



Title	アルキメデスの群束可換性二就テ
Author(s)	小笠原, 藤次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 241, p. 1282-1285
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74998
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1066. アルキメデスの群束ノ可換性ニ就テ

小笠原 謙次郎(廣島文理大)

アルキメデスの群束ハ切断ニヨル完全化デ完全群束ニナル。コレハ可換群束ノ場合ト同様ニ証明サレル(略)。故ニアルキメデスの群束ノ可換ハ完全群束ノ可換ト同義デアル。後者ハ *Birkhoff* ノ豫想ニシテ知ラレタモノデアルガ、岩澤氏⁽¹⁾ガ単位分解ニヨル積分表示ノ方法デ鮮ニ解決サレタ。ココニハ簡單ナ別証明ヲ與ヘル。補題1, 2, 3, 4ハ岩澤氏ノ所論ニモアルカラ省略サレタイ。

G ヲ完全群束トシ, $x_+ = x \cup 1$, $x_- = x^{-1} \cup 1$, $|x| = x_+ x_-$ ト置キ $|x| \cap |y| = 1$ ノトキ x ト y トハ直交スルト云フ。

補題1. $x = x_+ x_-^{-1} = x_-^{-1} x_+$, $x_+ \cap x_- = 1$. 逆ニ $a \cap b = 1$, $x = a b^{-1}$ ノトキ $a = x_+$, $b = x_-$.

系. 直交ニ要素ハ可換デアル。

補題2. $x = \bigvee x_\alpha$ ノトキ $x \cap y = \bigvee (x_\alpha \cap y)$

(能) $y = 1$ トシテヨイ。マタ G ハ配分束デアルカラ有限個ノ x_α ト共ニ $\cup$ ノ結びガ $\{x_\alpha\}$ ノトカニアルトシテヨイ。

$x = \bigvee (x_\alpha \cap 1)(x_\alpha \cup 1) = \bigvee (x_\alpha \cap 1)(x_\beta \cup 1) = \bigvee (x_\alpha \cap 1) \bigvee (x_\beta \cup 1) = \{ \bigvee (x_\alpha \cap 1) \} (x \cup 1)$. コレカラ $x \cap 1 = \bigvee (x_\alpha \cap 1)$

部分集合 A ノスベテノ要素ト直交スル要素ノ全体ヲ $A^\perp$ デ表ス。 $A^\perp$ ノ形デ表サレル集合ヲ正規イデヤルトイフ。

(1) 岩澤健吉, 紙幣誌1044.

$A^\perp = A^{+11}$ が成立す。

補題3. $\mathcal{O}$ が正規イデヤルトスレバ $\mathcal{O}$ の直積因子デスト共 $= |y| \leq |x|$ ナルステ y ナ含ム。

(証) $\mathcal{O}$ が x ト共 $= |y| \leq |x|$ ナル y ナ含ミ部分群ナルコトハ自明。 z ナ正要素トシ, $z_1 = \bigvee (z \wedge a; 1 \leq a \in \mathcal{O})$ トスル。補題2ニヨリ $z_1 \in \mathcal{O}$, $z_2 = z_1^{-1} z$ ト置ク。 $z_2 \in \mathcal{O}^\perp$ ナ有テ, $z_2 \wedge a \geq 1, a \in \mathcal{O}$ トシ, $c = z_2 \wedge a$ ト置ク。 $z = z_1 z_2 \geq c^2$ 。コレカラ $z \geq c^2$ が証明サレテ矛盾ナ起ル。任意ノ要素 $x =$ 對シテノ正部分, 負部分ニツイテ $z =$ 對スルト同様ノコトヲナルト

補題4. $\mathcal{O}$ ナ正規イデヤルトスル。任意ノ要素 x ハ $x = x_1 x_2, x_1 \in \mathcal{O}, x_2 \in \mathcal{O}^\perp$ ナ唯一通りニ分解サレル。 x_1 ナ x ノ $\mathcal{O}$ へノ射影トイフ。コノトキ $y^{-1} x y \in \mathcal{O}$ へノ射影ハ $y^{-1} x_1 y =$ ナル。

一要素 a ナ含ム最小ノ正規イデヤルト $\mathcal{O}(a)$ ナ表シ, 主イデヤルトトイフ。 a ノ $\mathcal{O}(a_+)$ へノ射影ハ $a_+ \geq 1$ ナレコトヲ注意スル。

補題5. $x \geq y \geq 1$ ナル任意ノ x, y ナ可換ノトキ G ハ可換デイル。

(証) 任意ノ正要素 $a, b =$ 對シ, a ト $a \sim b$ 従テ a^{-1} ト $a \sim b$ ハ可換ニナルコトヲ $(a^{-1} b)_+ = a^{-1} b \sim 1 = a^{-1} (a \sim b) = (a \sim b) a^{-1} = 1 \vee b a^{-1} = (b a^{-1})_+$, 同様ニ $(a^{-1} b)_- = (b a^{-1})_-$ 。補題1ニヨリ $a^{-1} b = b a^{-1}$ 即チ $a b = b a$ 。コレカラ G ナ可換ニナル。

補題6. $x > y > 1$ ト $x^{-1}yx < y$ ($x^{-1}yx > y$) ハ矛盾スル。

(証) $x > y > 1$, $x^{-1}yx < y$ トスル. $y_1 = x^{-1}yx$, $y_{n+1} = x^{-1}y_n x$ ト置ク. $z = \bigwedge y_n$ トスレバ $z = 1$ トシテ一般性ヲ失ハナイ. 何者 z ハ x ト可換 ($x^{-1}zx = \bigwedge x^{-1}y_n x = \bigwedge y_{n+1} = z$ カラ) ナ必要アラバ y ノ代リ yz^{-1} ヲ考ヘレバヨイカラ. $(y^p x^{-1})_+ > 1$ ナル自然数 p ヲ考ヘル. $\alpha((y^p x^{-1})_+)$ ハ x , y ノ射影ヲ x', y' トスレバ, $y^p x^{-1}$ ノ射影ハ $y'^p x'^{-1}$ デ > 1 . 明 $= y'^p > x' \geq y' \geq 1$ カラ $y' > 1$. 故 $= y^p > x' > 1$. $x = x^{-1}xx$ カラ $x' = x^{-1}x'x$ トルコトヲ注意スルト $y_n^p > x'$. 故 $= 1 = \bigwedge y_n^p \geq x'$ トナリ矛盾ナ起ル.

コレカラ証明ノ本筋ニ入ル. $x > y > 1$ トスル.

$a = xyx^{-1}y^{-1}$ ト置ク. x ト y ガ可換デナイトスル. $a \neq 1$ デアルカラ a_+ , a_- ノ何レカハ > 1 . 今 $a_+ > 1$ トスル. y ノ $\alpha(a_+)$ ハノ射影ヲ y' トスレバ a ノ $\alpha(a_+)$ ハノ射影 a_+ ハ

$$a_+ = xy'x^{-1}y'^{-1} > 1. \quad \text{故} = y' > x^{-1}y'x,$$

$$x > y' > 1.$$

トナルカラ補題6ニヨリ矛盾ナ起ル. $a_- > 1$ トシテモ同様. 故 $= xy = yx$, 補題5ニヨリ G ハ可換ニナル.

以上ニヨリ非可換群ホ非アルモノナズ的デアアル. 例トシテハ例ヘバ中山氏ノ例ニ從ッテ実函数 $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$ ノ全体ヲ考ヘ $f \cdot g$ トシテ $f \cdot g(x) = f(x) + g(x+1)$ トスレバヨイ.

アルキメデスの群束 / 可換性 = 就テ

小笠原 藤次郎 (横浜文理大)

1 最後 = 述ベタ例ハ筆者 / 不注意 = ヨル誤リ / タメ次 / 様ニ訂正スル。

「中山氏ノ例 = 従ッテ ----- 以下ハ誤リ。之ヲ非可換群束ノ例トシテ中山氏、紙数誌、983 参照 = 訂正」