Title	有限群ノ induced representation ニツイテ
Author(s)	大島, 勝
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 241, p. 1288-1292
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75000
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1068. 有限群 / induced repreientation ニツイテ

大島　勝 (高知高校)

§1. induced character / 積

定理1. 有限群 G / 正規表現ヲ R トスル、∇ ヲ G / 任意ノ表現トスルトキ

$$\nabla \times R \sim \begin{pmatrix} R & & 0 \\ & R & \\ & & \ddots \\ 0 & & R \end{pmatrix}$$

コノ右辺ニハ R ハ丁度 ∇ / 次数ダケ現ハレル。

本定理ハ筆者ガ昨年証明シタモノデアルガ (学士院記事参照) 最近此ノ定理ヲ拡張スルコトガ出来タノデ、ソレニ関聯シタコトヲ若干述ベル。

h_G ヲ G / 部分群トシ G, h_G / 位数ヲ夫々 g, h トスル. $m = g/h$

(1) $$G = h_G G_1 + h_G G_2 + \cdots\cdots + h_G G_m, \quad G_1 = E$$

h_G / 表現 D ヨリ induce シタ G / 表現ヲ D^* デ表ハス. 又 ∇ ヲ G / 表現トスルトキ $H \subset h_G$ ナル H ニ対シ $H \longrightarrow \nabla(H)$ トスレバ $\nabla(H)$ / 全体ハ h_G / 表現ヲナス. コレヲ $\nabla(h_G)$ デ表ハスコトニスル。

定理2. $$\nabla \times D^* \sim (\nabla(h_G) \times D)^*$$

(証明) 定理1 / 証明ト全然同様ニシテ出来ル. 即チ

$$M_k=\begin{pmatrix} \nabla(G_k) & & 0 \\ & \nabla(G_k) & \\ & & \ddots \\ 0 & & \nabla(G_k) \end{pmatrix}$$

(但シ $\nabla(G_k)$ ノ個数ハ D ノ次数ダケ取ルコトニスル) トスルトキ

$$P=\begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & M_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & M_m \end{pmatrix}$$

ト置ケバ G_f ノ元 G ニ対シテ

$$P^{-1}(\nabla(G)\times D^*(G))P=W^*(G)$$

トナルコトガ分ル. コゝニ W ハ f_g ノ表現 $\nabla(f_g)\times D$ ヲ表ハス. 但シコノトキ次ノ Lemma ガ入用デアル.

Lemma. A, B ヲニツノ matrix トシB ノ次数ヲ α トスレバ

$$(P^{-1}AP)\times B=Q^{-1}(A\times B)Q$$

コゝニ Q ハ

$$Q=\begin{pmatrix} P & & 0 \\ & P & \\ & & \ddots \\ 0 & & P \end{pmatrix}$$

ナル行列デ, P ノ個数ハ β 度ル個.

(注意1) $f_g=E$ ナルトキガ定理ノデアル。

(注意2) 基礎体 k ノ標数ガ零又ハ g ト素ナルトキハ単ニ指標ノ計算ノミニテ定理2ガ得ラレル。

以下簡単ノタメ k ノ標数ハ零又ハ k ト素デアルトスル。kg ノ絶対既約表現ヲ $D_1, D_2, \cdots\cdots, D_t$ トシ，D_i ヨリ induce シタ G ノ表現 D_i^* ノ指標ヲ $\chi^{(i)}$ デ表ハスコトニスル。

定理3. $D_i^* \times D_j^*$ ハ D_k^* $(k=1, 2, \cdots\cdots, t)$ ニ分解サレル。従ッテ指標ノ方デ考ヘレバ

(2) $$\chi^{(i)} \cdot \chi^{(j)} = \sum_{k=1}^{t} a_{ijk} \chi^{(k)}, \quad a_{ijk} \text{ ハ有理整数}$$

§2. induced character ノ関係

G ノ共軛類ノ中 kg ノ元ヲ含ムモノヲ $L_1, L_2, \cdots\cdots, L_\delta$ トスル。G ノ表現 D_i^* ニ於テ L_k ニ含マレル元ノ指標ヲ $\chi_k^{(i)}$ デ表ハス。

定理4. $$g_k \sum_{i=1}^{t} \chi_k^{(i)} \chi_\lambda^{(i)} = mg \delta_{k\lambda^*}$$

$(k=1, 2, \cdots\cdots, \delta)$

ココニ L_{λ^*} ハ L_λ ニ含マルル元ノ逆元ヨリナル共軛類デアル。

(証明) 正田先生「抽象代数学」P. 361 ト同様ノ方針デ出来ル。

定理5. D_k $(k=1, 2, \cdots\cdots, t)$ ノ中一次独立ナルモノハ丁度 δ 個即チ G ノ共軛類ノ中 kg ノ元ヲ含ム共軛類ノ

個数ニ等シイ。

〔証明〕 $X=(\chi_k^{(i)})$ ナル s 行 t 列ノ matrix ヲ考ヘレバ定理4ヨリ

$$X'X=(mg/g_k\,\delta_{k\lambda^*})=T$$

コヽニ T ハ s 次ノ matrix デ $|T|\neq 0$ 従ッテ X ノ階数ハ s トナル。

〔注意〕 本定理ハ既ニ中山氏ノ証明サレタモノデアル。(Ann. of Math. 39, P. 366参照)

以下 h_f が g ノ不変部分群ナルトキヲ考ヘル。g_f = 関シテ互ニ相似ナル表現ヲ klass ニ纏メレバ，klass ノ個数ハ丁度 s 個デアル。従ッテ互ニ相似ナラザル h_f ノ既約表現ヲ $\Delta_1, \Delta_2, \cdots\cdots, \Delta_s$ トシ，Δ_k ト相似ナ表現ノ個数ヲ γ_k トスレバ，定理4ニヨリ

$$(3)\qquad g_\mu \sum_{k=1}^{s} \gamma_k \chi_\mu^{(k)} \chi_\nu^{(k)} = mg\,\delta_{\mu\nu^*}$$

従ッテ

$$(4)\qquad \sum_{\mu=1}^{s} g_\mu \gamma_\lambda \chi_\mu^{(k)} \chi_{\mu^*}^{(\lambda)} = mg\,\delta_{k\lambda}$$

又ハ

$$(4)'\qquad \sum_{H\subset h_f} \gamma_\lambda \chi^{(k)}(H)\,\chi^{(\lambda)}(H^{-1}) = mg\,\delta_{k\lambda}$$

定理6. $\chi^{(\lambda)}$ = contragredient ナ指標ヲ $\chi^{(\lambda)}$ デ表ハス。

$$\begin{cases} \chi^{(k)} \cdot \chi^{(\lambda)} = \sum_{\mu=1}^{s} a_{k\lambda\mu} \chi^{(\mu)} \\ \chi^{(\mu)} \chi^{(\lambda')} = \sum_{k=1}^{s} \tilde{a}_{k\lambda\mu} \chi^{(k)} \end{cases}$$

トスレバ

$$\gamma_k a_{k\lambda\mu} = \gamma_\mu \tilde{a}_{k\lambda\mu}$$

(証明) Brauer - Nesbitt ノ方法 (Ann. of Math. 42. P. 579 参照) ト同様ニシテ証明出来ル。