OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Bicompact ナ群ノ群環ニツイテ（Segalノ定理ノ証明）
Author(s)	深宮, 政範
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 240, p. 1276-1281
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74997
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1065. Bicompact 群ノ群環ニツイテ (Segal ノ定理ノ証明)

深宮 政範 (阪大)

I. E. Segal ガ Proc. Nat. Acad. Sci, U.S.A. 27 (1941) 上デ locally bicompact group デ, abelian 又ハ bicompact + group ノ group ring ヲ maximal 両側 ideal ヲ用ヒテウマク論ジテヰル。

abelian ノ場合ハ Gelfand-Raikov ノ結果ニ含マレルガ, bicompact ノ場合ハ大変面白イト考ヘラレ, 又 compact ノ場合ニモ, 亦モットー般ノ場合ニモ應用デキソウニ思ハレルガ証明ガナク, 又精シイコトモ分ラナイ。主ナ定理ノ証明ガ得ラレタヤウニ思フノデ, 以下ニ述ベテ, 御教示ヲ願ヒタイト思ヒマス。

G ヲ topological bicompact ナル group トシ, G ノ上ノ完全加法不変測度ヲ μ トスル。測度 μ ニ関スル Lebesgue integrable ナル函數全体ヲ $L_1 = L_1(G)$ デ表ハス。

L_1 ハ積及ビノルムガ夫々

$$f \circ g = \int_G f(st^{-1})\, g(t)\, d\mu_t$$

$$\|f\| = \int_G |f(s)|\, ds$$

ト考ヘレバノルムノ定義サレタ (non-commutative) 線デアル。茲ニバノルムハ

$\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$, $\|f+g\| \leqq \|f\| + \|g\|$, $\|f\| = 0 \rightleftarrows f = 0$ ヲ満足セシメル。

L_1 = unit ヲ附加シタ ring ヲ R:

$$Z \in R \rightleftarrows Z = \alpha 1 + f, \quad f \in L_1$$

$$\|Z\| = |\alpha| + \|f\|$$

$$Z \circ Z' = \alpha\alpha' 1 \quad \alpha f' + \alpha' f + f \circ f'$$

トスル。良ク知ラレタ如クRハバノルムノ意味デ complete + ring デ, ring トシテノ unit ヲ含ム。

以下Rヲ bicompact group G, group ring ト呼ブコトトスル。

Rハ bicompact group ノ上ノ almost periodic functions 全体ノ ring ヲ sub-ring トシテ含ンデ居ル (而モノルムノ意味デ dense sub-ring トシテ)[1].

Ideals in R. Rノ部分集合Iガ i) 代数的ニRノ両側 ideal デ ii) ノルムバ‖ ‖ノ意味デ closed ナルトキ Rノ両側 ideal ト云フ。両側 ideal Iガキ(0), Rナルトキ proper ト云ヒ, $I \subset J$ ナル

(1) 詳ヘバ Bochner, Annals, 40 (1939), pp 773–775, 尚 Bochner ガソコデ論ジテヰルコトハ A. Markoff, Recueil math., 46 (1938) デモット詳シク既ニ論ジテアルコトデハナカラウカト思ハレル。

proper 両側 ideal ガナイトキ maximal 両側 ideal トテフ。

R ノ凡エル max. 両側 ideal ノ共通部分ガ $Z=0$ ニ限ルトキ R ヲ Semi-simple トテフコトニスレバ Segal ノ主ナ定理ハ

(A) R ノ maximal 両側 ideal M ニヨル residue class ring R/M ハ有限次元

(B) R ハ Semi-simple ナラバ $\alpha h(s)+\int h(st^{-1})g(t)dt$ ノ二ツニナル。

(A) ノ証明　L_1 ハ R ノ max. 両側-ideal デ, R/L_1 = complex numbers ハ明カ。

M ヲ max. 両側-ideal デ, キL_1 トスル。

$R/M=(E, X, Y, \cdots\cdots)$, $\|X\|=\inf_{Z\in X}\|Z\|$

トスレバ R/M ハ complete.

$M\neq L_1$ カテ $f\in L_1$, $\overline{\in}M$ ナル f ガ存在スル。今 $f\in X$ トスル max. ナルコトカラ R/M ハ simple (proper ナ両側 ideal ヲ有シナイ). 依ッテ

$$E=\sum_{i=1}^{n} Y_i \underline{X} Z_i$$

ガ成立ツ. $R/M=R_1$ ノ operator トシテ $Y_i\underline{X}Z_i$ ガ凡テ vollstetig ナコトヲ云ヘバ, E (unit) ガ vollstetig, 従ッテ R_1 ノ単位球ガ vollstetig トナルカラ Riesz ノ定理デ R_1 ハ有限次元ニナル。

サテ $\underline{X}$ ハ $f\in L_1$ ヲ含ム class デアルカラ $Y_i\underline{X}Z_i$

ニ合マレル R ノ元素ヘ悉ク $\in L_1$，R カラ $R/M = R_1$ ヘノ寫像ハ連續ダカラ $Y_i \overline{X} Z_i$ ガ R_1 ノ vollstetig + operator デアルコトヲ云フタメニハ，結局 $k(s) \in L_1$ ニヨル integral operator

$$\int_G k(st^{-1})\, g(t)\, dt, \quad g(t) \in L_1$$

ガ L_1 ノ norm デ vollstetig デアルコトヲ云ヘバ十分デアル。

此ノ最後ノコトハ compact ナ函數集合ニ對スル Kolmogoroff－Riesz ノ定理カラ云ヘル。[1]

(B) ノ証明　R ノ凡テノ max. 兩側 ideal ノ集合ヲ $\mathfrak{M}$ トスル。

今 $Z \in R$，$Z \in \overline{\prod_{A \in \mathfrak{M}} A}$ トスル。$A = L_1 \in \mathfrak{M}$ デアルカラ

$$Z = f(s) \in L_1.$$

証明スベキコトハ $f(s)$ キノナラバ $f(s) \overline{\in} A$ ナル $A \in \mathfrak{M}$ ガ存在スルコト。

integral equation ヘ

$$f \circ g = \int_G f(st^{-1})\, g(t)\, d\mu_t = \lambda g(s) \qquad (*)$$

---

1) M. Riesz, Acta Szeged, 6.
之ハ三村征雄氏ノ御教示ニヨル，ナホ吉田耕作氏モ連續函數デ近似スレバ vollstetig ガ証明デキルコトヲ注意サレタ。兩氏ニ厚ク感謝シタイ。

ハ，アル $\lambda_0 \neq 0$ ニ對シテ解ヲモツ。λ_0 ニ對スル linearly independent ナ固有函數ヲ

$$g_1(s),\ g_2(s),\ \cdots\cdots,\ g_n(s)$$

トスル（以上 $f(st^{-1})$ ノ volls tetig ナルコトカラ），並デ $g_i(s)$，$i=1,2,\cdots\cdots,n$ ハ有界 continuous トシテヨイ。

良ク知ラレタ考ヘニヨッテ $g(t)$ ガ $\lambda=\lambda_0$ ニ對スル (*) ノ固有函數デアレバ，凡テノ $a\in G$ ニ對シテ $g(ta)$ モ亦固有函數デアル，從ッテ

$$g_i(ta)=\sum_{j=1}^{n} u_{ij}(a)\,g_j(t),$$

$$i=1,2,\cdots\cdots,n \qquad (**)$$

$Z=\alpha 1+h(s)\in R$ ニ對シテ n 次ノ matrix

$$D_n(Z)=\alpha E_n+\int_G \{u_{ij}(a^{-1})\}_{i,j}\ h(a)\,d\mu_a$$

ヲ對應サセレバ，$D_n(Z)=0$ ナル Z ノ全体ハ R デ両側 ideal ヲ作ル。之ヲ A_1 トスレバ $A_1\ni f(s)$ ナルコトガ云ヘサヘスレバ $f(s)$ ヲ含マナイ max. 両側 ideal ガアルコトガ分ル。

$$D_n(f)=\int_G \{u_{ij}(a^{-1})\}_{i,j}\ f(a)\,d\mu_a\neq 0$$

ナルコトノ証明ハ次ノ様ニスレバヨイ様デアル。

(*)，(**) カラ

$$\lambda g_i(s) = \int_G f(st^{-1}) g(t)\, d\mu_t = \int_G f(t)\, g(t^{-1}s)\, d\mu_t$$

$$= \int_G f(t) \left(\sum_{j=1}^{n} u_{ij}(s)\, g_i(t^{-1}) \right) d\mu_t$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, u_{ij}(s)$$

然ルニ

$$\beta_i = \int_G f(t)\, g_i(t^{-1})\, dt = \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_i}{\lambda} \int_G u_{ij}(t^{-1}) f(t)\, d\mu_t$$

故ニモシ悉ク $\int_G u_{ij}(t^{-1}) f(t)\, d\mu_t = 0$ ナラバ $\beta_i = 0$,
$i = 1, 2, \cdots\cdots, n$

従ッテ　　$g_i(s) \equiv 0$,　$i = 1, 2, \cdots\cdots, n$

然ルニ $f(s) \neq 0$ ナラバ 必ズ $\lambda_0 \neq 0$ ナル固有値ガアルノダカラ $f \in A$ ナル max. ideal ノ存在ガ証明サレルコトニナル。

（西大 第二三六八号）