OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	談話1031ノ補遺（一次連結局所群ノ separability)
Author(s)	岩村, 聯
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 240, p. 1241-1248
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74995
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1063. 談話1031の補遺

(一次連結局所群のseparability)

岩村 聯 (東大學生)

§1. 紙上談話會談話1031定理2ヂ,「linear continuum L が[(註1)]右の local group ヲナシ[(註2)] L ノ各元 x ニ對シテ左ノ逆元 x^*[(註3)] ガ存在スレバ, L ハ左ノ separable デアルコトヲ述ベマシタ. コノ條件ノ下デ「L ハ separable デアル」コトガワカリマシタカラ以下ソレヲ証明シマス。証明ニハ上ニ言ッタ定理ハ用ヰマセン。

---

(1) 即チ端ノ有ル linear order ガ定義サレタ集合モノデ order topology ニヨッテ connected デアルモノ. 以下 L ノ topology ハ order topology トスル.

(2) 或ル $x, y \in L$ ニ對シテ積 $xy \in L$ ガ存在シ, 若シ $(xy)z$ 及ビ $x(yz)$ ガ存在スレバ $(xy)z = x(yz)$. 右ノ單位元 e ガアッテ, スベテノ x ニ對シテ xe ガ存在シテ $xe = x$. 或ル x ニ對シテ右ノ逆元 x^{-1} ガアッテ $x^{-1}x = e$. xy ノ存在スルヤウナ pair $\{x, y\}$ 及ビ, x^{-1} ノ存在スルヤウナ z ハ夫々積空間 $L \times L$ 及ビ空間 L ノ開集合ヲ作リ, xy 及ビ z^{-1} ハ $\{x, y\}$ 及ビ z ノ連続函數 (Pontrjagin, Topological groups P.83 ニ於テ單ニ local group トイハレテヰルモノ)

(3) $x^*x = e$. 然レド x^* ノ連續性ハ假定シナイ。

§2. 先ヅ L が linear continuum デアルトシマス。

補助定理1. $e \in L$ トシ，$(e, +\infty)$ ヲ x ニ関スル條件 $\mathfrak{H}(x)$ ガ：

P_1 或ル $a > e$ ニ對シテハ，スベテノ $x \in (e, a)$ ニツイテ $\mathfrak{H}(x)$ ガ満足サレル．（コレヲ簡單ニ「(e, a) デ $\mathfrak{H}(x)$ デアル」トイフ）．

P_2 (e, a) デ $\mathfrak{H}(x)$ ナラバ a ノ或ル近傍デ $\mathfrak{H}(x)$ デアル。

トイフ性質 P_1 及ビ P_2 ヲ有スレバ，$(e, +\infty)$ デ $\mathfrak{H}(x)$ デアル。

コヽデ $(e, +\infty) = (x;\ e < x)$，$(e, a) = (x;\ e < x < a)$．$L$ ニ於テ下ニ有界ナ部分集合ニ對シテハ，ソレガ空集合デナケレバ，inf. ガ存在シマスカラ，補助定理ハ明カデス。

更ニ L ガ右 local group デアルトシマス。

端点ニ $\pm\infty$ ヲモ許シタ区間ヲ廣義ノ区間、端点ガ何レモ L ノ元デアルヤウナ区間ヲ單ニ區間ト呼ビマス。I, J等ハ e（右ノ單位元）ヲ含ム廣義ノ開区間トシマス。e ヲ含ム或ル閉区間ハ実数ノ閉区間ト homeomorphic デス，ソレヲ取ッテEトシマス．3個以上ノ積ニ括弧ヲツケナイデ書イタトキハ左端カラ順ニ積ヲ作ッタモノトシマス：$xyz = (xy)z$ 等。

（注意）正ノ整数ガ與ヘラレタトシマス．$x = \xi \cdots \xi_n$

ナル $\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_n \in E$ ガ存在スルヤウナ x ノ全体ハ，第二可附番性公理ヲ満足スル積空間 $\underbrace{E\times\cdots\cdots\times E}_{n}$ ノ部分集合ノ連續像デスカラ，L ノ separable ナ部分集合トナリマス。然ツテ適當ナ n ニツイテ上ノヤウニ書ケルヤウナ全体ノ集合モ separable トナリマス。

定義　「x ガ y ガ定義サレテヰル」コトヲ $x\circ y$ ト書ク。$M, N \subseteq L$ ノトキ $y\in N \to x\circ y$ ヲ $x\circ N$ ト書キ，$x\in N \to x\circ N$ ヲ $M\circ N$ ト記ス。$e<a$ ニ對シテ，

$$I_{(a)} = \bigcup_{a\circ I} I,\quad I^{(a)} = \bigcap_{e<x<a} I_{(x)}$$

ト定メル。但シ $\cup, \cap$ ハ夫々集合論的 join 及ビ meet。

明カニ，$M_1\circ N_1,\ M_2\circ N_2 \to M_1\cup M_2\circ N_1\cap N_2$ ソシテ $I_{(a)}$ ハ $a\circ I$ ナル I ノ最大ナモノデアリ，$I^{(a)}$ ハ e ヲ含ム廣義ノ區間（又ハ e ノミカラナル集合）デアッテ，$(e, a)\circ I^{(a)}$。又 $e<b<a \to I^{(b)}\supseteq I^{(a)}$ トナルコトモ明カデス。

補助定理2.　スベテノ $a>e$ ニツイテ，e ハ $I^{(a)}$ ノ内点デアル。

証明.　「e ハ $I^{(x)}$ ノ内点デアル」ヲ $\mathfrak{H}(x)$ トシテ，補助定理1ヲ適用シマス。e ノ或ル近傍ノ x, y ニツイテハ $x\circ y$ デスカラ P_1 ハ満足サレテヰマス。次ニ (e, a) デ $\mathfrak{H}(x)$ デアルトシマス。$u\circ e$ デスカラ或ル $(a_1, a_2)\ni a$ 及ビ I ニツイテ $(a_1, a_2)\circ I$，L ハ connected デスカラ $b\in(a_1, a)$ ナル b ガ存在シマス。$(e, b)\cup(a_1, a_2)\circ I^{(b)}\supset I$。

ソコデ，$x=b$ デハ $\mathfrak{L}(x)$ ガ成立シテヰルカラ，e ハ $I^{(b)}\subset I$ ノ内点．即チ $J\subseteq I^{(b)}\subset I$ ナル J ガ存在シマス．コノ J ニツイテハ

$$x\in(e,a_2)\to x\circ I^{(b)}\subset I\to x\circ J\to I_{(x)}\supseteq J.$$

故ニ $I^{(a_2)}\supseteq J$.

故ニ $x\in(a_1,a_2)\to I^{(x)}\supseteq I^{(a_2)}\supseteq J\to\mathfrak{L}(x)$.

結局，(e,a) デ $\mathfrak{L}(x)$ ナラ a ノ或ル近傍 (a_1,a_2) デ $\mathfrak{L}(x)$．即チ $\mathfrak{L}(x)$ ハ P_2 ナル性質ヲ有スル．依ツテ $(e,+\infty)$ デ $\mathfrak{L}(x)$

（証明終）

§3. 更ニ，I ノ各元 x ニ對シテ左ノ逆元 x^* ガ存在スルトシマス。

補助定理3. 任意ノ $a>e$ 及ビ I ヲ取ル．$x\in(e,a)$ ナラバ正ノ整數 n 及ビ $\xi_1,\cdots\cdots,\xi_n\in I$ ガアッテ，$x=\xi_1,\cdots\cdots,\xi_n$，$\xi_1,\cdots\cdots\xi_i\in(e,a)$ $i=1,\cdots\cdots,n$ トナル。

証明．$b\in(e,a)$ トシマス．I ハ右ノ local group デ，b ノ左ノ逆元 b^* ガ存在スルカラ，次ノ如キ J_1，J_2，J 及ビ b ノ近傍 V ヲ取ルコトガ出來マス．（之ニツイテハ補助定理2參照）

1) $\xi\in J_1\to e\circ\xi,\ e\xi=\xi$.

2) $x\in V\to b^*\circ x,\ b^*x\in J_1$,

3) $\xi\in J_2\to b\circ\xi,\ b\xi\in V$,

4) $J\subseteq J_1\cap J_2\cap I\cap I^{(a)}$,

5) $\varepsilon \in J$ ナラ ε^{-1} ガ存在シテ $\varepsilon^{-1} \in J$.

コノ J ニツイテハ

$\varepsilon \in J \to (e \circ \varepsilon,\ b \circ \varepsilon,\ e\varepsilon = \varepsilon,\ b\varepsilon \in V)$

$\to (b^* \circ b\varepsilon,\ (b^* b)\varepsilon = \varepsilon^2 = \varepsilon) \to b^*(b\varepsilon) = \varepsilon.$

従ッテ a) $J \ni \varepsilon \neq \varepsilon' \in J \longrightarrow b\varepsilon \neq b\varepsilon'$

b) J ハ有界ナ開区間，従ッテ connected

c) $b\varepsilon$ ハ $J \ni \varepsilon$ ニツイテ continuous.

以上 a), b), c) カラ容易ニ次ノコトガ分リマス.

d) bJ ハ connected, $b\varepsilon$ ハ $J \ni \varepsilon$ ニツイテ strictly monotone, 従ッテ又 bJ ハ b ヲ含ム有界ナ開区間デアル。

「正ノ整数 n 及ビ $\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_n \in I$ ガアッテ, $x = \varepsilon_1 \cdots\cdots \varepsilon_n$, $\varepsilon_1 \cdots\cdots \varepsilon_i \in (e, a)$ $i = 1, \cdots\cdots, n$ トナル」コトヲ $\mathfrak{L}(x)$ ト記シ, linear continuum $(-\infty, a)$ ニ補助定理 I ヲ適用シマス. $\mathfrak{L}(x)$ ガ P, ナル性質ヲ有スルコトハ trivial デス. 今 $b \in (e, a)$ トシテ, (e, b) デ $\mathfrak{L}(x)$ ダケルトシマス. d) ニヨッテ $b\varepsilon \in (e, b)$ ナル $\varepsilon \in J$ ガ存在シマス. 仮定ニヨッテ正整数 $n-1$ 及ビ $\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_{n-1} \in I$ ガ存在シテ $b\varepsilon = \varepsilon_1 \cdots\cdots \varepsilon_{n-1}$, $\varepsilon_1 \cdots\cdots \varepsilon_j \in (e, a)$ $j = 1, \cdots, n-1$ トナリマス.

今 $\varepsilon_n = \varepsilon^{-1}$ トスレバ $\varepsilon_n \in J \subseteq I^{(a)} \subseteq I^{(b)}$, $b\varepsilon \in (e, b)$ デスカラ $b\varepsilon \circ \varepsilon_n$.

故ニ $b = be = b(\varepsilon\varepsilon^{-1}) = b\varepsilon\varepsilon^{-1} = \varepsilon_1 \cdots\cdots \varepsilon_n$,

$\xi_n \in J \subseteq I$. 即チ，$x=b$ ニ於テ $\mathfrak{f}(x)$ ガ成立スル．再ビ(1)ヲ参照スレバ：

$b \in (e, a)$ トシテ，(e, b) デ $\mathfrak{f}(x)$ ナラバ b ノ或ル近傍ガ（即チ b 丁デ）$\mathfrak{f}(x)$ デアルコトガワカリマス．即チ $\mathfrak{f}(x)$ ハ P_2 ナル性質ヲ有シマス．補助定理1ニヨッテ (e, a) デ $\mathfrak{f}(x)$ デアルコトガ言ヘレマスカラ，証明ハ終ッタワケデス．

定理．L ハ separable デアル．

証明．補助定理3ニ於テ $I=E$ トオケバ，スベテノ $x \in (e, a)$ ニ對シテ，$x = \xi_1, \cdots\cdots \xi_n$ ナル $\xi_1, \cdots\cdots, \xi_n \in E$ ガ存在スルコトニナリマス．$e<a$ ハ任意デスカラ，$x \in (e, a)$ ナル條件ハ $x>e$ ナル條件デ置キ換ヘラレマス．$x<e$ ナル x ニツイテモ同様ナコトガ言ヘマス．

即チ任意ノ x ガ上ノマウナ形ニ書ケマス．§2ノ〔注意〕ニヨッテ，L ハ separable デアルコトガワカリマス．

（証明終）

§4．「定理2ノ証明」ニ於テ「e ノ或ル近傍 V トx₀ヲ含ム或ル開集合 G トガ $x=x_0 y$，$y=x_0^* x$，$y \in V$，$x \in G$ ニヨッテ homeomorphically ニ對應スル」コトハ証明ヲ要スル．（一般ニ local group デハ單ナル x^* ノ存在カラハ証明サレナイカラ）．以下ハソノ証明デアル．先ヅ

(5)' L^* ハ linear continuum, $f(y)$ ハ linear continuum L デ continuous デ L ヨリ, $y_1 \neq y_2 \in L \longrightarrow L^*$ ヨリ $f(y_1) \neq f(y_2) \in L^*$, デアルナラバ, $f(y)$ ハ strictly monotone デアル。

証明. L ヨリ $y_0 < y_1 \in L$ トスル. $f(y_0) < f(y_1)$ トシテモ一般性ヲ損ジナイ。(5) ニ於テ L ノ代リニ $(y_0, +\infty)$ トシ, $g(y) = f(y_0)$ トシテ見レバ $y_0 < y \rightarrow f(y_0) < f(y)$ ガワカル。

同様ニ $y < y_1 \rightarrow f(y) \leq f(y_1)$

コレニヨッテ, 一般ニ L ヲ $y_2 < y_3 \in L \rightarrow f(y_2) < f(y_3)$ ナル場合ヲ含ンデ考ヘレバ, 容易ニ知ラレル。((5)' 証明終リ)

以下 V_1, V_2 等ハ e ノ近傍, G_1 ハ x_0 ノ近傍トスル。

$x_0 e$, $x_0^* x_0$ ハ存在シテ, $x_0 e = x_0$, $x_0^* x_0 = e$ デアルカラ, V_1, V_2, G_1 ヲ次ノヤウニ取ルコトガ出来ル。

$$\begin{cases} y \in V_1 \text{ ナラ } ey \text{ ガ存在シテ } ey = y \\ x \in G_1 \text{ ナラ } x_0^* x \text{ ガ存在シテ } x_0^* x \in V_1 \\ y \in V_2 \text{ ナラ } x_0 y \text{ ガ存在シテ } x_0 y \in G_1 \end{cases}$$

$V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$ トスル.

コノ V_3 ニツイテハ, $y \in V_3$ ナラ ey, $x_0 y$ ガ存在シテ $ey = y$, $x_0 y \in G_1$, 従ッテ $x_0^*(x_0 y)$ ガ存在スル, 従ッテ又 $(x_0^* x_0) y$ ガ存在シテ

$$x_0^*(x_0 y) = (x_0^* x_0) y = ey = y, \quad (y \in V_3)$$

V_3 ヲ L, x_0y ヲ $f(y)$, L ヲ L^* ト書キ直シテ見レバ，上ノ式カラ，(5)′ ノ結果ノ成立シテ本ルコトガワカル．従ッテ x_0y ハ $y\in V_3$ ニ関シテ strictly monotone デアル，ソシテ V_3 ハ connected デアルカラ，$f(V_3)$ ハ x_0 ヲ含ム開区間トナル．

ソコデ $V=V_3$, $G=f(V_3)$ トスレバ $f(y)=x_0y\in G$, $y\in V$ ニヨッテ V ガ G ニ $1\sim1$ ニ写像サレル，$f(y)=x_0y$ ハモトヨリ continuous，ソノ逆写像ハ上式ニヨッテ，$x_0{}^*x$, $x\in G$ デアルカラコレモ continuous デアル．コレデ証明ハ終ッタ．