \geq X \geq -\lambda I \} = 1 \\ \text{ヲ完備ト距離空間ヲ作ル。} \end{array} \right.$$

ナラバ R は, $\widetilde{X}$ 上ノ連続函数全体 = *semi-ordered*
ring トシテ同型, 従ツテ R は *vector* 束ナル。

以上ヲ準備トシテ初メノ作用素環 R ニ帰ル。 R
が (4), (5), (2), (3), (6) を満足スルコトハ明カデカラ
 R は *vector* 束。 *vector* 束ナルコトヲカツラミ
レバ *σ-complete* ナルコトモ明カ。即チ作用素環 R
デハ

$$X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq Y$$

ナラバ $\sup_i X_i$ が存在スルコトモ容易ニツカレカラ
デアール。

注意. 念ノタメニ作用素環 R が (2) を満足スルコ

ト Riesz = 従ッテ証明シトク. $0 \leq X \leq I$ + ルト

キ $X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2$, $X_n \in \mathcal{R}$ ト書ケルコトが云ヘルト

ヨイ. 同ジク $Y = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^2$, $Y_n \in \mathcal{R}$, ト書ケテ $\mathcal{R}$ /

可換性カラ

$$XY = \sum_{n,m} (X_n Y_m)^2 \geq 0$$

横テ X_n ハ 順次

$$X_1 = X, \quad X_{n+1} = X_n - X_n^2$$

正定数スレバヨイ. 何者

$$X_{n+1} = X_n^2 (I - X_n) + X_n (I - X_n)^2,$$

$$I - X_{n+1} = (I - X_n) + X_n^2$$

=ヨリ $X_n \geq 0$, $I - X_n \geq 0$ トスレバ $X_{n+1} \geq 0$,

$I - X_{n+1} \geq 0$ 7 得ルカラ $X_n \geq 0$ ($n=1, 2, \dots$).

然シテ $X = \sum_{k=1}^n X_k^2 + X_{n+1} = \text{ヨリ}$

$$\sum_{k=1}^n (X_k^2 \cdot f, f) \leq (X \cdot f, f) \quad \text{従ッテ} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (X_k^2 \cdot f, f) = 0$$

$$\text{故ニ} \quad X = \sum_{k=1}^{\infty} X_k^2 \quad (\text{以上})$$