



Title	非可換体ノ上ノ射影変換群
Author(s)	安倍, 亮
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 240, p. 1248-1275
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74996
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1064. 非可換体, 上, 射影変換群

安 悟 亮

R を任意, Schiefkörper, $V_{n+1}(R)$ を $n+1$ 次元 R -左加群とする。 V / R -部分加群全体, 作らる $N_{n+1}(R)$ と書き, 「 R , 上, n 次元射影幾何學」 と呼ぶことにする。 以下知られてゐる様々, 之は $n+1$ 次元, irreducible, complemented, modular lattice であり, 逆に n 次元 lattice L ($n \geq 3$, L は

$n=2$ の Desargues / 定理 = 相當する性質ヲ持
ツバツヒニ), 適當な $\tilde{k}$ ヲトレバ $V_{n+1}(\tilde{k})$ ト同型
ナル. $n=0, 1$ ノトキハ lattice トシテハ trivial
デアラルヲ, 當分考慮, 外ニオク. $n=1$ ノトキハ後ニ考
ヘル.

§1. Kollineation / 解析的表現

$n \geq 2$ トスル. $V_{n+1} = V_{n+1}(\tilde{k})$ / (此 / lattice
ハ /) 同型對應ヲ V_{n+1} / Kollineation ト云フ. 一ツ
同型對應ガアレバ, スベテ / 同型對應ヲ知ルニハ V_{n+1} /
自己同型ガ分レバヨイ. ソコデ V_{n+1} / (lattice トシテ
ノ) 自己同型ヲ單ニ V_{n+1} / Kollineation ト云フコトニ
スル. 先ヅ Kollineation / 解析的表現ヲ求テ見
ル.

$V_{n+1}(\tilde{k})$ / 一ツ / $\tilde{k}$ -Basis ヲ $y_0, \dots, y_n$ トス
ル. 即チ

$$V_{n+1}(\tilde{k}) = y_0 \tilde{k} + \dots + y_n \tilde{k}$$

與ヘラレタ Kollineation ナ「點」 $(y_0)^{1)}$ ト $(\bar{y}_0)$,
—, (y_n) ト $(\bar{y}_n)$ ガ對應スルトスル. コノトキ點
 $(y_0 + \dots + y_n) = \tilde{k} (\bar{y}_0 + \dots + \bar{y}_n)$ ガ對應スル
トシテヨイ.²⁾ 任意ノ點 $(\sum y_i \lambda_i) = \tilde{k} (\sum \bar{y}_i \mu_i)$ ガ

1) 一般ニ $y, \bar{y}, \dots \in V_{n+1}(\tilde{k})$ / 生成スル Modul
ヲ $(y, \bar{y}, \dots)$ ト書ク. 一次元 / Modul (y) ハ
點ヲイラハス.

2) 點ヲイラハス Vektor / 一次元屬性ハ V_{n+1} / lattice

對應スルトシテ、 μ_2 ガドウナルカ 念レバヨイ。

先ヅ直線 $(y_0) \vee (y_1) = \wedge$ 直線 $(\bar{y}_0) \vee (\bar{y}_1)$ ガ對應スルカラ

$$(y_0 + y_1, \lambda) \longleftrightarrow (\bar{y}_0 + \bar{y}_1, \bar{\lambda}) \quad \lambda, \bar{\lambda} \in \hat{e}$$

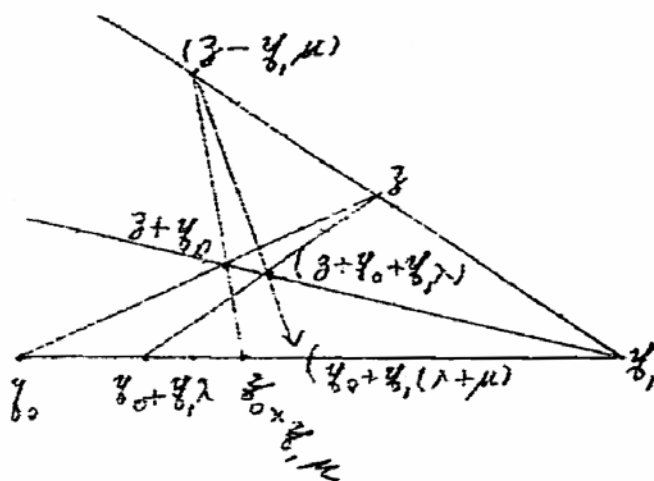
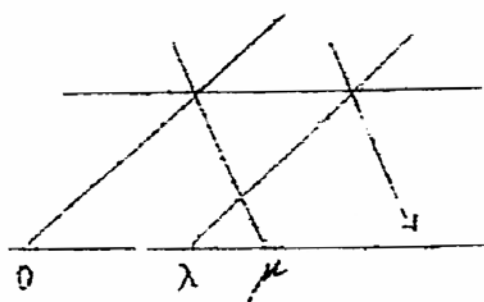
コノトキ $\bar{\lambda} = \sigma(\lambda)$ トオケバ、 σ ガ $\hat{e}$ ノ自ニ同型:

$$\sigma(\lambda + \mu) = \sigma(\lambda) + \sigma(\mu), \quad \sigma(\lambda\mu) = \sigma(\lambda)\sigma(\mu)$$

= ナルコトハ 例ニヨツテ、作図ヲ証明デキル。

即チ直線 $(y_0) \vee (y_1)$ ヲ含ムアル平面内デ、射影的ト作図ニヨツテ 点 $(y_0 + y_1, (\lambda + \mu))$, $(y_0 + y_1, \lambda\mu)$ ヲ求メルコトガデキ、*Kollineation* = ヨレ像ガ丁度 $(y_0 + y_1, (\bar{\lambda} + \bar{\mu}))$, $(y_0 + y_1, \bar{\lambda}\bar{\mu})$ ヲ求メル図ニナルカラデアイル。

[和ノ作圖]



トシテ、性質デアルカラ、*Kollineation* デ保タレル。

$$\text{故ニ } (y_0 + \dots + y_n) = \wedge \text{ 何カ } (\bar{y}_0 \lambda_0 + \dots + \bar{y}_n \lambda_n)$$

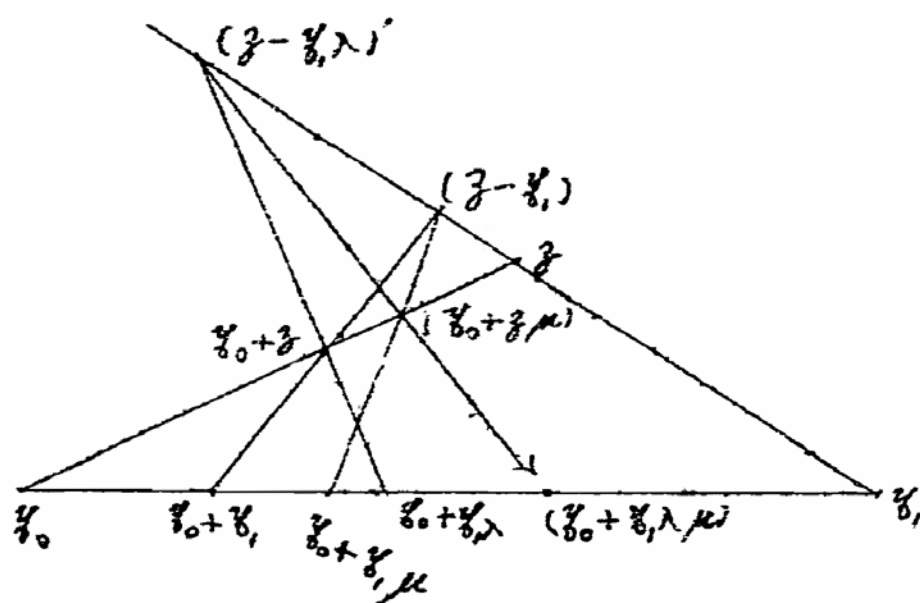
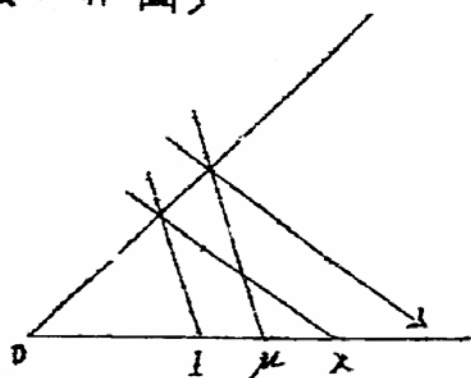
ガ對應スル。シカレニ、 $(y_0 + \dots + y_n)$, (y_0) , —, (y_n)

ノ中ドノ $n+1$ 個ヲ一次独立, $\therefore ((\sum \bar{y}_i \lambda_i), (\bar{y}_0)$,

—, $(\bar{y}_n)$ ノ中ドノ $n+1$ 個ニ一次独立, 従ツテ $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ ハ

スベテキ, $\therefore \bar{y}_i \lambda_i$ ノ代リニ $\bar{y}_i$ ト書ケバ本文ノ極ニナル。

[積ノ作圖]



(図ニ於テ、括弧ヲ附ケタ坐標ハ、作圖ニヨツテ他ノ

坐標カラ定マルモイザアル)

結局 $(y_0) \leftrightarrow (y_1)$ ニ含メテ云ハル。

$$(y_0 \lambda_0 + y_1 \lambda_1) \leftrightarrow (\bar{y}_0 \cdot \sigma(\lambda_0) + \bar{y}_1 \cdot \sigma(\lambda_1))$$

一般ニ $(y_i) \cup (y_j)$ 上デ

$$(y_i \lambda_i + y_j \lambda_j) \leftrightarrow (\bar{y}_i \cdot \sigma_{ij}(\lambda_i) + \bar{y}_j \cdot \sigma_{ij}(\lambda_j))$$

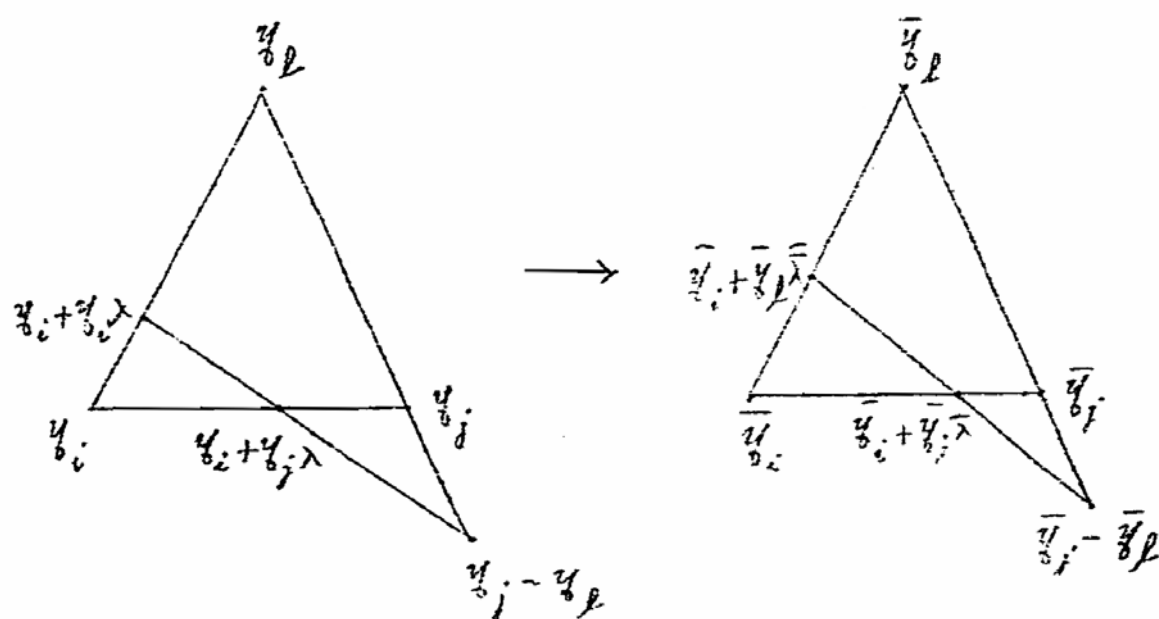
コノ σ_{ij} ハ $\bar{K}$ ノ自己同型デアアルガ、実ハ i, j ノ如何

ニ係ラズ皆同じデアアルコトカ次ノヤウニシテ合ル: $\sigma_{ij} = \sigma_{kl}$

ヲ云フニハ $\sigma_{ij} = \sigma_{il}$ ノ如ク共通ノ番号 l アルバアヒテ証

明スレバヨイ。 $\sigma_{ij} = \sigma_{il} = \sigma_{kl}$ トナルカラデアアル。

初テ $\sigma_{ij}(\lambda) = \bar{\lambda}$, $\sigma_{ij}(\lambda) = \bar{\lambda}$ トオケル, *Kollineation* = ヨル左図ノ像トシテ右図ヲ得ル。



右ノ圖ヨリ $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}$ カ判ル。7. + ハチスベテノ σ_{ij} ハアル
一ツノ σ ニ等シイ。

$$\text{初テ } (\sum y_i \lambda_i, y_0, -, y_{i-1}, y_{i+1}, -, y_{j-1}, y_{j+1}, -, y_n) \\ \wedge (y_i, y_j) = (y_i \lambda_i + y_j \lambda_j)$$

$$= \wedge (\sum \bar{y}_i \mu_i, \bar{y}_0, -, \bar{y}_{i-1}, \bar{y}_{i+1}, -, \bar{y}_{j-1}, \bar{y}_{j+1}, -, \bar{y}_n) \\ \wedge (\bar{y}_i, \bar{y}_j) = (\bar{y}_i \mu_i + \bar{y}_j \mu_j)$$

カ對應スル。即チ $(y_i + y_j (\lambda_j \lambda_i^{-1})) \leftrightarrow (\bar{y}_i + \bar{y}_j (\mu_j \mu_i^{-1}))$

$$\text{ヨリ } \mu_j \mu_i^{-1} = \sigma(\lambda_j \lambda_i^{-1}), \text{ 或ハ } \sigma(\lambda_i)^{-1} \mu_i = \sigma(\lambda_j)^{-1} \mu_j$$

i, j ハ任意デアルカラアル $p \in K$ カアリ, スベテノ i 對シテ $\mu_i = \sigma(\lambda_i)^{-1} p$ ³⁾

$$\therefore (\sum y_i \lambda_i) \leftrightarrow (\sum \bar{y}_i \mu_i) = ((\sum \bar{y}_i \sigma(\lambda_i)) p) \\ = (\sum \bar{y}_i \sigma(\lambda_i))$$

3) 以上ハ $\lambda_i, \lambda_j \neq 0$ トシテノ結論デアルガ, $\lambda_i = 0$ ナラバ

$\mu_i = 0$ デアルカラ (3) ハ又ハリ 成立ツ。

即ち「 $\mathcal{H}_{n+1}(\tilde{k})$ 」任意、Kollineation、 $\sum y_i \lambda_i \leftrightarrow \sum \bar{y}_i \sigma(\lambda_i)$ 、形 = ナル、但し $\sigma \in \tilde{k}$ 、自己同型⁴ 迄 = 「 $\mathcal{V}_{n+1}(\tilde{k})$ 」二組、Basis、 $y_0, \dots, y_n; \bar{y}_0, \dots, \bar{y}_n$ ト $\tilde{k}$ 、任意、自己同型 σ フトルトキ

$$(\sum y_i \lambda_i) \leftrightarrow (\sum \bar{y}_i \sigma(\lambda_i))$$

ナル意、一対一対応 = ヨリ、 $\mathcal{H}_{n+1}(\tilde{k})$ 、Kollineation が生ズル」コトハ明カデアス。

$$\bar{y}_k = \sum y_i s_{ik}, \quad s_{ik} \in \tilde{k}$$

即ち $(\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_n) = (y_0, \dots, y_n)S$, $S = \begin{bmatrix} s_{00} & \dots & s_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n0} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix}$

ト表ハセバ、 $y_0, \dots, y_n$ フ固定シタトキ、ズヾ $\mathcal{H}_{n+1}$ Kollineation $\wedge GL(\tilde{k}, n+1)$ ($\tilde{k}$ 、上ノ逆、 $n+1$ 次行列ノ作ル群)、行列 S ト $\tilde{k}$ 、自己同型 σ フ表ハサレル。コ、Kollineation $\mathcal{F}(S, \sigma)$ ト書クコトニスル。

$\sum y_i \lambda_i =$ 先ツ (S, σ) フ行ヒ決 = (T, τ) フ行ヘバ

$$\begin{aligned} (\sum y_k \lambda_k) &\rightarrow (\sum y_j s_{jk} \sigma(\lambda_k)) \\ &\rightarrow (\sum y_j \tau_{ij} \tau(s_{jk} \sigma(\lambda_k))), \end{aligned}$$

故 = $\tau(s_{jk})$ 、作ル行列 T S^T ト書ケバ

$$(T, \tau)(S, \sigma) = (TS^T, \tau\sigma)$$

4) 換言スレバ $\mathcal{H}_{n+1}$ 、Kollineation $\wedge \mathcal{V}_{n+1}$ 、half linear Transformation フ表ハサレル。

一ツ, $Kollineation$ を表はす (S, σ) は一意に定まる。
 1. ヲレハ $\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_n$ に対し $\bar{y}_i = \bar{y}_0 \rho, \dots, \bar{y}_n \rho$
 ($0 \neq \rho \in \hat{K}$) がトルエトモ出来ルカラデアル。此ノトキ
 S ハ $S\rho$ トナリ, 又

$$(\sum y_i \lambda_i) \leftrightarrow (\sum \bar{y}_i \sigma(\lambda_i)) = (\sum (\bar{y}_i \rho) (\rho^{-1} \sigma(\lambda_i))) \\ = (\sum (\bar{y}_i \rho) (\rho^{-1} \sigma(\lambda_i) \rho))$$

デアルカラ, 内部自己同型 $\rho^{-1} \lambda \rho = \rho(\lambda)$ トナケバ, σ ノ
 代リ $= \rho \sigma$ トナル。即チ

$$(S, \sigma) = (S\rho, \rho\sigma)$$

即チ σ ハ内部自己同型ヲ除イテノミ定マルモノデアル。一
 ツノ $Kollineation$ を表はす (S, σ) トシテハ上ノ様ナ
 モノシカナイコトモ明カデアル。⁵⁾ 特ニ恒等変換 (E, I)
 ハモツト一般ニハ

$$(\rho E, \rho)$$

ト表ハサレル。

$\hat{K}$ ノ自己同型群ヲ $\sigma_L = \sigma_L(\hat{K})$, 内部自己同型群ヲ
 $\sigma = \sigma(\hat{K})$ トスル。又 $\mathcal{K}_{n+1}$ ノ $Kollineation$ 全体ノ
 群ヲ $\mathcal{O}_n$ トスル。

$$\mathcal{O}_n \ni (S, \sigma) \rightarrow \sigma \in \sigma_L / \sigma$$

ニ, $\mathcal{O}_n$ ノ σ_L / σ 全体ニ Homomorphismus ガデキル。
 σ_L / σ ノ単位元 $\sigma = \text{行ク}$ 即チ Normalteiler ヲ $\mathcal{O}_0$

5) 実際典ヘラレタ $Kollineation$ $\tau(\bar{y}_i) \leftrightarrow (\bar{y}_i)$,

$$(\sum y_i) \leftrightarrow (\sum \bar{y}_i) = \text{ナレ様ナ } \bar{y}_i \text{ ノトリ方ハ, } \bar{y}_0,$$

$$\dots, \bar{y}_n \text{ ノ代リ} = \bar{y}_0 \rho, \dots, \bar{y}_n \rho \text{ ノトル事以外ニハナシ。}$$

トスレバ

$$\alpha/\mathcal{I} \cong \alpha/\alpha_0$$

$$\alpha_0 = ((S, \underline{P}); S \in GL(\tilde{k}, n+1), \underline{P} \in \mathcal{I}(\tilde{k}))$$

α_0 : Kollineation 7 特 = linear Kollineation

ト云フコト = スル。(1) / モット幾何学的 + 定義ハ 後 = 考
ヘルコト = スル)

$(S, \sigma) = (S\rho, \rho\sigma) \neq 1$, linear Kollineation
ハ必ず $(S, 1)$ / 形 = 書ケル。 $(S, 1) = (T, 1)$
 $= \text{ナル}$ / $\wedge T = S\rho \text{ 等 } \rho = 1 \text{ ナル}$ / $\wedge$ $\rho \neq 1$ ハ $\tilde{k}$
/ Zentrum $Z = Z(\tilde{k})$ / 元ヲ ρ ナル。即チ

$$(S, 1) = (T, 1) \Leftrightarrow T = S\zeta, \zeta \in Z^* (Z \neq 0 \text{ 以外
/ 元 / 乘法群})^{6)}$$

$$\therefore \alpha_0 \cong GL(\tilde{k}, n+1) / Z^*, Z^* \wedge GL, \text{Zentrum} \\ = \text{ナツテ居ル。}^{7)}$$

従ッテ $\tilde{k}$ が可換時 / 時ト全様

$$\alpha_0 = PL(\tilde{k}, n+1)^{8)}$$

ト書クコト = スル。

6) 一般 = Schiefkörper $\tilde{k}$ / 0 以外 / 元 / + 2 乘法群ヲ今
後皆 = $\tilde{k}^*$ ト書クコト = スル。

7) 用ハバ, 行列環 $\tilde{k}_{n+1}$ / 部分集合トシテ GL ハ $\tilde{k}_{n+1}$ 全体ヲ生成
スル事, $\tilde{k}_{n+1}$ / (環トシテ) Zentrum が Z ナルコトカラ合ル。

8) GL = general linear, PL = projective linear,
後 = 出ル SL = special linear, B.L.V. d. Waerden.
Gruppen von linearen Transformationen²¹⁴.

α の構造

$\alpha, \beta, \dots \in \alpha/\gamma = \text{「}\alpha\text{」}$, äußere Automorphismengruppe」 = 群レテ, 夫々代表 $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \dots$ をエランデオク。特 = α/γ の単位類 γ の代表トエラハ 1 フトル。

$$\alpha = \sum_{\alpha \in \alpha/\gamma} \gamma \sigma_\alpha$$

α の元ハ必ず (S, σ_α) の形ニ書ケ, γ の形デ S ガ $S \in \mathbb{Z}^*$ ナル因数ヲ除イテ定マルコトハ, $(S, 1)$ の場合ト全様デアル。

$$(S, \sigma_\alpha) = (T, \sigma_\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta, \\ T = \zeta S, \zeta \in \mathbb{Z}^*$$

今 $\alpha = \alpha(\alpha)$ の構造ハ今ツテ居レテ, α/γ の Faktorensystem

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta = \underline{p_{\alpha, \beta}^{-1}} \sigma_{\alpha\beta}, \quad \underline{p_{\alpha, \beta}} \in \gamma$$

ノ形ニ書ケ. ($\underline{p_{\alpha, \beta}} \in \alpha^* \cap \mathbb{Z}^*$, 元ヲ除イテ定マル) 此ノトキ

$$(T, \sigma_\alpha)(S, \sigma_\beta) = (TS^{\sigma_\alpha}, \sigma_\alpha \sigma_\beta) \\ = (TS^{\sigma_\alpha}, \underline{p_{\alpha, \beta}^{-1}} \sigma_{\alpha\beta}) = (TS^{\sigma_\alpha} \underline{p_{\alpha, \beta}}, \sigma_{\alpha\beta})$$

$$\text{即チ} \quad (T, \sigma_\alpha)(S, \sigma_\beta) = (TS^{\sigma_\alpha} \underline{p_{\alpha, \beta}}, \sigma_{\alpha\beta})$$

之ヨリ

$$(S, \sigma_\alpha)^{-1} = (\underline{p_{\alpha^{-1}, \alpha}} S^{-\sigma_{\alpha^{-1}}}, \sigma_{\alpha^{-1}})$$

ナレ事ニナルガ, 別ニ後ヲ使ハナイ。

§2. $n=1$ ノバアヒ.

一次元ノ射影幾何學ハ, 束トシテハ *trivial* デアツテ, 束トシテノ自己同型ハ点ノ任意ノ一對一交換トナツテ了ラカテ, ソレヲ *Kollineation* ト呼ブヲケニハ行カナイ.

通常ハ調和列点ガ調和列点ニ移ルコトヲ條件ニ加ヘテ *Kollineation* ト呼ブ. 調和列点ト云フ考ハ, 勿論一次元ノ中デ束論的ニ特徴ヅケ得ルモノデハナク, 考ヘル一次元空間カ二次元以上ノ空間ニ *einbetten* サレテキレモノト考ヘテ, 始メテ外ノ空間ヲ束論的ニ定義出来ル. 又坐標モノノ場合ニ始メテ入レルコトガ出来ル. 点ハ $V_2(\bar{k}) = \sum \bar{y}_i \bar{e}_i + \bar{y}_0 \bar{e}_0$ ノ一次元 *Teilmodul* $(\lambda_0 \bar{y}_0 + \lambda_1 \bar{y}_1)$ トシテ表ハサレ

$$(\bar{y}_0), (\bar{y}_1); (\bar{y}_0 + \bar{y}_1), (\bar{y}_0 - \bar{y}_1)$$

ナルニツテ, 点対カ互ニ他ヲ調和ニ分ツ. 可換体 $\bar{k}$ ノバアヒニハ, コノ關係ヲ保ツ点ノ一對一交換ハ

$$(\bar{y}_0 \lambda_0 + \bar{y}_1 \lambda_1) \rightarrow (\bar{y}_0 \bar{\lambda}_0 + \bar{y}_1 \bar{\lambda}_1), \quad \bar{\lambda} = \sigma(\lambda)$$

デ σ カ $\bar{k}$ ノ自己同型ニナルカ, $\bar{k}$ カ一般ニ *Schiefkörper* ノ時ハ次ニ述ベルヤウニ必ずシモサウハナラナイ.

$\bar{k}$, *Charakteristik* $\chi(\bar{k}) = 2$ ノトキハ,

$(\bar{y}_0 + \bar{y}_1) = (\bar{y}_0 - \bar{y}_1)$ トナリ調和列点ノ不変ハ別ニ條件ヲ生ジナカテ, 今後 $\chi(\bar{k}) \neq 2$ トスル. 一ツノ *Kollineation* ガアタヘラレタ時 $n \geq 2$ ノトキト同様ニ

$$(\bar{y}_0) \leftrightarrow (\bar{y}_0), (\bar{y}_1) \leftrightarrow (\bar{y}_1), (\bar{y}_0 + \bar{y}_1) \leftrightarrow (\bar{y}_0 + \bar{y}_1)$$

+ル $\bar{y}_0, \bar{y}_1$ ハ共通ノ右因數ヲ除イテ定マル。コノトキ

$$(y_0 + y_1, \lambda) \leftrightarrow (\bar{y}_0 + \bar{y}_1, \bar{\lambda})$$

トスレバ $\bar{\lambda} = \sigma(\lambda)$ ハ λ ノ函數トシテ一意的ニ決ル。

$\lambda \leftrightarrow \bar{\lambda}$ ハ一對一デアル。

$$\text{特ニ} \quad \sigma(0) = 0 \quad \sigma(1) = 1$$

1°. σ ハ $\bar{\lambda}$ 加法ニ關スル自己同型デアアル。即チ

$$\sigma(\lambda + \mu) = \sigma(\lambda) + \sigma(\mu)$$

$$\therefore (y_0 + y_1, \lambda) \leftrightarrow (\bar{y}_0 + \bar{y}_1, \bar{\lambda})$$

$$(y_0 + y_1, \mu) \leftrightarrow (\bar{y}_0 + \bar{y}_1, \bar{\mu})$$

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow \bar{\lambda} \neq \bar{\mu}$$

$$\begin{aligned} ((y_0 + y_1, \lambda) - (y_0 + y_1, \mu)) &= (y_1) \leftrightarrow (\bar{y}_1) \\ &= ((\bar{y}_0 + \bar{y}_1, \bar{\lambda}) - (\bar{y}_0 + \bar{y}_1, \bar{\mu})) \end{aligned}$$

デアアルカラ調和共扼點ヲ對應スル。

$$((y_0 + y_1, \lambda) + (y_0 + y_1, \mu)) \leftrightarrow ((\bar{y}_0 + \bar{y}_1, \bar{\lambda}) + (\bar{y}_0 + \bar{y}_1, \bar{\mu}))$$

$$\text{或ハ} \quad \left(y_0 + y_1, \frac{\lambda + \mu}{2} \right) \leftrightarrow \left(\bar{y}_0 + \bar{y}_1, \frac{\bar{\lambda} + \bar{\mu}}{2} \right)$$

$$\text{即チ} \quad \sigma\left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right) = \frac{\bar{\lambda} + \bar{\mu}}{2} = \frac{\sigma(\lambda) + \sigma(\mu)}{2}$$

$\lambda = \mu$ ナラバ $\text{trivial} =$ 成立ス。又 $\mu = 0$ トセバ

$$\sigma\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{\sigma(\lambda)}{2}$$

$$\therefore \frac{\sigma(\lambda + \mu)}{2} = \sigma\left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right) = \frac{\sigma(\lambda) + \sigma(\mu)}{2}$$

$$\sigma(\lambda + \mu) = \sigma(\lambda) + \sigma(\mu) \quad \text{q.e.d.}$$

$$2^\circ. \quad \sigma\left(\frac{1}{\lambda^{-1} + \mu^{-1}}\right) = \frac{1}{\sigma(\lambda)^{-1} + \sigma(\mu)^{-1}}, \quad \lambda \neq 0 \neq \mu$$

$\therefore \lambda \neq \mu, \lambda \neq 0 \neq \mu$ トスル. ($\lambda = \mu \neq 0$ トキハ *trivial*)

$$(\gamma_0 + \gamma, \lambda) \leftrightarrow (\bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}, \bar{\lambda}),$$

$$(\gamma_0 + \gamma, \mu) \leftrightarrow (\bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}, \bar{\mu})$$

コノトキ

$$\begin{aligned} & ((\gamma_0 + \gamma, \lambda)\lambda^{-1} - (\gamma_0 + \gamma, \mu)\mu^{-1}) = (\gamma_0) \leftrightarrow (\bar{\gamma}_0) \\ & = ((\bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}, \bar{\lambda})\bar{\lambda}^{-1} - (\bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}, \bar{\mu})\bar{\mu}^{-1}) \end{aligned}$$

デカテ, γ, γ 調和共軛点ニ對應スル.

$$((\gamma_0 + \gamma, \lambda)\lambda^{-1} + (\gamma_0 + \gamma, \mu)\mu^{-1}) \leftrightarrow ((\bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}, \bar{\lambda})\bar{\lambda}^{-1} + (\bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}, \bar{\mu})\bar{\mu}^{-1})$$

$$\text{或ハ} \quad \left(\gamma_0 + \gamma, \frac{2}{\lambda^{-1} + \mu^{-1}}\right) \leftrightarrow \left(\bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}, \frac{2}{\bar{\lambda}^{-1} + \bar{\mu}^{-1}}\right)$$

$$\text{即チ} \quad \sigma\left(\frac{2}{\lambda^{-1} + \mu^{-1}}\right) = \frac{2}{\sigma(\lambda)^{-1} + \sigma(\mu)^{-1}},$$

$$2^\circ \text{ 則チ} \quad \sigma\left(\frac{1}{\lambda^{-1} + \mu^{-1}}\right) = \frac{1}{\sigma(\lambda)^{-1} + \sigma(\mu)^{-1}} \quad \text{q. e. d.}$$

3°. 逆 =

$$(A) \quad \begin{cases} \sigma(i) = 1 \\ \sigma(\lambda + \mu) = \sigma(\lambda) + \sigma(\mu) \\ \sigma\left(\frac{1}{\lambda^{-1} + \mu^{-1}}\right) = \frac{1}{\sigma(\lambda)^{-1} + \sigma(\mu)^{-1}} \end{cases}$$

ヲ満足スル σ , 一對一変換ヲトレバ

$$(\gamma_0 + \gamma, \lambda) \leftrightarrow (\bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}, \sigma(\lambda)), \quad (\gamma_i) \leftrightarrow (\bar{\gamma}_i)$$

= ヨツテ 調和列点ハ 不変デアリ.

$\therefore \lambda, \mu, \nu$ は互に異ルヲシテ, $(\gamma_0 + \gamma_1, \lambda), (\gamma_0 + \gamma_1, \mu)$
 = 關スル $(\gamma_0 + \gamma_1, \nu)$ / 調和共軛点ヲ求メル。

$$\begin{aligned} & ((\gamma_0 + \gamma_1, \lambda)\alpha + (\gamma_0 + \gamma_1, \mu)\beta) \\ &= (\gamma_0(\alpha + \beta) + \gamma_1(\lambda\alpha + \mu\beta)) = (\gamma_0 + \gamma_1, \nu) \end{aligned}$$

$$+ \text{テ } \nu \neq \infty, \nu(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \mu\beta,$$

$$(\lambda - \nu)\alpha + (\mu - \nu)\beta = 0$$

即チ $\alpha = (\lambda - \nu)^{-1}, \beta = -(\mu - \nu)^{-1}$ ト取レバヨイ。共

軛点ハ $((\gamma_0 + \gamma_1, \lambda)(\lambda - \nu)^{-1} + (\gamma_0 + \gamma_1, \mu)(\mu - \nu)^{-1})$

$$= (\gamma_0((\lambda - \nu)^{-1} + (\mu - \nu)^{-1}) + \gamma_1(2 + \nu((\lambda - \nu)^{-1} + (\mu - \nu)^{-1})))$$

$$= \left(\gamma_0 + \gamma_1, \left(\frac{2}{(\lambda - \nu)^{-1} + (\mu - \nu)^{-1}} + \nu \right) \right)$$

$$\text{組ニ } (\lambda - \nu)^{-1} + (\mu - \nu)^{-1} = 0 \quad \text{即 } \nu = \frac{\lambda + \mu}{2} \quad \text{ノバアヒテ}$$

除ク。

同様ニ $(\bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}_1, \bar{\lambda}), (\bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}_1, \bar{\mu})$ = 關スル $(\bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}_1, \bar{\nu})$

/ 調和共軛点ハ同ジ形ニナルカラ, 調和列点ガ不変トス

$\lambda = \infty$

$$\sigma \left(\frac{2}{(\lambda - \nu)^{-1} + (\mu - \nu)^{-1}} + \nu \right) = \frac{2}{(\bar{\lambda} - \bar{\nu})^{-1} + (\bar{\mu} - \bar{\nu})^{-1}} + \bar{\nu}$$

デナケレバナラナイガ, 實際ハ夫ハ $(A) = \text{ヨツテ云ヘテキル}$

$\nu = \frac{\lambda + \mu}{2}$ ノバアヒ其ノ他一般ニ四點ノ中一點ガ $(\gamma_1) =$

ナルバアヒモ, 2° / 推論ヲ逆ニシテ云ヘル。

4° (A) / 第三式ニ於テ $\lambda = 1 + \rho, \mu = 1 - \rho$ トオケ
 バ, λ, μ ハ可換ナルカラ

$$\sigma\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right) = \frac{\bar{\lambda}\bar{\mu}}{\bar{\lambda}+\bar{\mu}} \quad \text{即ち} \quad \sigma\left(\frac{1-p^2}{2}\right) = \frac{1-\bar{p}^2}{2}$$

$$\sigma(p^2) = \bar{p}^2 = \sigma(p)^2 \text{ が云々}$$

$$\lambda\mu + \mu\lambda = (\lambda+\mu)^2 - \lambda^2 - \mu^2 \text{ から之ヨリ}$$

$$\sigma(\lambda\mu + \mu\lambda) = \bar{\lambda}\bar{\mu} + \bar{\mu}\bar{\lambda}$$

$$\text{即ち} \quad \sigma(\lambda\mu) + \sigma(\mu\lambda) = \sigma(\lambda)\sigma(\mu) + \sigma(\mu)\sigma(\lambda)$$

特 = $\bar{k}$ が可換 +

$$\sigma(\lambda\mu) = \sigma(\lambda)\sigma(\mu)$$

トナリ, 従って (A) を満足スル $\sigma \in \bar{k}$ の自己同型デアール。

所が $\bar{k}$ が可換デナリト σ は必ずしも自己同型ニナラナイ! 何トナレバ (A) の十命条件ノ一ツトシテ, 第三式ノ代
り $\eta = \sigma(\lambda^{-1}) = \sigma(\lambda)^{-1}$ がアレバ, ソレデヨイ。所カリノタ
メニハ例ニバ σ が $\bar{k}$ の *Reciprok-Automorphismus*
デアッテモヨイ。⁹⁾

今般ハ σ が *Automorphismus* ノバアヒノミヲ考ヘ,
ソレヲ矢張リ *Kollineation* ト名付ケル。特ニ σ が内
部同型ナルトキ, *linear Kollineation* ト呼ブ。

§3. PSL の單純性

$GL(\bar{k}, n+1)$ の *Kommutatorgruppe* を $SL(\bar{k}, n+1)$ ト名付ケル。¹⁰⁾ 又 $PL(\bar{k}, n+1)$ の *Kommutatorgruppe* を $PSL(\bar{k}, n+1)$ ト名付ケル。 $PL =$

9) (A) を満足スル σ は *Automorphismus* ト *Reciprok-Automorphismus* 以外ニ存在シ得ルデアラナカ。

GL/Z^* デアツタカラ

$$PSL(\bar{k}, n+1) \cong Z^*, \quad SL(\bar{k}, n+1)/Z^*,$$

又ハ $PSL(\bar{k}, n+1) \cong SL(\bar{k}, n+1)/SL(\bar{k}, n+1) \cap Z^*$

$SL \cap Z^*$ ハ案ハ SL / $Zentrum = +$ ルカラ¹¹⁾, $PSL(\bar{k},$

$n+1) \cap SL(\bar{k}, n+1) / Zentrum =$ ヨル $Faktor-$
 $gruppe$ デアルト云ツタモヨイ。扱フ $\bar{k}$ が可換体トナル

時ト目ジク, 次ノ事実が証明サレル:

「 $\bar{k}$ が任意ノ Schiefkörper トルトキ, $PSL(\bar{k},$

$n+1)$, $n \geq 1$ ハスベテ単純群デアル。但シ $n=1$, 場

合ニハ, $\bar{k}$ ハ $GF(2)$ 又ハ $GF(3)$ デナイトスル¹²⁾」

以下ニ之ヲ証明スル。 $\bar{k}$ が可換ト場合ノ岩澤氏ノ証明¹³⁾
ヲ多少ノ注意ヲ以テ *modify* スルベ出来ル。

10) $\bar{k}$ が可換トキハ通常 SL ハ行列式ノナル GL , 行列ノ全
体トシテ定義サレル。實際行列式ノナルモノハ GL ,
 $Kommutatorgruppe$ トナルカラ (ソレハ以下ノ証明
ノ途中デモ分ル), 吾々ノ定義ト矛盾セタイ。 $\bar{k}$ が非可
換ノ時ハ行列式ハ考ヘラレタイカラ, 此様ニ定義スルヨ
リ仕方ナイ。

11) $SL \cap Z^*$ が SL / $Zentrum =$ 含マレルコトハ明デアルガ, 丁度
 $Zentrum = +$ ル事ハ例ヘバ後ニ証明スル PSL ノ単純性カラ分ル。

12) 従ツテ $\bar{k}$ が實際非可換体デアル場合ニハ例外ハナイ。

13) Kenkiti Iwasawa: über die Einfachheit
der speziellen projektiven Gruppen [Proc.
Imp. Acad. Tokyo, Vol. XVII (1941, 57-59)]

Lemma 「 $SL(\bar{k}, n+1)$ は

$$B_{i,j,\lambda} = E + \lambda e_{ij},^{14)} \quad i, j = 0, 1, \dots, n; i \neq j; \\ \lambda \in \bar{k}$$

1 全体で生成される. ($n=1$ 且 $\bar{k} = GF(2)$ 又ハ $GF(3)$ 十 場合ヲ除ク)」

証明. $B_{i,j,\lambda}$ 1 生成スル GL 1 部分群ヲ $\mathcal{G}$ トスル.
 $\mathcal{G} = SL$ ヲ証明スル, ガ目的デアル. 数段ニ分ケテ証明スル.

1°. $GL(\bar{k}, n+1)$ 1 生成元.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \end{matrix} \quad \begin{matrix} \wedge T_{ij} = B_{ij,1} B_{ji,-1} \\ B_{ij,1} \text{ト書ケルカラ} \\ T_{ij} \in \mathcal{G} \end{matrix}$$

GL 1 任意 1 行列 $S =$

i) T_{ij} ヲ左カラ乗ズル $= \wedge, S$ 1 第 i 行ト第 j 行ヲ入換ヘタ後, 第 j 行 1 符号ヲ変ヘレバヨイ.

ii) $B_{ij,\lambda}$ ヲ左カラ乗ズル $= \wedge, S$ 1 第 j 行 $=$ 左カラ入ヲ乗ジテ第 i 行 $=$ 加ヘレバヨイ.

iii) $B_{ij,\lambda}$ ヲ右カラ乗ズル $= \wedge, S$ 1 第 i 列 $=$ 右カラ入ヲ乗ジテ第 j 列 $=$ 加ヘレバヨイ.

任意 1 $S =$ i) — iii) 1 Operation ヲ繰返シ行ッテ

14) E ハ 単位行列, e_{ij} ハ i 行 j 列 $= 1$ ミ 1 カナリ, 他 1 要素ハスベテ 0 ナル行列.

$$\begin{bmatrix} & S^* & \vdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1形ニスルコトガデキル。¹⁵⁾ 更ニ $S^* =$ 就テ同じ事ヲヤリ,
順々ニ進メバ結局最後ニハ

$$C_\mu = \begin{bmatrix} \mu & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

1形ニナル。即チ任意ノ $S =$ 對シ、適當ニ $B', B'' \in \mathfrak{L}$
ヲトレバ

$$B' S B'' = C_\mu$$

1形ニナル。¹⁶⁾ 即チ

15) 詳シク述べれば次ノ通りデアアル: S ハ逆ガアルカラ、第
0列ノ要素ノ中ニハ0デ+1ニ1ガアル。故ニ(必要ナ
ラバ) i)ノ操作ヲ行ツテ、 n ノ要素ガ0デ+1様ニ出
来ル。次ニ操作 iii)ニヨリ、第0列ニ適當ノ入ヲ掛ケテ第
 n 列ニ加へバ n ノ要素ヲ1ニ出来ル。更ニ iii)ニヨリ第 n 列ニ適當ノ入ヲ
掛ケテソノ他ノ列ニ加へ第 n 行ノ n ノ要素以外ノ全部0ニ出来ル。全機ニ
ii)ニ依テ第 n 列ノ n ノ要素以外ノ要素ヲ全部0ニ出来ル。

16) $\mathfrak{L}$ ガ可換体ノトキハ、 B_{ij}, λ シメガツテ $\mathfrak{L}$ ノスベテノ行
列ハ行列式ノ形ニモツ。故ニ $B', B'' \in \mathfrak{L}$ ヲ左右カラ掛ケテ
モ行列式ノ値ハ変ラズ $|S| = |C_\mu| = \mu$ 、即チ μ ハ S ノ
行列式ノ値トシテ、 S ヲ一意的ニ定マル。特ニ始めカ
ラ $|S| = 1$ ナラバ $B' S B'' = E$ トナリ $S \in \mathfrak{L}$ 。即チ $\mathfrak{L}$ ハ

$\Gamma GL(\hat{\mathcal{K}}, n+1) \wedge$

$B_{ij, \lambda}, i, j = 0, 1, \dots, n, \lambda \in \hat{\mathcal{K}}$

$C_{\mu}, \mu \in \hat{\mathcal{K}}^*$

で生成される

2° $\mathcal{L} \wedge GL$, normalteiler $\neq \Gamma \mathcal{L}$.

1° = $\exists \Gamma GL = (\{B_{ij, \lambda}\}, \{C_{\mu}\}) \quad C_{\mu}^{-1} B_{ij, \lambda} C_{\mu} \in \mathcal{L} \neq \mathcal{L} \wedge \Gamma \mathcal{L}$

$\neq \Gamma \mathcal{L}$ かつ

$\exists 1$. 実際

$$C_{\mu}^{-1} B_{ij, \lambda} C_{\mu} = B_{ij, \lambda} \quad i, j > 0$$

$$C_{\mu}^{-1} B_{0i, \lambda} C_{\mu} = B_{0i, \mu^{-1} \lambda} \quad i > 0$$

$$C_{\mu}^{-1} B_{i0, \lambda} C_{\mu} = B_{i0, \lambda \mu} \quad i > 0$$

これより $\Gamma \mathcal{L}$ を見てみる。

$$3^{\circ} \quad D_{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}$$

実際 $D_{\lambda} = 1^{\circ}$ = 述べる Operation を行って単位行列

を持つ行列が出て来る。

$$\begin{bmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \xrightarrow{i)} \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & \\ & -\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{iii)} \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & \\ -\lambda & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{iii)} \begin{bmatrix} 1 & \lambda^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}$$

従って Γ 群 $\mathcal{L}$ は vollkommen $\neq \Gamma \mathcal{L}$. 即ち $\mathcal{L}$ は Kom-

(補遺/終り)

行列式 1 となる行列、全体 $\neq \Gamma \mathcal{L}$. — $\mathcal{L}$ が非可換の場合

$\Rightarrow$, 後述べる様、 $B' S B' = C_{\mu}, B', B'' \in \mathcal{L} + \mathcal{L} \mu$

は S が一意に定まる。

mutatorgruppe $\mathcal{L}'$ は

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}$$

但し $n=1$, $\mathcal{L} = GF(2)$ 又 $\wedge GF(3)$ なる場合ヲ除ク¹⁷⁾

$n \geq 2$ ナラ i, k = 異シ, $\forall \lambda, \mu$ 異ナレ第 $\equiv 1$ j が

トレテ

$$B_{ij, \lambda} B_{jk, \mu} B_{ji, \lambda}^{-1} B_{kj, \mu}^{-1} = B_{ik, \lambda \mu}$$

$\lambda, \mu \in \mathcal{L}$, 任意ノ元ヲ表ハシ得ル。即チ $\mathcal{L}$ ノ生成元ハスベテ $\mathcal{L}$ ノ交換子トシテカケル。

$n=1$

$$B_{01, \lambda} D_{\mu} B_{01, \lambda}^{-1} D_{\mu}^{-1} \\ = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu & \\ & \mu^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^{-1} & \\ & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda - \mu \lambda \mu \\ & 1 \end{bmatrix}$$

$K \in \mathcal{L}$ ナ任意ニ取ルトキ, $K = \lambda - \mu \lambda \mu$ ナル $\lambda, \mu \in \mathcal{L}$ ガアル。 $\therefore \mathcal{L} \wedge GF(2)$ ナ $\in GF(3)$ ナモナカラ。

$K \in K$, $Z \subset K \subset \mathcal{L}$ ナ $GF(2)$ ナ $\in GF(3)$ ナモナ可換体 K ガアル。¹⁸⁾ K ノ元 $\neq 0, 1, -1$ 以外ノ元ヲ任意ニ取ツテ μ トスレバ, $\lambda \in K$ = 對シテハ $\lambda - \mu \lambda \mu = \lambda(1 - \mu^2)$ 。

17) 筆者ハ始メ $Z(\mathcal{L}) \neq GF(2), GF(3)$ トシテ証明ス。

$\mathcal{L} \neq GF(2), GF(3)$ ナト云フコトハ, 河田敬義氏, 岩澤健吉氏ノ御注意ニヨル。

18) $Z(K) \neq GF(2), GF(3)$ ナラ $K = Z(K)$ ト取ルベヨイ。若 $Z(K) = GF(2)$ 又 $\wedge GF(3)$ ナラ當然 $Z = Z(K)$, 即チ $K \in Z$ ナ $Z = GF(2)$ 又 $\wedge GF(3)$ 。假定ニヨリ $Z \neq \mathcal{L}$ ナカラ $Z \neq K$ ($\mathcal{L}$ ナル可換体 K ガアル)。

$1 - \mu^2 \neq 0$ である、之に入らば適当にトレバド、任意の元、特
 に μ を表はすものが出来る、即ち B_{01}, μ はスベテ $\mathfrak{L}$ の元、
 交換子として書ける。 B_{10}, μ も同様である。

5°. $\mathfrak{L}$ は $GL(\bar{k}, n+1)$ の Kommutatorgruppe
 $SL(\bar{k}, n+1) = \text{他} + \text{ラ} + \text{イ。}^{19)}$

$GL \supset \mathfrak{L}$ より $SL = (GL)' \supset \mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$
 故に $SL = (GL)' \subset \mathfrak{L}$ である。ソレニハ
 $GL = (\mathfrak{L}, (C_\mu))$

であつて且つ $GL \text{ mod } \mathfrak{L}$ の代表として C_μ の形、元が
 出来るから $C_\lambda C_\mu C_\lambda^{-1} C_\mu^{-1} \in \mathfrak{L}$ である。シカレニ

$$\begin{aligned} C_\lambda C_\mu C_\lambda^{-1} C_\mu^{-1} &= C_{\lambda\mu\lambda^{-1}\mu^{-1}} = C_{\lambda\mu\lambda^{-1}} C_\mu^{-1} \\ &= D_\lambda C_\mu D_{\lambda^{-1}} C_\mu^{-1} \end{aligned}$$

シカレニ $D_\lambda \in \mathfrak{L}$ 又ハ $\mathfrak{L}$ の Normalteiler であるから

$$C_\mu D_{\lambda^{-1}} C_\mu^{-1} \in \mathfrak{L}$$

故に $\frac{1}{\lambda\mu\lambda^{-1}\mu^{-1}} \in \mathfrak{L}$ である。 [Lemma, 証明終]

さて愈々: $PSL(\bar{k}, n+1)$ の單純性を証明スル。

先づ PSL の射影空間、点全体、置換群として *zwei-*
fach transitiv である。

$n+1$ 個、座標、基本 Vektor が $y_0, \dots, y_{n+1}$
 時、任意の二点 $(\bar{y}_0) \neq (\bar{y}_1)$ に対し、 $(y_0) \rightarrow (\bar{y}_0), (y_1) \rightarrow (\bar{y}_1)$

19) $\bar{k}$ が可換なるときハ、脚註 16) = より $\mathfrak{L}$ の行列式、 1 なる
 行列の全体であるから、 SL の定義は普通、定義と一致
 する。

+ 如キ PSL , $Kollineation$ ガアルコトヲ云ヘバヨイ,
 兎ニ角ニ、 $\times$ ヲ PL / $Kollineation$ ハアル。ソレヲ
 $(S, 1)$ トスル。

$$(\overline{y}_0, \text{---}, \overline{y}_n) = (y_0, \text{---}, y_n) S$$

GL/SL / $Hebenklasse$, Lemma / 証明中ニ述ベタ
 $\times$ ヲ C_μ デ代表サレルカラ、適當ニ C_μ フトレバ、

$SC_\mu \in SL$, 先ヅ $(C_\mu, 1)$ フ行ヒ次ニ $(S, 1)$ フ行ヘバ

$$(y_0) \rightarrow (y_0 \mu) \rightarrow (\overline{y_0} \mu) = (\overline{y_0})$$

$$(y_1) \rightarrow (y_1) \rightarrow (\overline{y_1})$$

即チ SC_μ ハ PSL / $Kollineation$ デ、而モ與ヘラレ
 タ條件ヲ満足スル。

(y_0) ヲ動かカナイ PSL / 変換、部分群ヲ H_y トスレ
 バ、 H_y / 系列ハ

$$S = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & & S^* \end{bmatrix}$$

ノ形デアル。ソノ中デ

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

ノ形ノモノ、全体ハ可換ニ $Normalteiler$ ナ。ヲ作ツテ
 登ル。

サテ、 H_y ハ PSL / $Normalteiler$ デ單位群デハ

トイタル。

PSL が *zweifach transitiv* だから, $\mathcal{H}$ は *transitiv* デアル。²⁰⁾

従って $h_{\mathcal{H}} \mathcal{H} = PSL = \Gamma$. $\mathcal{H}_0 \mathcal{H}$ は $h_{\mathcal{H}} \mathcal{H} = PSL$, *Normalteiler* デアルから, $\mathcal{H}_0 =$ 全スベル $B_{0i, \lambda}$ ノミナラズ, γ ノ共轭元ナレ $B_{ij, \lambda}$ ノスベテ含ム。即ち PSL ノ生成元ヲスベテ含ムカラ $\mathcal{H}_0 \mathcal{H} = PSL$ シタガッテ

$$PSL/\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \mathcal{H} / \mathcal{H} \cong \mathcal{H}_0 / \mathcal{H} \cap \mathcal{H}$$

デアルが右辺ハ可換群デアリ, 一方 PSL ハ *vollkommen* デアッテ可換ナ *Faktorgruppe* $\neq (1)$ ヲ持スナイカラ

$$PSL = \mathcal{H}$$

デナケレバナラナイ。即ち PSL ハ単純デアル。(單純性, 証明終)

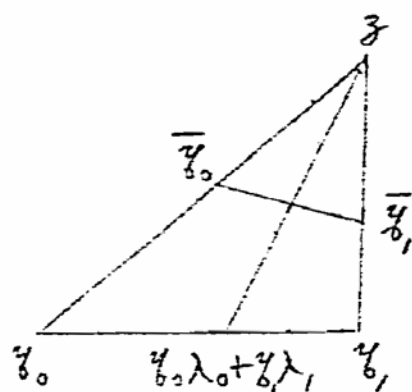
§4. *Linear Kollineation* / 幾何學的特徵附ケ。

20) 任意ニ二点 $(\bar{y}_0), (\bar{y}_1)$ ヲトルトキ, $(\bar{y}_0) \rightarrow (\bar{y}_1)$ ナレ $\mathcal{H}$ ノ変換カアル。 $(\bar{y}_0) = (\bar{y}_1)$ ナラ問題ハナイ。 $\therefore (\bar{y}_0) \neq (\bar{y}_1)$ トスル。 $\mathcal{H} \neq (1)$ だから $\mathcal{H}$ ヲ Γ デ一点 $(\bar{y}_0)$ ノ γ レト取ナレ $(\bar{y}_1)$ へ移スミ, カアル。 PSL ヲ S デ $(\bar{y}_0) \rightarrow (\bar{y}_0)$, $(\bar{y}_1) \rightarrow (\bar{y}_1)$ ナレ γ カアル

$$\begin{array}{ccc} y_0 & \xrightarrow{T} & y_1 \\ S \downarrow & & \downarrow S \\ \bar{y}_0 & & \bar{y}_1 \end{array} \quad STS^{-1} \text{ハ } (\bar{y}_0) \text{ヲ} (\bar{y}_1) \text{ニ持ッテ行ク。}$$

$\mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ / 中 = アル直線 g 上 / 点 $\neq g$ 外
 1-点 Z から射影シ, ソレヲ $Z \notin g$ 内 / Z ヲ通ラヌ直線
 $\bar{g}$ デ切レバ, g 上 / 点列カラ $\bar{g}$ 上 / 点列ヘ / 一対一変換が
 出来ルが, 之ヲ g カラ $\bar{g}$ ヘ / (Z ヲ中心トスル) Perspektivität ト云フ。
 $g \rightarrow g^{(1)}, g^{(1)} \rightarrow g^{(2)}, \dots, g^{(n-1)} \rightarrow g^{(n)} = \bar{g}$ + $\vee$ Perspektivitätヲ合成シタモ, g
 g カラ $\bar{g}$ ヘ / Projektivität トイフ。

$g = (\gamma_0, \gamma_1)$, $Z = (z)$ トスレバ Z ヲ中心トスル
 Perspektivität $\tau(\gamma_0) \rightarrow (\bar{\gamma}_0) = (\gamma_0 + z\alpha)$, (γ_1)
 $\rightarrow (\bar{\gamma}_1) = (\gamma_1 + z\beta)$ ト + $\vee$. $\gamma_0\lambda_0 + \gamma_1\lambda_1$ ハ



$\bar{\gamma}_0\lambda_0 + \bar{\gamma}_1\lambda_1 =$ 符ク。何ト + レバ

$$\bar{\gamma}_0\lambda_0 + \bar{\gamma}_1\lambda_1$$

$$= \gamma_0\lambda_0 + \gamma_1\lambda_1 + z(\alpha\lambda_0 + \beta\lambda_1)$$

ハ直線 $\bar{g} = (\bar{\gamma}_0, \bar{\gamma}_1)$ 上 = $\in$ 直
 線 $(z, \gamma_0\lambda_0 + \gamma_1\lambda_1)$ 上 = $\in$

アリ, 從ツテソ, 交点カラデア

ル。即チ

「 z が γ_0, γ_1 ト独立 + ルトキ

$$(\gamma_0\lambda_0 + \gamma_1\lambda_1) \rightarrow (\bar{\gamma}_0\lambda_0 + \bar{\gamma}_1\lambda_1),$$

$$\bar{\gamma}_0 = \gamma_0 + \alpha z, \bar{\gamma}_1 = \gamma_1 + \beta z$$

ハ Perspektivität τ アル」

z が $(\gamma_0, \gamma_1) =$ 属スレバ, 之ハ Perspektivität
 デハ + イ。併シ Projektivität = $n + r$. ソレハ $\gamma_0,$
 γ_1 ト独立 + z' フトリ

$$y_0 \rightarrow y_0 + (z + z')\alpha \rightarrow y_0 + (z + z')\alpha - z'\alpha$$

$$y_1 \rightarrow y_1 + (z + z')\beta \rightarrow y_1 + (z + z')\beta - z'\beta$$

1 如 7, 夫々 $(z + z')$ 及 (z') 7 中心トスルニツノ *Perspektivität* 7 合成スルベヨイカラデアアル。但シ $\bar{y}_0 \in \bar{y}_1$ 三勿論ノデハナイトスル。

扱テ $\bar{y}_0, \bar{y}_1$ ハ任意ノ独立ト *Vektor* トスル。コノ
トキ

$$\left. \begin{aligned} (y_0) &\rightarrow (y_0 + (\bar{y}_0 - y_0)) = (\bar{y}_0) \\ (y_1) &\rightarrow (y_1 + (\bar{y}_0 - y_0)0) = (y_1) \\ (y_0\lambda_0 + y_1\lambda_1) &\rightarrow (\bar{y}_0\lambda_0 + y_1\lambda_1) \end{aligned} \right\} \text{ 及}$$

$$\left. \begin{aligned} (\bar{y}_0) &\rightarrow (\bar{y}_0 + (\bar{y}_1 - \bar{y}_0)0) = (\bar{y}_0) \\ (\bar{y}_1) &\rightarrow (\bar{y}_1 + (\bar{y}_1 - \bar{y}_0)) = (\bar{y}_1) \\ (\bar{y}_0\lambda_0 + \bar{y}_1\lambda_1) &\rightarrow (\bar{y}_0\lambda_0 + \bar{y}_1\lambda_1) \end{aligned} \right\}$$

ナルニツノ *Projektivität* 7 合成シタニトシテ

$$(y_0\lambda_0 + y_1\lambda_1) \rightarrow (\bar{y}_0\lambda_0 + \bar{y}_1\lambda_1)$$

ハ矢張り *Projektivität* テアル。逆ニ *Perspektivität* ハコノ形デカラ、ソレヲ合成シテ *Projektivität* ニ帰スコノ形デアアル。即チ

$$\Gamma g = (y_0, y_1), \bar{g} = (\bar{y}_0, \bar{y}_1) + \text{任意ノ } Vektor \ y_0, y_1, \bar{y}_0, \bar{y}_1 = \text{對シ}$$

$$(y_0\lambda_0 + y_1\lambda_1) \rightarrow (\bar{y}_0\lambda_0 + \bar{y}_1\lambda_1)$$

ハ g カラ $\bar{g}$ へ *Projektivität* テアル。逆ニ g カラ $\bar{g}$ へ
1 任意ノ *Projektivität* ハ、 $y_0, y_1 = \text{對シ } \bar{y}_0, \bar{y}_1$
「適當ニトスルコノ形ニナル」

「 g が g 自身へ $Projektivität$ へ 即ち g ,
 $linear\ Kollineation = 他 + \tau + i$ 」

特 $\bar{y}_0 = y_0 p, \bar{y}_1 = y_1 p$ トスルバ

$$(\bar{y}_0 + \bar{y}_1, \lambda) \rightarrow (y_0 p + y_1 p, \lambda) = (y_0 + y_1, p \lambda p^{-1})$$

故 $=$, p が $Z(\bar{k}) = \bar{k} \cdot i + i + \tau$, 之ハ恒等変換デハナ
 が, 例へバ $\equiv$ 点 $(y_0), (y_1), (y_0 + y_1)$ ハ固定点デア
 即ち「三點ヲ固定スル $Projektivität$ ハ恒等変換デア
 ル」ト云フ所謂「基本定理」ハ $\bar{k}$ が非可換ノ時ニハ成
 タナシ。

「 $\mathbb{P}^{n+1} (n \geq 2)$, $linear\ Kollineation$ ト
 ハ, 任意ノ直線 $= Projektivität$ ヲ引キ起ス様ナ
 $Kollineation$ デアル」

$linear\ Kollineation$ ナルバ, $\bar{y}_i$ ヲ適當ニト
 レバ, 對應スル $\bar{k}$ ノ自己同型ハ $Identität =$ ナル
 カラ

$$(\sum y_i \lambda_i) \rightarrow (\sum \bar{y}_i \lambda_i)$$

ノ形ニナル。従ツテ二次元 $Teilmodul = k$ ノ $Operator$
 トスル一次変換ヲウケル。即ち直線ハ $Projektivität$ ヲ
 ウケル。逆ニ直線 (y_0, y_1) が $Projektivität$ ヲ受ケ
 レバ, ソレニ對應スル $\bar{k}$ ノ自己同型ハ $Identität$ デカラ,
 定義ニヨリコノ $Kollineation$ ハ $linear$ デアル。²¹⁾ $q.e.d.$

21) コノ証明大明カナヤウニ少クトモ一ツノ直線ハ $Projek-$
 $tivität$ ヲ受ケルバ $Kollineation$ ハ $linear =$
 ナリ。従ツテ又ハ直線ハ $Projektivität$ ヲ受ケル。

linear Kollineation / モーッ / 幾何的
 Charakterisation を述べル。同特 = PSL /
 Kollineation / 幾何學的の意味を考ヘル。ソノタメニ次
 ノ定義ヲ想起スル。

n 次元射影空間ノ Kollineation ガ、アル超平面
 π ノ各点ヲ動かサズ、アル点 P ヲ含ム各超平面ヲ動かサナイ
 時、コノ Kollineation ヲ相應 (homologie 又ハ
 perspektive Kollineation, axiale Kol-
 lineation 等) ト云フ。而シテ P ヲ相應ノ中心、 π ヲ相
 應ノ軸 (超平面) ト云フ。特ニ P が π ノ上ニアルトキ、特
 殊相應 (speziell. homologie) ト云フコトニ
 スル。

1° 「 O_{μ} 」生成元、 C_{μ} 、 $B_{ij, \lambda}$ ハスベテ相應デア
 ル。 $B_{ij, \lambda}$ ハ特殊相應デアリ、 C_{μ} ハ特殊相應トザル相
 應デアイル。」

C_{μ} : $\bar{y}^0 = y^0 \mu$, $\bar{y}^k = y^k$, $k \neq 0$. 即チ $\pi =$
 $(y^1, \dots, y^n)$ ヲ軸トシ、ソノ上ニタイ $P = (y^0)$ ヲ中心
 トスル相應デアイル。

$B_{ij, \lambda}$: $\bar{y}^j = y^j + y^i \lambda$, $\bar{y}^k = y^k$, $k \neq j$. 即
 チ $\pi = (y^0, \dots, y^{j-1}, y^{j+1}, \dots, y^n)$ ヲ軸トシ、其上
 ノ点 $P = (y^j)$ ヲ中心トスル相應デアイル。²²⁾

22) 詳シク云ヘハ次ノ如シ。 C_{μ} ノ場合、 P ヲ通ル任意ノ超平
 面ハ $\xi = (y^0, y^1, \dots, y^{n-1})$ (y^i) $\subset \pi$ ノ形ニカケル。
 ソノ像 $\bar{\xi} = (\bar{y}^0, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^{n-1}) = (y^0 \mu, y^1, \dots, y^{n-1})$

2° 「相應ハ *linear Kollineation* デアリ,
特殊相應ナラザル相應ハ或 C_μ ト Q_0 内デ共軌, 又特
殊相應ハ $B_{1,0,1}$ ト共軌デアル。即チ任意ノ相應ハ $Q_0 = PL$
ニ屬シ, 任意ノ特殊相應ハ $\rho = PSL$ ニ屬スル。」

一般ニ一直線上ノスベテノ點ヲ動かサシイ様ナ *Kol-*
lineation ハ明カニ *linear* デアルカラ, 一超平面上
ノスベテノ點ヲ動かサシイレバ勿論 *linear* デアル。軸

$$\pi = (y^1, \dots, y^n) \text{ トスレバ } \left(\sum_1^n \bar{y}^i \lambda_i \right) = \left(\sum_1^n y^i \lambda_i \right) \text{ ヲ}$$

リ $\bar{y}^i = y^i \zeta$, $\zeta \in \mathbb{C}$ デナケレバナラナイ。行列全体 $= \zeta^{-1}$
ヲカケテモ差支ナイカラ

$$\bar{y}^i = y^i \quad i = 1, \dots, n$$

トシテヨイ。特殊相應デナケレバ, 中心 $P = (y^0)$ トスレ
バ $(\bar{y}^0) = (y^0)$ ナカラ

$$\bar{y}^0 = y^0 \mu$$

即チ坐標系 $(y^0, y^1, \dots, y^n)$ デアラハシタ行列ハ C_μ
ニナル。

特殊相應ノバアヒニハ, 中心 $P = (y^1)$ ナラシメテオ

ハ ξ ニ一致スル。 $B_{ij, \mu}$ ノ場合, P ヲ通ル超平面 π ニ

於テ, $\xi = \pi$ ノトキハ問題ナイ。 $\xi \neq \pi$ ナラバ

$$\xi = (y^i, y^1, \dots, y^{n-2}, y^2); (y^i) \subset \pi, (y^2) \not\subset \pi \text{ ノ形}$$

ニカケル。従ツテ $y^2 = y^1 + y^i, (y^1) \subset \pi$ トシテヨイ。コノ

$$\text{トキ } \bar{\xi} = (\bar{y}^i, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^{n-2}, \bar{y}^2 + \bar{y}^1) = (y^i, y^1, \dots, y^{n-2}, y^2 + y^1 + y^i \lambda + y^1) \text{ ハ } \xi \text{ ニ一致スル。}$$

7. 又 (y^0) は π 上 = +イ任意ノ点トスル直線 (y^0, y^1)
 ハ $((y^0)$ 通ル不変ト超平面ノ交ハ ν トシテ) 不変デア
 カラ, (y^0) ハコノ直線上ノ (y^1) トラザル点 = 移ル。
 $(\bar{y}^0) = (y^0)$ トラ C_μ トナリ特殊相應デナクナルカラ,
 $(\bar{y}^0) \neq (y^0)$ 故 = y^0 ノ右ノ因數ヲ適當ニスレバ $(\bar{y}^0) =$
 $(y^0 + y^1)$ 即チ $\bar{y}_0 = (y^0 + y^1) \rho$ デアレガ, コノ ρ ハ
 $\rho = 1$ デナケレバナラ +イ。ソレハ例ヘバ ρ 通ル超平面
 $\bar{\Sigma} = (y^0 + y^1, y^1, \dots, y^{n-1})$ ハ
 $\bar{\Sigma} = ((y^0 + y^1) \rho + y^n, y^1, \dots, y^{n-1}) = (y^0 \rho + y^n, y^1, \dots, y^{n-1})$
 = +ル $\bar{\Sigma}$, $\bar{\Sigma} = \Sigma$ デカラ $\rho = 1$ トナルコトヨリ分ル。即チ特
 殊相應ハ

$$\bar{y}_0 = y^0 + y^1$$

$$\bar{y}_i = y^i \quad i = 1, \dots, n$$

換言スレバ, 適當ニ坐標系 $(y^0, y^1, \dots, y^n)$ デ $B_{01,1}$ ノ
 形ニナル。

元々與ヘラレタ坐標系デアラハセバ, 夫々 C_μ 及 $B_{01,1}$
 ト O_1 内デ共ニ変換トナル。 q. e. d.

PSL, Kollineation 7 spezielle lineare
Kollineation ト云フコトニスレバ, 1°, 2° 7 綜合シ
 テ

3°. 「lineare Kollineation ハ有限個ノ相應ヲ
 合成シタ $\in$ / デナル。

Spezielle lineare Kollineation ハ有限個ノ
 特殊相應ヲ合成シタ $\in$ / デル。」