



Title	級數論ノ一問題
Author(s)	泉, 信一; 洲之内, 源一郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 240, p. 1238-1240
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74994
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1062. 級数論 / 一問題

泉 信一, 洲之内源一郎 (東北大)

“級数 $\sum a_n$ = 於テ $a_n \downarrow 0$ 且ツ $\sum a_n$ が収斂スルヲバ $na_n \rightarrow 0$ トナル。”

コレハ古典的ナ *Olivier* ノ定理デアアル。コレヲトゲツテ *Vallée-Poussin*, *Astrowski*, *Knopp*, *Cesàro*, *Rademacher*, 泉等ノ研究ガアル。其ノ中 *Astrowski* が *Olivier* ノニテ完成シタ形デハ “ $\sum a_n$ = 於テ $a_n \downarrow 0$ トナルトキ = $\sum a_n$ が収斂スルヲノ必要充分条件ハ $\sigma_n = S_n - na_n$

$(S_n = \sum_{i=1}^n a_i)$ が収斂スルコトデアアル。”

デアアル。コレヲデハ a_n ハ正デアアルガコレヲ任意ニスルト *Cesàro* ハ

“ $\sum a_n$ = 於テ $|a_n| \downarrow 0$, S_n ノ正項ノ數ヲ p_n , 負項ノ數ヲ q_n トスレバ, コノ級数が収斂スレバ $(p_n - q_n)a_n \rightarrow 0$ デアル。”

ト云フ定理ヲノベテアル。コレハ明カニ *Olivier* ノ擴張デアアル。コレヲコレガ上ノ *Astrowski* ノ様ニ完成デキナイカト云フ問題ヲ論ジテミタイ。

$\sum_{v=1}^n a_v = S_n$ トオキ $a_v = e_v u_v$, $u_v \downarrow 0$ トスル
ト $\lambda_v = \frac{1}{u_v} \uparrow \infty$ トナル。

$$\begin{aligned}
 & \text{(恒等式)} \quad \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n}{\lambda_n} \\
 &= S_n - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) S_1 + (\lambda_3 - \lambda_2) S_2 + \dots + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) S_{n-1}}{\lambda_n}
 \end{aligned}$$

= 於て上ノ関係式ヲ代入スル

$$\begin{aligned}
 & S_n - \frac{e_1 + e_2 + \dots + e_n}{e_n} a_n \\
 &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) S_1 + (\lambda_3 - \lambda_2) S_2 + \dots + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) S_{n-1}}{\lambda_n}
 \end{aligned}$$

トナル $S_n \rightarrow S$ ナル $\{e_n\}$ ノ如何ニ拘ラズ Toeplitz ノ定理ニヨリ

$$\sigma_n = S_n - \frac{e_1 + e_2 + \dots + e_n}{e_n} a_n \rightarrow S$$

トナル。コレハ Olivier Cesàro ノ定理ノ型ナル。
 I 型ハ和法 Abelian ノ問題ニ至ル。次ニ

$$\sigma_n \rightarrow S \quad \text{ヨリ} \quad S_n \rightarrow S$$

ヲ結論スル問題ハ Tauber 型ノ問題ニナル。 $\{e_n\}$ が全部正ナルバ、換言スルバ $\sum a_n$ が正項級数ナルバコレハ收斂スルカ $+\infty$ ニ発散スルカ定メテアル。故ニ $\sigma_n \rightarrow S$ カラ $S_n \rightarrow S$ ハ明ラカデアル。コレガ Olivier Vallée-Poussin ノ定理ヲ Ostrowski ノ完成シタ型デソノ一証明デアル。

$\{e_n\}$ = 正項ヲトシセルト一般ノ場合ハドウナルカ不明デアル。少シ條件ヲ入レテ成立スル場合ヲ調べテミル。

Tauber 型ノ条件ヲ入レルト

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} a_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} e_n \frac{1}{\lambda_k} = \frac{e_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}$$

が有界+ラバヨイ。 $\{e_n\}$ が ± 1 かトラ+イトキハ

$$\left| \frac{1}{\frac{1}{|a_n|} - \frac{1}{|a_{n+1}|}} \right|$$

が有界+ラバ逆が成立スル。タトへバ級数、各項が $\frac{1}{n}$ +ラバ成立スル。又 $\{e_n\}$ を ± 1 トカギル。即チ p_n, q_n 7. n 項迄、正項、負項、数トストキ

$S_n - (p_n - q_n)|a_n| \rightarrow 0$ ヨリ $S_n \rightarrow 0$ +レ 場合=問題ヲ限定シヨウ。

$$\text{今 } \sum (p_n - q_n)^{-2} < \infty, \quad (p_n - q_n) \sum_{m=n}^{\infty} (p_m - q_m)^{-2} \rightarrow 0$$

トスル。 $S_n \equiv (p_n - q_n) \sigma_n$ トオクトキ

$$S_n - (p_n - q_n)|a_n| = S_n - (p_n - q_n) \varepsilon_n a_n$$

$$(\varepsilon_n = S q_n a_n)$$

$$= (p_n - q_n) \sigma_n - \varepsilon_n (p_n - q_n) \{ (p_n - q_n) \sigma_n - (p_{n-1} - q_{n-1}) \sigma_{n-1} \}$$

$$= \varepsilon_n (p_n - q_n) (p_{n-1} - q_{n-1}) (\sigma_{n-1} - \sigma_n)$$

$$\therefore \sigma_{n-1} - \sigma_n = O \{ (p_n - q_n)^{-1} (p_n - q_{n-1})^{-1} \} \\ = O \{ (p_n - q_n)^{-2} \}$$

$$\text{従ッテ } \sigma_n \rightarrow A \quad \text{且ツ } S_n = (p_n - q_n) A + o(1)$$

$$\text{従ッテ } a_n = A + o(1) \quad \text{及 } A = 0 \quad \therefore S_n \rightarrow 0$$

カクレテ証明サレタ。

コレヲ、問題へ $\{e_n\}$ = 条件ヲ入レテ論ジタが無条件ニハ定理ノ成立ハ難シイ、デハ+ラヨカ。