Title	質的比較静学の社会学的意義をめぐって : 研究ノート
Author(s)	白倉, 幸男
Citation	大阪大学人間科学部紀要. 1981, 7, p. 173-188
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/7500
rights	
Note	

質的比較静学の社会学的意義をめぐって

――研究ノート――

白　倉　幸　男

質的比較静学の社会学的意義をめぐって

——研究ノート——

1. はじめに

本稿は，数量的に表現しえないような社会学的変数間の相互連関関係を確定するための質的分析法，すなわち，質的比較静学の(a)社会学的意義，(b)数学的構造の概観，(c)その適用の三つを軸としている。

Pareto は社会現象の相互連関過程分析の決定的な重要性に着目していた。Pareto の展開した社会学方法論は力学からのアナロジーによる所が大きく，その理論構成は簡単な公理から出発して，次第に現実に接近して行く点を特徴とする。D'Alembert の原理が動学を静学の問題に還元するように，社会現象への動学的接近の第一歩は均衡概念を用いての動学の静学への帰着にあるとみなした[1]。Pareto の一般均衡論の彫啄もこの方針に沿うものだった。Pareto の均衡概念は，相互連関の行きついたところとしての言わば相互作用均衡とでも命名すべきものである。経済学での相互連関分析は，比較静学が典型的なものであり，その本質は内生変数の相互作用の行きついた状態としての均衡条件を介して，外生変数とのつながりを見い出すものである。

均衡条件は数学的には陰（もしくは陽）関数の形で次のように表わされる。$x_i(i=1, \cdots, n)$, $\alpha_j(j=1, \cdots, m)$は，それぞれ内生および外生変数である。一般に，(1.1) の連立方程式は微分

$$f_i(x_1 \cdots\cdots, x_n ; \alpha_1 \cdots\cdots, \alpha_m)=0 \quad (i=1, \cdots, n) \qquad (1.1)$$

方程式であることが多いが，必ずしも初等関数による陽表的解が得られる訳ではない。しかしながら各内生変数を外生変数の関数として表わす陽表的解 $x_i=x_i(\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_m)$ が得られぬとしても，外生変数の変化による内生変数の変化について，すなわち，$\partial x_i/\partial \alpha_j$ について知ることは可能である[2]。

Parsons も比較静学的方法の重要性につとに気づいていたが，社会学的変数が必ずしも計量的（metric）でないこと等の理由により，構造機能分析の途をとった[3]。しかしながら，そこにおいても相互連関分析が重要であることは強調されねばならない。ところで，Simon は Homans の集団論の数学的定式化を試みている[4]。そこでは，比較静学による分析もなされているが，この定式化は線型的であったために初等関数による陽表的解が得られ，さしたる困難は存在していなかった。しかしながら，非線型モデルへの拡張に際して，Simon は位相

図に依拠し，比較静学を採らない。ところがより多くの変数からなるシステムを考察しようとすれば，位相図による幾何学的・視覚的方法の有効性は減少せざるを得ない。 Blalock も比較静学のもつ分析力に着目しながらも，これらの点について検討を加えていない[5]。これらの点については後に触れることにする。

比較静学的方法は必ずしも万能のものではありえない。しかし，それは社会科学史上初めての相互連関分析の方法であった。社会現象をシステムとして把握することがその特徴である。Homans が指摘するように[6]，理論の本質が演繹可能性にあるとすれば，比較静学はこれを可能にするものであると言える。別の表現をとるならば，何が帰結としてでてくるかという問に答えることができるものである。

2. 質的比較静学の必要性

錯綜する社会現象を解きほぐすための方法として比較静学が存在していた。ところで，Pareto によれば社会学的変数間の相互依存関係の認識について，(a) 漠とした相互連関の存在の認識，(b) 各変数の変動の方向性の認識，(c) 各変数の変動の強度および方向性の認識，の三つが指摘されている[7]。だが夙に社会科学で相互連関分析を成し遂げた経済学の場合と異なり，社会学的変数は必ずしも計量的変数ではない。すなわち，必ずしも実数で表わせるとは限らないと言える。社会学的変数の尺度は，(a) 名目尺度，(b) 順序尺度，(c) 間隔尺度，(d) 比率尺度，等のものでありうるからである。また，ここで質的（qualitative）という意味は，各変数の変化の方向の符号についてのみ，すなわち，正負またはゼロについてのみの知識だけを要するという意味である[8]。この質的という概念は必ずしも残余概念ではないことに注意を要する。社会学的分析においては，ほとんど変数が相互連関している過程についての知見が得られていないのであるから，変数の符号のみから情報が得られただけでも大きな進歩と言える。究極的には，他の尺度にも質的分析が拡張されることが必要であることは自明である。

比較静学は数学的には陰関数の基本定理に対応する。この微分方程式自体を初等関数によって陽表的に解くことができなくても，外生変数の変化による内生変数の変化について知ることができる。このことが意味しているのは，社会学的には次の二点に集約できる。①連立方程式であることから明らかなように，バラバラな命題の単なる寄せ集めではなく，密接に連関しあったシステムとしてとらえる。この観点からすれば，社会学においてしばしば見られる三段論法的推論がある時は正しく，またある時は誤まっている（sometime true）ものであることも納得しえよう。しかるに，これは特殊な条件の下において成立するものだからである。これは Boudon の言う「弱いインプリケーション」にも通じることである[9]。② 外生変数の変化によって惹起された内生変数の変化という意味からも明らかなように，比較静学

では，(a) システムが均衡条件を満たし，(b) 存在条件をも満たし，(c) 安定条件をも満たし，(d) そして，内生変数から外生変数へのフィードバックが存在しないとして，相互連関過程を把握する。別の表現をとるならば，これらの条件は，システムの過程を，(i)システムの外生変数からの一方向的な影響過程，(ii)必ずしも明示的にシステム内過程を把握することなく内生変数の変化を知る，という意味で特殊なシステム論となっている。

比較静学の基本的特性が，(a)動学的過程の静学への帰着，(b)相互連関の把握にあるとすれば，比較静学が複数の命題から構成される理論からの演繹において一つの有力な道具となりうることは明らかである。では，比較静学的分析は，他の社会学的分析における方法とどのような点において異なるのであろうか。演繹の方法としては，(a)要素・集合，(b)集合・集合族，に注目して行なうものが代表的であろう[10)]。これに，(c)三段論法，によるものも見落すことができない。一般には，これらの演繹法は混合して用いられることが大きい。これらの推論の特徴は，変数間の相互連関において，影響関係が無いとおくものが多くなっていることも特徴的であり，非対称的なものが多くなっていることも特徴的である。なお比較静学においても外生変数および内生変数の変化とは，集合の分割に対応するものであることも確かである。比較静学が他の方法と基本的に異なっているのは，同一水準の複数の必ずしも影響が一方向的でない命題からの演繹力が強いことにある。この点からも質的比較静学が必要となる。

3. 質的比較静学の数学的構造

既にふれたように Pareto は D'Alembert の原理の類推によって連互連関システムにおける外生変数の集合の変化が，内生変数にどのような変化をもたらすかについて知ることの重要性に着目した。その後の Samuelson の問題提起は,変数の変化の「方向」のみから何らかの知見が得られぬかというものであった[11)]。

すなわち，通常の比較静学においては次の均衡条件が満たされているとする。(なお,以下の議論では単純化のために，安定および存在条件等は満たされているものとすることを特に言及しない限り前提とする)。

$$f_i(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n\,;\,\alpha_1,\ \cdots\cdots,\ \alpha_m)=0 \quad (i=1,\cdots,\ n) \tag{3.1}$$

(3.1) を外生変数 α_j に関して微分する。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j}+\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j}=0 \quad (i=1,\cdots,\ n) \tag{3.2}$$

いま，$\partial f_i/\partial x_k=f_{ik}$，$\partial f_i/\partial \alpha_j=h_j^i$，また，行列 (f_{ik}) の行列式を Δ とし，Δ の第 k 列 f_{1k}, f_{2k}, ……, f_{nk} を h_j^1, h_j^2, ……, h_j^n で置き換えた行列式を Δ_k と表わすものとする。

従って，Cramer の公式から，

$$\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j}=\frac{\Delta_k}{\Delta} \qquad \begin{pmatrix} k=1, \cdots, & n \\ j=1, \cdots, & m \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

が得られる。

つまり，Samuelson は，f_{ik}, h_j^i の符号についての知見から，Δ, Δ_k の符号を知ろうとしたのである。ところが，これは特殊のケース別とすれば絶望的に困難なことがわかる。しかし，連立一次方程式の問題に関してみても，大きな行列になるほど Cramer の公式による解が困難になっていたことも想い出される。数値解でそのようであれば，符号についても同じことが言えるであろう。Lancaster が着目したのはこの点であった[12]。Lancaster は斉次一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の正値解について凸錐（convex cone）の性質を用いて考察をすることから，質的比較静学のアルゴリズムを案出した。ここでは，その要素が正負もしくはゼロで表わされる質的ベクトルおよび質的行列，質的連立方程式についての性質をそこでの議論の中から抽出し，さらに何が残されているかについて知っておくことが必要であろう。ひさしく埋もれていた質的比較静学についての理路を明らかにしてゆくことは，今日の水準での社会学にとって重要なことの一つと言えよう。

さて，質的比較静学の基本的方程式は（3.2）ではなく，むしろ次の形で表わす方が都合がよい。ここで，Δx_k, $\Delta\alpha_j$ はそれぞれ x_k, α_j の増分を表わす。

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\cdot\Delta x_k+\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j}\cdot\Delta\alpha_j=0 \quad (i=1, \cdots, n) \tag{3.4}$$

前に用いた省略記号 f_{ik}, h_j^i を用いれば，(3.4) 式は次のように行列を用いて表わすことができる。

$$\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots\cdots & f_{1n} & h_j^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots\cdots & f_{nn} & h_j^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \\ \Delta\alpha_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

ここで Samuelson では $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$（$A\equiv n\times n$, $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$）という非斉次連立方程式を解くことに比較静学の問題が帰着したのに対し，Lancaster では $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$（$A\equiv n\times(n+1)$）という斉次連立方程式の問題に帰着することに注意すべきであろう。もちろん，一般の行列Aについて拡張をしてゆくことも必要となる。

さて，正を 1，負を 0，ゼロを z として表記しよう。このときこれらの間の演算について次の性質が得られる。

I．加法

(i) $1+1=1$

(ii) $1+0=w$

(iii) $1+z=1$

(iv)　$0+z=0$

(v)　$0+0=0$

(vi)　$z+z=z$

II．乗法

(i)　$1\times 1=1$

(ii)　$1\times 0=0$

(iii)　$1\times z=z$

(iv)　$0\times z=z$

(v)　$0\times 0=1$

(vi)　$z\times z=z$

なお，加法および乗法のいずれにおいても左辺の演算の順序は変えても式は成立する。Iの(ii)の w は，符号からのみでは明確に確定することができぬものである。数値についての情報が得られれば，ω が正負およびゼロのいずれかであるかは確定する。

質的ベクトルとは，上に定義したような1，0 および z 次質的ベクトルは，要素の数が n であるようなものである。定義から明らかなように，異なる n 次質的ベクトルは全部で 3^n 個存在している。n 次ベクトル空間を L_n で表わし，n 本の座標軸は相互に直交しているものとする。L_n 内の象限の個数は 2^n 個である。要素に z を含まぬ n 次質的ベクトルの数は 2^n 個である。各象限の内部のみを考えれば，n 次質的ベクトルは，各象限内部と一対一に対応させることができる。

質的ベクトルの内積についても同様に考えることができる。

(i)　$\mathbf{x}'\mathbf{x}=z$ or 1

(ii)　$\mathbf{x}'\mathbf{x}=z$ のとき，またそのときに限り，　$\mathbf{x}'=(z\cdots\cdots z)$

(iii)　$(a\mathbf{x})'\mathbf{y}=a\mathbf{x}'\mathbf{y}$, $\mathbf{x}'(a\mathbf{y})=a\mathbf{x}'\mathbf{y}$, a は 1, 0, z のいづれかを表わす。

(iv)　$\mathbf{x}'\mathbf{y}=\mathbf{y}'\mathbf{x}$

(v)　$\mathbf{x}'(\mathbf{y}+\mathbf{u})=\mathbf{x}'\mathbf{y}+\mathbf{x}'\mathbf{u}$, $(\mathbf{y}+\mathbf{u})'\mathbf{x}=\mathbf{y}'\mathbf{x}+\mathbf{u}'\mathbf{x}$

$\mathbf{x}'\mathbf{y}=w(w=0+1)$ のとき，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とは擬直交 (potentially orthogonal)であると定義する。また，$\mathbf{x}'\mathbf{y}=z$ のとき，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とは直交するという。一般に要素がすべて z である質的ベクトル以外では内積が z となるものはわからない。それ故，擬直交という性質は質的連立一次方程式の考察において重要となる。 $\mathbf{x}'\neq(z\cdots\cdots z)$ のとき，$\mathbf{x}'\mathbf{x}=1$ である。それ故，同一象限内部の質的ベクトルは，決して直交することはない。

ところで，2^{n-2} 個の n 次質的ベクトルを考える。

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix},\cdots\cdots,\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

これは左から順次に二進法で 0 から $2^{n-2}-1$ までの数を表わしたものと一対一に対応している。すなわち，z を要素として含まぬ質的ベクトルは二進法で表わした数と一対一に対応させうる。ただし，ここでは後述する理由で n 次質的ベクトルの数が半分の 2^{n-2} 個となっていることに留意されたい。

次に，$(0\,z\,0\cdots\cdots0)'$ という質的ベクトルを考えてみよう。(3.6) より各象限がその境界も含むものとすれば，$(0\,z\,0\cdots\cdots0)'$ は，象限 $(010\cdots\cdots0)$ および $(000\cdots\cdots0)$ の双方に含まれることになる。ところで質的ベクトル $(100\cdots\cdots0)$ は，質的ベクトル $(011\cdots\cdots1)$ に 0 を掛けたものに等しい。象限に関しては，原点に関して対称である。それ故，一般に第 1 成分が 0 でない質的ベクトルは，0 を掛けて原点に関して対称なベクトルに帰着させて考える。これは質的斉次連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ を考察するための工夫である（ただし，$\mathbf{0}=(z\cdots\cdots z)'$ とする)。

次に，質的行列とそのランクについて定義しよう。いま，質的行列Aの成分が次のように与えられているとしよう。

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\z&0&1\end{pmatrix}$$

このとき，行ベクトル $\mathbf{a}_1=(011)$，$\mathbf{a}_2=(z01)$ については，$\mathbf{a}_1$ は象限への対応が一意的に決まる。$\mathbf{a}_2$ は象限 (001)，そして $0\mathbf{a}_2$ は，(010) に所属する。すなわち，$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の形で与えられた質的連立一次方程式において，$\mathbf{x}$ は 3 次ベクトルである。それ故，$\mathbf{a}_1\mathbf{x}=z$，かつ $\mathbf{a}_2\mathbf{x}=z$ となる質的ベクトル $\mathbf{x}$ を探究することが Lancaster のアルゴリズムの中心的思想である。n 次質的ベクトルの第 1 成分は 0 として考えることができる。しかるに，$\mathbf{x}$ が解とすれば $0\mathbf{x}$ も解となるからである。ここで $\mathbf{x}$ が所属しうる象限は次のようになる。ここで，必ず第 1 成分が 0 となるように原点に関して対称にしている。

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

これを左から順に P_0，P_1，P_2 P_3 とすれば，$\mathbf{a}_1=(011)$ は P_3 に対応し，$\mathbf{a}_2=(z01)$ は P_1，P_2 に属する。既に示した内積の性質から $\mathbf{a}_1$ は P_3 内の質的ベクトルと直交しない。また，$\mathbf{a}_2$ は P_1，P_2 内の質的ベクトルとは直交しない。それ故，質的行列 A のランクを $s(A)$ で表わすとき，行ベクトルの属する異なった象限の数 $s(A)=3$ をランクと定義とする。このとき，$\mathbf{a}_1$ および $\mathbf{a}_2$ は $(000)'$ と擬直交となる。よって，$(000)'$ が解となる。（このとき，$(111)'$ も解となることは明らかであろう)。

質的連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ が与えられており，A は m×n 行列とすれば，上記の列から明らかなように，$s(A)=2^{n-1}-1$ のとき，この連立方程式は質的に一意な解をもつ。$s(A)=2^n$ のときは自明な解以外の解をもたない。$s(A)=2^{n-1}-a$ $(a\geqq 1)$ のとき，解の数は a 個である。(ただし，z を含む解については，当面考慮外とする)。他方，A の列ベクトルに関しても同様にランクの考察が可能である。しかし，行および列に関する質的ランクは，数値が与えられている場合の行列のランクのように必ずしも一致しない。幾何学的には A を構成する行ベクトル $\mathbf{a}_i$ と擬直交する質的ベクトルの存在する象限以外の象限を消して行くことに等しい。

さて，n 次質的行列について各行および各列のランクがそれぞれ 2^{n-1} となるものを考える。例えば，4次の質的行列 P を考える。

$$P=\begin{pmatrix} z & 1 & z & z \\ 1 & z & z & z \\ z & z & 1 & z \\ z & z & z & 1 \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & z \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

A が上のように与えられたとき，P を左から掛けて，$AP=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & z & 0 & z \end{pmatrix}$ と変形できる。このように，ランクが 2^{n-1} となる質的行列 P で各行および各列に1つ1が存在するものを用いることによって行列 A の変形（行もしくは列の入れ換え）を行なえる。この P の操作を通じて質的解は影響を受けない。P は質的順列行列である。また，A の左右からこのような P による操作を加えても，A の質的ランクに変化はない。

さらに，第 i 行（列）の符号を逆転させたいときには，$(i,\ i)$ 成分が0，他の対角成分が1，また，その他の成分が z となるような n 次質的行列 R を左（右）から掛ければよい。

$$R=\begin{array}{rc} & \quad\; i\text{列} \\ i\text{行} & \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \vdots & \cdots & z \\ z & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ z & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

P と R の組み合わせによって A を変形しても得られる質的解は同一のものである。これらの変形を通じて，システムの基本分類を試みることもできるかも知れない。内的メカニズムが全く異なっていても同一質的解が得られる場合があることなども興味深いものであると言える。R は質的ベクトル $\mathbf{a}_i$ を原点に関し対称な $\mathbf{0a}_i$ ($\mathbf{a}_i$ の符号を逆転したもの）に変えるものである。

ところで，Aは $m\times n$ 行列とし，その第 i 行ベクトル$\mathbf{a}_i$において $a_{ij}\neq z$, $a_{ik}=z$(すべての$k\neq j$)とすると，A のランクは 2^{n-1} となる。よって，前述の定理から，$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ は解をもたない(自明解を除く)。この場合，第 i 行および第 j 列を削除した $A'\mathbf{x}'=\mathbf{0}$ を解けばよい。このとき $x_j=z$。従って，A'は $(m-1)\times(n-1)$ 行列となっている[13]。この問題は，A の分割可

能性の問題にもつながることを注意しておきたい[14]。純粋に質的に考察する方法の発見が望ましいことは言うまでもない。

そこで，Lancaster のアルゴリズムをとりあげるとする[15]。いま，(3.5) 式の左辺の行列が，次のような場合を考えよう。

$$MAT\begin{pmatrix}0&1&1\\z&0&1\end{pmatrix}\quad\left(\text{ただし，}\begin{matrix}0=-\\z=0\\1=+\end{matrix}\right)\quad NEG\begin{pmatrix}1&0&0\\z&1&0\end{pmatrix}$$

これを MAT,MAT を反転させたものを NEG とよぶ。この点についての数学的説明は既に述べた。同様に，(3.6) 式を考える。$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ で，$\mathbf{x}^\circ$ が解のとき $0\mathbf{x}^\circ$ も解であることから，n 次空間内の半分の個数の象限を考えればよかった。この象限のうち (0 0 … 0) から (0 1 …… 1) までのものを考える。これは (3.6) 式に対応する。これを次のように便宜上横書きで列挙したものは $LIST$ とよばれる。すなわち，MAT および NEG の各行ベクトルについて，ランクを定義したときのように考えることになる。MAT で (011) の ランクは 1，(z01) は，(001) および NEG での (z10) の 2 である。

$LIST$

000
001 (MAT 2行目と対応)
010 (NEG 2行目と対応)
011 (MAT 1行目と対応)

$LIST$ は上のように与えられる。それ故，残った 000 が解である。すなわち，このようなシステムでは，各変数は全て同一方向に変化する。解が質的に一意的であることはランクが 3 であることから明らかである[16]。

4. 質的比較静学の適用

システムの動きの質的側面の解明のための一つの方法としての質的比較静学の効用について考えてみたい。それには，まずよく知られている Homans の集団論の Simon による定式化を例として考えるのが適当である[17]。そこでは，内生変数として，I＝成員間の相互作用の強度，F＝成員間の親近性の水準，A＝集団所属成員による活動の量，および，外性変数として，E＝外部環境により集団に課せられる活動量，の 4 変数からシステムが構成される。Simon は，システムの行動が次のように表わされるものとした。

$$\mathrm{I}=f(A,\ F) \tag{4.1}$$

$$\frac{dF}{dt}=g(I,\ F) \tag{4.2}$$

$$\frac{dA}{dt}=\psi(A,\ F\,;E) \tag{4.3}$$

f, g, ψ は関数であることを示す。(4.1) 式の意味するところは，相互作用の強度は，活動量と親近性の水準の関数であることを示す。Homans の主張では，A または F の正の変化は，I の正の変化をもたらす。Simon は，(4.1)～(4.3) 式の分析を位相図を用いて試みている。Coleman は，これを数学的にもう少し特定化したが，彼もまた，最終的に位相図を利用していることに変わりはない[18]。それによれば，上記の主張は，次のように表わせる。

$$\frac{\partial I}{\partial A}>0\,;\quad \frac{\partial I}{\partial F}>0 \tag{4.4}$$

(4.2) 式は親近性の水準は，相互作用の現水準が，親近性の現水準にふさわしい水準以上のとき上昇し，この調整は時間を要するものであることを示している。従って，次の解釈がな

$$\frac{\partial g}{\partial I}>0\,;\quad \frac{\partial g}{\partial F}<0 \tag{4.5}$$

される。また，同様に，(4.3) 式は，活動量は，親近性の水準が活動量の現水準にふさわしい水準以上のとき上昇すること，および外部からの要請による活動水準が現水準以上のとき増大するという命題に対応している。これも次のように解釈される。

$$\frac{\partial \psi}{\partial F}>0\,;\quad \frac{\partial \psi}{\partial E}>0\,;\quad \frac{\partial \psi}{\partial A}<0 \tag{4.6}$$

調整速度については，(4.2) 式と同様である。

さて，(4.1) は (4.2) に代入して次のように表すことができる。

$$\frac{dF}{dt}=g(f(A,F),\ F)\ =\phi(A,F) \tag{4.7}$$

このとき，両辺を微分して次式を得る。

$$\left(\frac{\partial g}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial A}\right)dA+\left(\frac{\partial g}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial F}+\frac{\partial g}{\partial F}\right)dF=0 \tag{4.8}$$

ここで，

$$\frac{\partial \phi}{\partial A}=\frac{\partial g}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial A}>0 \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial F}=\frac{\partial g}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial F}+\frac{\partial g}{\partial F} \tag{4.10}$$

(4.10) 式の符号は，Coleman の解釈によれば，大きな F については負とされる[19]。これは，F についての一種の飽和性の定義であることは言うまでもないだろう。それ故，小さな F については，$\partial\phi/\partial F>0$ となる可能性も存在している。しかし，本節での検討対象である Simon の定式化においてはこの点について必ずしも着目されていない。なお，$\partial\phi/\partial F<0$ とすることは，g に対して F の変化の及ぼす効果は，f を経由する間接効果よりも，無経由の直接効果の方が大きいとみなすことでもある。

以上の結果を踏まえて，外部環境からの活動への圧力 E の変化によってシステム内部にもたらされる変化について，質的比較静学を用いて考察を行なうことにしたい。

今，システムが均衡状態にあるものと仮定する。このとき，次式が成立する。

$$\phi(A, F)=0 \tag{4.11}$$

$$\psi(A, F\,;\, E)=0 \tag{4.12}$$

両式を微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial\phi}{\partial A}dA+\frac{\partial\phi}{\partial F}dF=0 \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial A}dA+\frac{\partial\psi}{\partial F}dF+\frac{\partial\psi}{\partial E}dE=0 \tag{4.14}$$

従って，ここでの質的比較静学の対象となる連立方程式は，次のように表わせる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial A} & \frac{\partial\phi}{\partial F} & 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial A} & \frac{\partial\psi}{\partial F} & \frac{\partial\psi}{\partial E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dA \\ dF \\ dE \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

既述の如し，質的比較静学を行なうことは，（4.15）式の左辺の行列の質的性質を調べることに帰着する。それ故，次の符号で表わされる行列を考察することになる。

$$\begin{pmatrix} + & - & 0 \\ - & + & + \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

従前の如く，0を z，－を0，＋を1と表わすと(4.16)式は次のように表わすことができる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

(4.17）式で表わされる質的行列の質的ランクは，2であるから質的比較静学の解は，$2^{3-1}-2=2$ 個存在し，$(000)'$，$(001)'$ となる。

それ故，A と F は常に同一方向に変化していることが判明する。そして，この均衡点のまわりでは，(a) E と A および F が同一方向に変化するパターンと，(b) E と A および F が反対方向に変化するというパターン，の二つが存在している。

Simon による位相図を用いての非線型モデルでの質的比較静学の代替的方法は，E の減少によって，曲線 $\psi=0$ が原点方向に平行動することであった[20]。そこから得られる結論は，「E の減少するとき，A および F の均衡水準が減少する」であった。ところで，質的比較静学から得られた結果によれば，この命題に適合する命題のほかに，「E が減少するとき，A およびF は増加する」というもう一つの命題が得られている。

では，一体位相図による方法はどこでもう一つの命題を見失ってしまったのだろうか。これについて，次の原因を指摘できる。① 第1次近似としての曲線 $\psi=0$ の形状の不変化の仮定が必ずしも適切でなかったこと，② 曲線の平行移動の仮定の不適切さ，③ 曲線 $\phi=0$ の不変化の仮定に潜む波及効果の無視，である。これらの仮定はあまりに強いものであったことは言うまでもない。

たとえある範囲のものにしか使えぬとしても，位相図を用いての質的比較静学に代替することは可能であった。しかし，位相図による方法にもメリットが存在することも指摘しておくべきである。位相図には大域的性質があるのである。残念ながら，質的比較静学では，シ

ステムが線型である場合等のほかにはこの性質はあまり望めない。Simon が外部環境からの活動への圧力の減少と集団の崩壊について考察できたのは，大域性を想定したからである。

なお，Simon は Festinger の小集団論においても同様な考察を試みている[21]。これは，集団成員間での意見の相違 D，集団の凝集性 C，の 2 つの内生変数と，集団に関する論争点の関連性 R，という 1 つの外生変数からなるシステムに帰着する。McWhinney によれば，これは次のように表わされる[22]。なお，添字は当該変数で偏微分したことを表わす。

$$\frac{dC}{dt}=\Gamma(D,R,C)\ \ \Gamma_D<0,\ \ \Gamma_R<0,\ \ \Gamma_C<0 \tag{4.18}$$

$$\frac{dD}{dt}=H(D,C,R)\ \ H_D<0,\ \ H_C<0,\ \ H_R<0 \tag{4.19}$$

質的比較静学をこのシステムに関して行なえば，(001)′，(010)′，(011)′ が解として得られる。このことの意味していることは，Simon らが意図していたような質的な社会学的分析においても数値についての情報がさらに得られれば一層強力な論理的展開が可能なことを示している。とりわけ，次の行列の通常の意味でのランクが 2 であれば解は一意に決まるという線型代数の定理を起するべきであろう。

$$\begin{pmatrix} \Gamma_D & \Gamma_C & \Gamma_R \\ H_D & H_C & H_R \end{pmatrix}$$

それ故，何らかの測定が可能であるとき，モノサシの変化による影響を社会学的分析が受けやすいことを示していると言える。

5. むすび

質的に相互に連関している命題から演繹を行なうための一つの方法としての質的比較静学の社会学的意義，数学的構造，その応用を中心に検討を重ねてきた。というのも命題のモザイク的よせあつめを必ずしも理論と言わぬことからも明らかなように，これらの命題から何らかの社会学的推論がなしえなければならない。相対的とも言える理論の範囲が問題なのでなく，むしろ演繹可能性こそ重要であると言えよう。この意味で質的比較静学が重要だと言える。また，他の見地からは，証明可能性にあるという事実を見落すことはできない。この点で他の方法と異なる。Coser が的確に指摘したように，セクト的，密教的思考に陥りやすい学派には，このような証明の契機が欠けていると言えよう。しかし，他の学派に見られるような機械的なルーティン活動に陥いることも反省すべきであろう[23]。Coser が剔抉したように方法至上主義でいくと，「認知カテゴリーの無理論的写像」や重要な探究課題の無視にもつながるであろう。

質的比較静学は，このようなものではなく理論そのものが一定の条件さえ満していれば容

易に用いることができる。なお，これと関連して，ここで用いた意味での質的数学においてもいくつかの定理の存在が考えられる。このことは，また，凸構造のもつ社会学的意味を探ることでもある。ここでは，質的比較静学の思想のなかに，社会学的な相互連関様式の探究の一つの手がかりが存在することの指摘だけで十分であろう。関連する諸問題の考察は今後に残された課題である。

（注）

1) Pareto, V. (1966), *Sociological Writings,* Oxford, Basil Blackwell, pp. 105–107.
2) Samuelson,P. (1947), *Foundations of Economic Analysis,* Cambridge, Harvard University Press, Ch. 2.
3) Parsons, T. (1945), "The Present Position and Prospects of Systematic Theory in Sociology," in Gurvitch, G. and Moore, W. (eds.), *Twentieth Century Sociology,* New York, Philosophical Library.
4) Simon, H. (1957), *Models of Man: Social and Rational,* New York, John Wiley and Sons, pp. 99–104.
5) Blalock, H. (1969), *Theory Construction,* Englewood Cliffs, Prentice Hall, pp. 137–140.
6) Homans, G. (1964), "Contemporary Theory in Sociology," in Faris, R. (ed.), *Handbook of Modern Sociology,* Chicago, Rand-McNally, pp. 951–977.
7) Pareto, V. op. cit. and Parsons, T. op. cit.
8) Lancaster, K. (1965), "The Theory of Qualitative Linear Systems", *Econometrica,* vol. 33, pp. 395–408.
9) Boudon, R. (1974), *The Logic of Sociological Explanation,* Harmondsworth, Penguin Education, pp. 28–30.
10) Blalock, H. op. cit. pp. 141–151.
11) Samuelson, op. cit. Ch. 3.
12) Lancaser, K. op, cit. pp. 395–408. および Lancaster, K. (1966)。"The Solution of Qualitative Comparative Static Problems" *Quarterly Journal of Economics,* vol. 80, pp. 278–295。ここでは，主に後者を考察の対象とする。なお，Land, K. (1978), "Comparative Statics in Sociology", in Blalock, H. et al. (eds.), *Quantitative Sociology,* New York, Academic Press, pp. 475–510 も参照。
13) Lancaster, K. op. cit.
14) Lancaster, K. (1962), "The Scope of Qualitative Economics", *Review of Economic Studies,* vol. 29, pp. 99–123. などを参照。
15) Lancaster, K. (1966) op, cit.
16) なお，本稿では z を含む解について立ち入らない。基本的には境界の両側が解となっている象限であれば，当該の境界も解となる。
17) Simon, H. op. cit. pp. 94–119.
18) Coleman, J. (1960), "The Mathematical Study of Small Groups", in, Solomon, H. (ed.), *Mathematical Thinking in the Measurement of Behavior,* New York, Free Press, pp. 15–46. 係数については以下 Colemen による解釈をとる。
19) Ibid. および McWhinney, W. (1968), "Synthesizing a Social Interaction Model", *Sociometry,* vol. 31, pp. 229–249.
20) Simon, H. op. cit.
21) Simon, H. op. cit. Ch. 7.
22) McWhinney, W. op. cit. なお数学的モデルに関しては，Coleman, J. (1964), *Introduction to Mathematical Sociology,* New York, Free Press, 参照。
23) Coser, L. (1976), "Two Methods of a Substance", in Coser, L. and Larsen, O.(eds.), *The Uses of Controversy in Sociology,* New York, Free Press, pp. 329–341.

ON THE SOCIOLOGICAL SIGNIFICANCE OF QUALITATIVE COMPARATIVE STATICS

Yukio SHIRAKURA

It is well known that Pareto's sociology is characterized by the conception of social system. Pareto analyzed society as a system of mutually interdepending social phenomena, utilizing the mechanical model which gave one a clear and precise conception of social equilibrium. In analytical mechanics, dynamics can be reduced to a problem of statics by D'Alembert's principle. Pareto considered that a similar principle could be applied to social systems. In economics, it is called "comparative statics". Certainly, the late Parsons was aware that dynamic analysis of reciprocal interdependence was of methodological importance in sociology. Parsons proposed structural-functional analysis since sociological variables were often absent from metric. But, as an approach to the complicated social process, there can be qualitative comparative statics placing primary emphasis on the analysis of mutual interactions among sociological variables.

The main purpose of this paper is to examine the sociological significance of qualitative comparative statics, to overview mathematical structure of it and to investigate Simon's formalization of small group theories.

In comparative statics one generally uses the fundamental theorem of implicit function. For theoretical purpose, a social system consists of endogeneous and exogeneous variables, which are subject to an equilibrium condition. Even when the system of differential equations cannot be solved explicitly by elementary functions, certain properties of the functional relationship among sociological variables are attainable for us. This means two points ; one is the formulation of the system as a set of propositions, and another is the understanding of the system as a black box, which is lack of feed-back to exogeneous variables. To add to these properties, deduction in comparative statics is different from that in so-called element-set approach or set-family of sets approach, since the former is deduction from a set of propositions of the same level.

Given the relevant first derivatives, qualitative comparative statics clarifies the directions of the changes in the endogeneous variables in the system from those of the exogeneous ones. Accordingly, qualitative comparative statics problems are reduced to the sign pattern rather than the magnitudes of the solution vector of the system of homogeneous linear eqations : $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ (A is the $n\times(n+1)$ matrix), where vector $\mathbf{x}$ is called qualitative in the sense that $\mathbf{x}$ is made up of the signs of the changes in the variables, and A consists of n qualitative row vectors whose elements are the signs of the relevant first derivatives.

Qualitative rank of (n+1)-vector is defined as the numbers of interior of orthonants in (n+1)-space. Qualitative rank of A, that is, s(A) is defined similarly by the row vectors of A. The vector is identified with the vector of the opposite sign. Then, the maximum of s(A) is at most 2^n. The rank s(A) is useful to examine the number of solutions. If s(A) $=2^n-1$, an unique solution exists. If s(A)$=2^n$, the system has no solution or is degenerate.

Simon's mathematical formulations of Homans' and Festinger's small group theories are re-examined in terms of qualitative comparative statics. In non-linear systems, Simon used "phase diagram". His approach is the first approximation based on the assumption that "the shape of the curve is unchanged", but it is not always the case. Put a little differently, this assumption means that the shift in a exogeneous variable operates on the endogeneous variables in the limited way. Thus, "phase diagram" approach may often lead to wrong conclusions in this respect. Qualitative comparative statics is free from such constraint. Moreover, Simon's analysis is vulnerable to measurement.

Finally, qualitative comparative statics is useful in sociology and mathematically relevant to convex theory, especially to cone theory.