OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Spectral Theorem ノ証明ニ就テ
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 240, p. 1232-1237
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74993
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1061. Spectral Theorem ノ証明ニ就テ

吉田　耕作（名大）

Hilbert 空間 by ニ於ケル有界＋Hermite 作用素 T ノ spectre 分解定理ヲ束論的ニ取扱フコトハ大分以前カラ行ハレテヰル。筆者モ「位相数學第三巻第二号」ニ「Stone - Lengyel ノ方法ノ束論的 version」トシテーツノ方法ヲ述ベタコトガアル。

Tカラ generate サレタ環 R ハ X∈R ガ positive definite ——全テノ f∈by ニ対シ (Xf, f) ≧0 —— ナルトキニ X≧0 ト書ケバ

(1) vector 束ニナリ然モ σ-complete.

(2) X≧0, Y≧0 ナラバ XY≧0

(3) 単位作用素 I ヲトレバ，全テノ X∈R ニ対シテ αI ≦ X ≦ βI ナル如ク定メ得ル。

ノ二條件ヲ満足スル。上掲抽論ニヨレバ

X > 0 ナルトキ

$$E_\lambda = I - \inf\left(I, \frac{X}{\lambda}, \frac{X^2}{\lambda^2}, \cdots\cdots, \frac{X^n}{\lambda^n}, \cdots\right)$$

トスレバ {λ>0}, {E_λ} ハ X ノ「単位分解」ニナリ

$$X = \int_0^\infty \lambda \, dE_\lambda$$

コレデ spectre 定理ガ証明デキタ譯ニナル。

然レ「R ガ vector 束ニナル」証明ヲ普通ノ F. Riesz ノ論法（Acta Szeged, 5, 23–54）デヤル積リデアル以上 spectre 定理ノ本質的ナ別証明トハ云ヒ難イ。コノ点ハ今マデ知ラレテオル束論的証明全ク=通ズル難点ナデハアルマイカ。

所デ最近発表サレタ I. Vernikoff, S. Krein, A. Jorbin ノ論文[1]ノ結果ヲ使フトラバ別証明ガ出来ル譯ニナルヤラニ思フノデ之ヲ述ベテミタイ。蛇足ナガラ上ノ三氏ノ論文ノ紹介ノ積リニモ取ッテ頂キタイ。以上ヲ前置キトスル。

先ヅ $X \geqq 0$ 且ツ $X \neq 0$ ナルトキ $X > 0$ ト書クコトニスレバ，R ニ於テハ

(4) $X > 0$, $Y > 0$ ナラバ $X + Y > 0$

(5) $X > 0$, $\lambda > 0$ ナラバ $\lambda X > 0$

及ビ (2), (3) ノ成リ立ツコトハ明カ[2]。R ノ two-sided ideal デアル $\mathfrak{p}$ ガ次ノ條件ヲ満足スルトキニ「convex」デアルト云フ。

$x > 0$, $x \in \mathfrak{p}$ ナラバ $-x < y < x$ ナル y 全テ $\in \mathfrak{p}$.

凸デアル $\mathfrak{p}$ ニヨル剰餘環 $R/\mathfrak{p}$ ハ，$X > 0$ ヲ含ム

---

(1) C.R. URSS, 30 (1941), 758–760.

(2) 今ノタメニ (2) ノ証明ハ最後ニ附ケ加ヘトク。ソノトキニ必要ニナルガ暫ラク R ノ「可換環」ナルコトハ用ヒナイデ済ム。

residual class キ $\mathfrak{N}$ ヲ >0 ト書ケバ (4), (5), (2), (3) ノ満足サレルコトガ $\mathfrak{N}$ ノ正性カラワカル。例ヘバ (4) ノ証明。$Q/\mathfrak{N}$ ヲ $\overline{X}, \overline{Y}$, $\overline{X}>0$, $\overline{Y}>0$ トスレバ $\overline{X}$ ヲ X, $\overline{Y}$ ヲ Y 且ツ $X>0, Y>0$ ナル如キ $X, Y \in R$ ガ存在スル。然ラバ $0<X+Y \in \overline{X}+\overline{Y}$ ダカラ $\overline{X}+\overline{Y} \neq \mathfrak{N}$ ガ云ヘレバヨイ。若シ $\overline{X}+\overline{Y}=\mathfrak{N}$ トスレバ $X+Y \in \mathfrak{N}$. 従ツテ $0<X<X+Y$ ト $\mathfrak{N}$ ノ正性カラ $X \in \mathfrak{N}$ トナリ $\overline{X}>0$ ナル假定ニ反スル。

偖テ transfinite induction ニヨリ，任意ノ non-trivial two-sided convex ideal ニ對シ之ヲ含ム maximal convex ideal ($=m.c.i.$ デアル) $\mathfrak{N}$ ノ存在ガ云ヘル。

$R/\mathfrak{N}=\overline{R}$ ハ simple (convex non-trivial ideal ヲ含マナイ) ガ故ニ R ノ実数体ト isomorphic ナコトガ証明サレル。以下其ノ証明。(1) 先ヅ $\overline{R}$ ハ Archimedean 即チ: $\underset{n\to\infty}{\text{order-}\lim} \frac{1}{n}\overline{I}=0$ 何者，$\overline{I}>n\overline{Y}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$, $\overline{Y}>0$ トスレバ

$$\frac{\varepsilon}{Z}\{-\eta\overline{Y} \leqq \overline{Z} \leqq \eta\overline{Y}\}$$

ガ non-trivial convex ideal ニナッテ了フカラ，故ニ $\overline{R}$ キ $\{\lambda\overline{I}, -\infty<\lambda<\infty\}$ トスレバ $\overline{X}\neq 0$ ガ存在シ

---

(1) Klein 等ノ証明ヨリ幾分簡単カト思フ。筆者ノ vector 束表現ト全ク同方法デアルコトニ注意セラレタイ。

テ全テノ λ ニ対シテ $\overline{X} \neq \lambda \overline{I}$. 今

$$\lambda_0 = \inf_{\lambda} \{ \lambda \overline{I} \geqq \overline{X} \}$$

トヲケバ Archimedean トイフコトカラ $\lambda_0 \overline{I} - \overline{X} > 0$.
$\overline{Y} = \lambda_0 \overline{I} - \overline{X}$ トヲケバ

$$\sum_{\overline{Z}} \{ -\eta \overline{Y} \leqq \overline{Z} \leqq \eta \overline{Y} \}$$

ハ $\overline{\mathfrak{R}}$ ノ non-trivial convex ideal ニナッテヰル。

結局 simple + $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ ハ実数体ニ同型ニナッタ。故ニ $\mathfrak{R}$ ノ m.c. ideal $\mathfrak{p}$ ノ全体ヲ $\widetilde{\mathfrak{p}}$ トスレバ $x \in \mathfrak{R}$ ニ homomorphism $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ デ x ニ当ル実数 $x(\mathfrak{p})$ ヲ対応サセルコトニヨリ，$\mathfrak{R}$ ハ $\widetilde{\mathfrak{p}}$ ノ上ノ有界函数 $x(\mathfrak{p})$ ノ作ル或ル環 $\mathfrak{R}(\widetilde{\mathfrak{p}})$ デ homomorphic ニ表現サレタコトニナル。

$\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}(\widetilde{\mathfrak{p}})$ が isomorphic ナタメノ充分條件トシテ $\mathfrak{R}$ が Archimedean デアレバヨイ。何者，$X \neq \lambda I$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ トスレバ $\lambda_0 = \inf_{\lambda} \{ \lambda I \geqq X \}$ $\mu_0 = \sup_{\lambda} \{ X \geqq \lambda I \}$ トヲクトキ $\lambda_0 \geqq \mu_0$. 故ニ例ヘバ $\lambda_0 \neq 0$. 然ラバ non-trivial convex ideal $\sum_{Z} \{ -\eta Y \leqq Z \leqq \eta Y \}$, $Y = \lambda_0 I - X$, ヲ含ム m.c. ideal $\mathfrak{p}$ ハ Y ヲ含ムカラ X ヲ含マナイ。—— X ヲ含メバ $\lambda_0 \neq 0$ ニヨリ $I \in \mathfrak{p}$ トナリ矛盾。

偖テ例ニヨリ $\widetilde{\mathfrak{p}}$ = weak topology ヲ入レル。即チ

$$\mathop{\mathfrak{E}}_{\mathfrak{P}}\left\{|X_i(\mathfrak{P})-X_i(\mathfrak{P}_0)|<\varepsilon_i,\ -I\leqq X_i\leqq I\right.$$

$$\left.(i=1,2,\cdots\cdots,n)\right\}$$

ノ如キ集合ヲ $\widetilde{\mathfrak{P}}$ ヲ $\mathfrak{P}_0$ ノ近傍トスレバ，$\widetilde{\mathfrak{P}}$ ハ bicompact ニシテ各 $X(\mathfrak{P})$ ハ $\widetilde{\mathfrak{P}}$ ノ上デ連続ニナル。

連続函数環 $R(\widetilde{\mathfrak{P}})$ ハ R ニ同型ニシテ i) 恒等的ニ1ナル函数 $I(\mathfrak{P})$ ヲ含ム ii) $\widetilde{\mathfrak{P}}$ ノ相異ナル二点 $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ ニ対シ $X(\mathfrak{P}_1)=0$, $X(\mathfrak{P}_2)=1$ ナル如キ連続函数 $X(\mathfrak{P})$ ヲ含ム。故ニ良ク知ラレタ如ク $R(\widetilde{\mathfrak{P}})$ ハ $\widetilde{\mathfrak{P}}$ ノ上デ連続ナ函数ノ全体ノ中デ，一様収斂ノ意味デ稠密デアル。故ニ特ニ R ガ

(6) {のミナラズ $\|X\|=\inf_{\lambda>0}\{\lambda I\geqq X\geqq -\lambda I\}$ ニヨッテ完備ナ距離空間ヲ作ル。

ナラバ R ハ，$\widetilde{\mathfrak{P}}$ 上ノ連続函数全体ニ semi-ordered ring トシテ同型，従ッテ R ハ vector 束ニナル。

以上ノ準備トシテ初メノ作用素環 R ニ帰ル。R ガ (4), (5), (2), (3), (6) ヲ満足スルコトハ明カダカラ R ハ vector 束．vector 束ナルコトヲカッラミレバ σ-complete ナコトモ明カ．即チ作用素環 R デハ

$$X_1\leqq X_2\leqq\cdots\cdots\leqq Y$$

ナラバ $\sup_i X_i$ ガ存在スルコトモ容易ニワカルカラデアル。

注意．今ノ次ニ作用素環 R ガ (2) ヲ満足スルコ

トヲ Riesz = 従ッテ証明シトク．$0 \leqq X \leqq I$ ナルトキ $X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2$, $X_n \in \mathfrak{R}$ ト書ケルコトガ云ヘルトヨイ．同ジク $Y = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^2$, $Y_n \in \mathfrak{R}$, ト書ケテ $\mathfrak{R}$ ノ可換性カラ

$$XY = \sum_{n,m} (X_n Y_m)^2 \geqq 0$$

積テ X_n ハ順次

$$X_1 = X, \quad X_{n+1} = X_n - X_n^2$$

デ定義スレバヨイ．何者

$$X_{n+1} = X_n^2 (I - X_n) + X_n (I - X_n)^2,$$

$$I - X_{n+1} = (I - X_n) + X_n^2$$

=ヨリ $X_n \geqq 0$, $I - X_n \geqq 0$ トスレバ $X_{n+1} \geqq 0$, $I - X_{n+1} \geqq 0$ ヲ得ルカラ $X_n \geqq 0$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$.

然シテ $X = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 + X_{n+1}$ =ヨリ

$$\sum_{k=1}^{n} (X_k^2 \cdot f, f) \leqq (X \cdot f, f) \quad \text{従ッテ} \lim_{k \to \infty} (X_k^2 \cdot f, f) = 0$$

故ニ $X - \sum_{k=1}^{\infty} X_k^2$ (以上)