



Title	準順序環 及ビ ソノ應用ニツイテ
Author(s)	吉田, 耕作; 中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 242, p. 1309-1320
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75004
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1072. 準順序環及びその應用ニツイテ

吉田耕作, 中山正(名大)

Vernikoff-Krein-Torbin が C. R. URSS 30 = 準順序ヲモツ環ヲ論ジテ居ル (中野氏モ類似ノコトヲ論ゼラレタコトガアリ, マタ小笠原氏モ東ニナツテキル場合ヲ考察サレタ)。ソレニツキ, 環トイツヲモ結合律ヲ假定シナクトモヨイコトハ容易ニ知ラレ, ソシテ (証明トシテ特ニヨリ簡單ナルトイフヲケデモナク結局同ジコトデスガ) 準順序群ニ關スル一般的ノコトカラ容易ニ出スコトガ出来るコトヲ初メニ注意シタイ。即チ:

先ヅ準順序群 G (以下常ニ加法的ニ書カレタ可換群ノミヲ考察スル。勿論順序ハ算法ヲ保タレルトスル。即チ $a \geq 0, b \geq 0 \rightarrow a + b \geq a$)。而シテ

$$(a) \quad n a \geq 0 \quad (n \text{ ハ } \mathbb{N} \text{ 自然数}) \rightarrow a \geq 0$$

ヲ假定スル (コレハ後ニ假定スル様ニ實數ガ掛ケラレルトスレバ勿論充ヌサレチキル) 然ラバ Clifford-Lorenzen = ヨリ G ハ適當ニ線型順序群ノ直積ノ部分群ニ順序

ヲフケメテ同型ニナル。

$$G \cong G^* \subseteq \cdots \times G_0 \times \cdots$$

(G_0 ハ線型順序群, 直積ニ於ケル順序ハ勿論頂別)¹⁾

ユ、デ勿論 G ノ元ヲウゴクトキ G_0 ノ全体ニワタルトシ
テヨイ。

次ニ

(条件 A) G = ハアル元 $\neq 0$ ガアツテ, G ノイカナ

1) 實ハ G_0 ハドレモ群トシテハ G 自身ニ同型ニトレル。云
ハバ G_0 ハ G ノ順序ヲ更ニツケカヘタモノト見ラレル。
ソノコトハ Lorenzen ヨリ直接 Krull-Clifford 式
ノ証明ノ方が見易イ。Clifford ノ論文ハ全然証明カナ
イカラ念ノタメ補フテオカウ: G ノ元ノ集合 P デ 1) a, b
 $\in P \rightarrow a+b \in P$, 2) $a \leq b, a \in P \rightarrow b \in P$,
3) $0 \notin P$, 4) $\forall a \in P \rightarrow a \in P$ ナル條件ヲミタスモノヲ考ヘル。ハジ
メニ $G \setminus \{0\}$ ナル元ノ全体ヲ P_0 トシ P_0 ヲ含ムヨノ様ニ P ヲ考ヘル。アル P
ニツキ $C \notin P, -C \notin P$ ナル C ガアレバ $P \cap C$ ヲ含ム第ニ P' ガトレル。ソレハ
 $m a \in P + n C (P \cap C \in P)$ ナル a ノ全体ヲトレバヨイ (m, n
 $= 1, 2, \dots$)。マタアル $P =$ 對シテ $a \in P$ ナルコトヲ
 $a > 0 (P)$ トスレバ $G =$ 新々ニ一ツノ順序ガツク。モ
トノ正元ハ勿論コノ正元デアール。而シテ上述ヨリ極大ノ
 P ニツイテハコノ順序ハ線型トナル。極大ノ P ノ全体ヲ
 $\{P_\alpha\}$ トシ, $P_\alpha =$ 對應シテ順序ヲツケカヘタモノヲ
 G_0 トスレバヨイ。

ル $Q = \text{對シテモ適當ナ自然数} n \text{ アトレバ } -n \cdot 1 \leq Q \leq n \cdot 1$
 トナル (あるきめです単位)

ヲ假定スル。各 $\sigma = \text{ツキ} / \text{ノ像} / \sigma \text{ ハ } G \text{ ノ } \sigma \text{ であるきめです}$
 単位ナルコト明カデア。今 $G = \text{オイテ}$, $1 = \text{對シテ無限}$
 小, 即チ

(2) 如何ナル自然数 $n = \text{對シテモ } -1 \leq n \cdot Q \leq 1$

ナル如キ元ノ全体ヲ N トスレバ, N ハ ツノ "normal"
 ナ部分群ヲナス。コノニアル部分群 H が "normal"
 トハ

(3) $a, b \in H$ 且ツ $a \geq c \geq b$ ナラバ $c \in H$

ヲミタスコトスル。順序ヲ保ツ準同型ノ核ハ常ニ

"normal" デアリ逆ニ成立ツ。同様ニ, $G_\sigma = \text{オイテ} / \sigma$

$= \text{對シ無限小ナル元ノ全体ヲ } N_\sigma \text{ トスル。然ラバ } G / \text{アル}$

元 Q が $N = \text{属スルタメニハ}$, $\text{ドノ} \sigma = \text{ツイテ} \in a$ ノ像 a_σ

が $N_\sigma = \text{属スルコトが必要且ツ充分デア。ヨツテ } G/N \text{ ハ}$

G_σ / N_σ ノ直積ノ中ニ同型ニ寫像サレル:

$$G/N \longrightarrow (\text{中ニ同型ニ}) \cdots \cdots \times G_\sigma / N_\sigma \times \cdots \cdots,$$

而シテ順序ハ $\longrightarrow$ ノ向キニ保タレル。コノニ G_σ / N_σ ハ

あるきめです的線型順序群デカラ実数ノ (加法) 群ノアル

部分群デア。特ニ弱イあるきめです條件

(條件B) $-1 \leq nQ \leq 1$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) ナラ

バ $Q = 0$

ヲ假定スレバ,

定理1 (條件A及ビBノ下ニ) G ハ実数ノ群ノ部分群

+ル G_α / N_α / 直積 / 中 = 同型 = 寫像サレ:

$$G \rightarrow (\text{中} = \text{同型} =) \cdots \times G_\alpha / N_\alpha \times \cdots,$$

而シテ順序が $\rightarrow$ / 向き = 保タレル. 即チアル空間 / 実函数 / 群 / 中 = 同型ニ, $\rightarrow$ / 向き = 順序ヲタモツテ寫像サレル.

コノテ更ニ強イあるきめです條件

$$(\text{條件C}) \quad na \leq 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \text{ ナラバ}$$

$a \leq 0$ ヲ導入スル.

定理2 條件A及ビC(従ツテ勿論Bセ)ヲ假定スレバ, 上ノ $G \hookrightarrow \cdots \times G_\alpha / N_\alpha \times \cdots$ / 部分群ノ同型ニオイト西方ノ向き = 順序が保タレル. 即チ G ハアル空間ノ実函数ノ群ノ部分群 = 順序ヲフクメテ同型ニナル.

何者, a, b ヲ表現スル函数ヲ f_a, f_b トシ $f_a \leq f_b$ トスレバ $f_{(b-a)} \leq 0$ (0 函数) 然ルニコレハ D / σ = 対シテモ $b-a$ / 像 $(b-a)_\alpha$ カ

$$(b-a)_\alpha \leq 0_\alpha + n_\alpha = n_\alpha \quad (n_\alpha \in N_\alpha)$$

ヲミタスコトニ他ナラス. コレヨリ如何ナル自然数 t = 發シタモ

$$t \cdot (b-a)_\alpha \leq t \cdot n_\alpha \leq 1_\alpha.$$

従ツテ $t \cdot (b-a) \leq 1$. 故ニ $b-a \leq 0$, $b \leq a$ トナリ, コレハ順序が逆向き = モ保タレルコトヲ示ス.

サテ, 我々ノ $G = (\text{普通ノ如ク} =) \underline{\text{實数が掛ケラレ}}$ $\hookrightarrow$ 假定スル. 然ラバ G_α / N_α ハ実数全体トナリ, ソレヲハ $\alpha \cdot 1_\alpha (= (\alpha \cdot 1)_\alpha)$ ナル形ノ元 (1 類) トシテ

表ハサレル。

以上ハ、要スルニ單ニ準順序群ニツイテノ一般的ノ
事柄デアリ、何モ同新シイコトハナイデアラウ。而シテ
ソレカラ環ヘノ移行ハ容易デアル。ソノタメ先ヅ

G ハ第二ノ準順序群 Λ ヲ作用域トシテ有シ、而シ
テ Λ デノ 算法ハ作用素トシテノソレニ對應シ、マタ Λ
ノ正元ニヨツテ G ニオケル順序ハ保タレルトスル。即チ

$$3) \quad \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b, \quad (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a \\ (\lambda, \mu \in \Lambda),$$

$$4) \quad \lambda \geq 0 (\Lambda \text{デ}), \quad a \geq 0 (G \text{デ}) \text{ナラバ} \\ \lambda a \geq 0 (G \text{デ})$$

トスル。コレヲハ勿論當リ前ノコトナカ、更ニ

(條件 A^*) Λ ノ中ニアル ε ガアリ、ソレハ恒等作
用素ニ對應シ ($\varepsilon a = a$)、且ツ ε ハ Λ ニオケルあるきめで
す單位デアル。

ヲ假定スル。然ラバ

補題 G ノ任意ノ "normal" ナ部分群ハ Λ ニ對シ
テ認可 (zulässig) デアル。

何者、normal ナ部分群ヲ H トシ、今 $a \in H, \lambda \in \Lambda$
トスレバ適當ノ自然数 n ニ對シテ

$$-n\varepsilon \leq \lambda \leq n\varepsilon, \text{ 故ニ } -n\varepsilon \cdot a \leq \lambda a \leq n\varepsilon a$$

即チ $-na \leq \lambda a \leq na$ トナリ、 H ガ normal ナコトヨ
リ $\lambda a \in H$ 。

ユノ補題ハ G カラノ順序ヲ保ツ準同型寫像ハ當ニ作

用準同型定理を示す。コレが万事ヲ解決シテクレル。
即チ特 = $G \rightarrow G_\alpha / N_\alpha$ ナル準同型ハ作用準同型アリ

定理1.^{*} G オ (A^*) ヲミタス $\wedge$ ヲモットキ, 定理1ニオ
ケル「同型」ヲ作用同型ヲオキカヘテヨイ。

定理2.^{*} 定理2ニツイテ同様。

サテ, G ト A が一致シ, 而モ I ト E が一致シ, 而シテ G
= 實数カ掛ケラレル場合ヲ考ヘル。即チ G ハ實数ノ上ノアル
(結合律モ可換律モ假定シタイ) 環ナル。ユイ場合 G
 $\rightarrow G_\alpha / N_\alpha$ ハ G ナルいでやる M_α ナ割ルコトニヨリ
得ラレル: $G \rightarrow G / M_\alpha \cong G_\alpha / N_\alpha$ 。

而シテ實数 α, β = 對シテ $\alpha \cdot 1 \cdot \beta \cdot 1 = \alpha \beta \cdot 1$ ナカラ, コ
レヲ $\text{mod } M_\alpha$ ナ考ヘテワカル如ク, G / M_α ハ加法群トシ
テ實数群ナルノミナラズ乘法モ實数ノソレニ對應スル,
ヨウヲ

定理1. 實数ノ上ノ準順序 (結合律モ可換律モ假定シタイ)
環 G = 於テ, 單位元 1 = 對シテ條件A, 更 = 條件Bガ
ミタサレテキルナラバ, G ハアル空間ノ實函数ノ環ノキニ
同型ニ, 而モ $\rightarrow$ ノ向キ = 順序ヲ保ツチ寫像サレル。特 = G
ハ結合律及ビ可換律ヲミタス。

定理2. 更ニ條件Cモ充サレテキルナラバ, G ハ實函
数ノ環ノ部分環 = 順序ヲフクメテ (即チ西方ノ向キ = 順序ヲ
保ツテ) 同型ニナル。

ユイデ M_α ハ勿論 G ノ "normal" ナ最大いでやるデ

アルが、上記デハ最大 normal いでやる、全体ヲウゴク
コトヲ必要トシテキタイ。シカシ定理1°, 2°ニオケル空間
トシテ最大 normal いでやる、全体ヲ勿論トツテ
ヨイ、サテカ、 H 空間 M ニ弱位相ヲ入レテ、 M ヲ bi-
compact =シ、且ツ G ノ元ニ對應スル函数ガ M デ連続
トナルコトハ常套ノ通りデアアル。

Hilbert 空間ノ有界 Hermite 作用素ヘノ應用

- 實數体ヲ係數トシ單位元 e ヲ有スル環 R ヲ考ヘル。
- R ハ associative トモ commutative トモ假定シテ
イ。 R ニ準順序 $a \geq b$ ($a - b \geq 0$)ガ定義サレ
- (I) $a \geq 0, \lambda \geq 0$ + ラ $\lambda a \geq 0$
 - (II) $a \geq 0, -a \geq 0$ + ラ $a = 0$
 - (III) $a \geq 0, b \geq 0$ + ラ $a + b \geq 0, ab \geq 0$
 - (IV) $\left\{ \begin{array}{l} \text{任意ノ } a = \sum \lambda_i e_i \text{ 對シ } -\lambda e \leq a \leq \lambda e \text{ ナル如キ正} \\ \text{數 } \lambda = \lambda(a) \text{ガ定マレル。} \end{array} \right.$
 - (V) $\left\{ \begin{array}{l} \text{のるむ } \|a\| = \inf_{\lambda > 0} \{ \lambda \mid -\lambda e \leq a \leq \lambda e \} \\ \text{ノ意味デ } R \text{ハ Banach 空間ニナル。} \end{array} \right.$
 - (VI) $\left\{ \begin{array}{l} \text{上カラ押ヘラレタ單調増加列 } \{a_n\} \text{ニ對シテ} \\ \text{order-lim } a_n \text{ガ存在スル。} \end{array} \right.$

ヲ満足スルトスル。然ラバ

Spectral 定理 任意ノ $a \in R$ ニ對シテ re-
solution of the identity $\{e_\lambda\}$ ガ次ノ如ク
定マレル。

$$(i) \quad e_{\lambda}^2 = e_{\lambda} \leq e_{\mu} = e_{\mu}^2 \quad (\lambda \leq \mu)$$

$$(ii) \quad \lambda_n \downarrow \lambda \text{ + } \text{ラベ order-limit } e_{\lambda_n} = e_{\lambda},$$

$$(iii) \quad \lambda \geq \|a\| \text{ + } \text{ラベ } e_{\lambda} = e, \quad \lambda < -\|a\| \text{ + } \text{ラベ} \\ e_{\lambda} = 0$$

$$(iv) \quad \text{任意 } \varepsilon > 0 = \text{對シ}$$

$$a = \int_{-\|a\|-\varepsilon}^{\|a\|} \lambda de_{\lambda}$$

(semi-order, 意味, Riemann-Stieltjes 積分)

$$(v) \quad \{e_{\lambda}\} \text{ の (i) - (iv) = ヨリ unique = 定マル.}$$

[証明] R が (I) - (V) を満足スルカラ, 定理 2° と
良ク知ラレタ 論法 (例へば本紙第 218 号中野氏ノ談話ヲ
ミラレタイ) = ヨリ, R ハ或ル *bicomact* 空間 $\mathcal{M}$
ノ上ノ連続函数ノ全体 $R(\mathcal{M})$ ト *ring-order-isomorphic*:

$$R \ni x \longleftrightarrow x(M) \in R(\mathcal{M})$$

所デ R ハ次ノ性質 (假リ = B-性質 トデモ呼バテ) ヲモ
ツ: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b$ 且ツ *order-limit* $a_n =$
 a トスル. *Baire* ノ定理 = ヨリ $\bar{a}(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(M)$
ノ不連続点ハ *non-dense*, 且ツ $\mathcal{M}$ ノ上ニ到ル所デ定義
カラ $\bar{a}(M) \leq a(M)$. B-性質 ト呼ブノハ

$$\bigcup_M \{a(M) - \bar{a}(M) > 0\} \text{ が } \text{non-dense}$$

トコトデマル。ソノ証明ハ次ノ通り：若シアル開集合
 $U(M_0) = \text{対シテ}$, $\bar{a}(M) \wedge U(M_0)$ デ連続且ツ $U(M_0)$
 デ $a(M) > \bar{a}(M)$ トスルト, 定義 $a = \text{order-limit}$
 a_n ト $\text{isomorphism } R \leftrightarrow R(\mathcal{M})$ ト = 反スル。

次 $\mathcal{M}$ ノ上デ有界且ツ或ル連続函数 $a(M)$ ト
 $\text{non-dense set} = \text{於テ}$ ノミ異ルヤウナ函数 $a'(M)$
 ノ全体 $R'(\mathcal{M})$ ヲ考ヘル。各 $a'(M) = \text{対シテ}$ $a(M)$
 ハ唯一ツ定マリ, ス同ジ $a(M) = \text{對應スルヤウナ}$
 ヲノ函数 $\in R'(\mathcal{M}) \wedge \text{non-dense set}$ ノ上デノ
 ミ異ル。

横テ各 $a(M) \in R(\mathcal{M}) = \text{對シテ}$ $\bigcup_M \{X(M) \leq \lambda\}$ ノ特
 性函数ヲ $e'_\lambda(M)$ トスルハ

$$\lambda_n = \|a\|, \quad \varepsilon \geq \lambda_{m+1} - \lambda_m \geq 0,$$

$$\lambda_0 = -\|a\| - \varepsilon$$

ナルトキ $\mathcal{M}$ 上到ル所デ

$$-\varepsilon \leq a(M) - \sum_i \lambda_i \{e'_{\lambda_{i+1}}(M) - e'_{\lambda_i}(M)\} \leq \varepsilon$$

明カ = 各 $e'_\lambda(M) \in R'(\mathcal{M})$ デカテ, $\text{unique} = \text{定マル}$
 $e_\lambda(M) \in R(\mathcal{M})$ ヲ用ヒ上カテ

$$-\varepsilon \leq a(M) - \sum_i \lambda_i \{e_{\lambda_{i+1}}(M) - e_{\lambda_i}(M)\} \leq \varepsilon.$$

從ツテ $\text{isomorphism } R \leftrightarrow R(\mathcal{M}) = \exists \parallel R = \text{帰}$
 リ

$$-\varepsilon e \leq a - \sum_i \lambda_i (e_{\lambda_{i+1}} - e_{\lambda_i}) \leq \varepsilon e \quad (\text{以上})$$

(注意) 以上ノ様ニスレバ *Freudenthal* 流ノ議論ヲセズニ *spectral theorem*ノ証明ハ出来ル。⁽¹⁾ 上定理ノ形ヲラバ *Hilbert* 空間 H ノ有界 *Hermite* 作用素カラ生成サレタ環 R ニ應用スルノハ容易イ。實際コノ場合ハ R カ (I) — (VI)ヲ満足スルコトハ簡單ニワカルノテ都合ガヨイ。

(III)ノ中ノ $a \geq 0, b \geq 0$ ナラ $ab \geq 0$ ノ証明ハ談話 106ニ紹介シタ。蛇足ナガラ (VI)ノ簡單ニ証明ヲ *Riesz*ノ論法ヲ *modify* シテ、紹介シトカウ。

互ニ可換ナ有界 *Hermite* 作用素列ガ $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq S^{(2)}$ ヲ満足スルトキ *order-limit* T_n ノ存在ヲ云フトヨイ。所 以テノ $f \in H$ ニ對シテ $\{(T_n^2 \cdot f, f)\}$ ガ有界数列トナルカラ $\lim (T_n^2 \cdot f, f)$ ガ存在スル。
(III)ニヨリ $T_{n+k}^2 \geq T_{n+k} T_n \geq T_n^2$ ナガラ

$$\begin{aligned} \lim (T_{n+k}^2 \cdot f, f) &= \lim (T_{n+k} T_n \cdot f, f) \\ &= \lim (T_n^2 \cdot f, f) \end{aligned}$$

$$\text{從テ } \lim ((T_n - T_m)^2 \cdot f, f) = \lim \|T_n \cdot f - T_m \cdot f\|^2 = 0.$$

4) 中野氏ニ「点函数トシテノ表現」カラ「集合函数トシテノ表現」ヲ導カレタコトガアル旨御手紙ヲ頂イタ。吾々ノ問題トシタノハ導ク可能性デハナク導キ方デアル積リナデアルケレドモ、コウ書イテキテミルト餘リ巧イトモ思ヘナイ。諸兄ノ御高教ヲ仰グ次第デス。尚ホ種々御注意ヲ頂イタ中野氏ニ厚ク感謝致シマス。

故 = $\text{strong-limit } T_n \cdot f = T \cdot f$ が存在スル。 $T = \text{order-limit } T_n$ ナルコトハ明カ。

序デナガラ上ノ論デ *unitary* 或ヒハ尚一般ニ *normal operator* が扱ヘルコトヲ注意シトキタイ。

Vector 束ト *semi-ordered ring* トノ
equivalence ⁽¹⁾

嘗テ筆者ノ一人モ此ノ問題ヲ考ヘタコトガアルガ、
Riesz ノ方法デ *vector* 束ヲ *ring* = 直シタトキ
associative law ノ証明デユキツマツタ。コノ点
ハ *associative law* ヲ假定シナイ ∇ - K - T ノ
定理ヲ (*Gelfand* ノ定理ノ成リニ) 使フコトニヨリ款
ハレル譯デアラウ。

最後ニオ記ビシナケレバナラナイノハ筆者ノ一人ガ
談話 1061 = 紹介シタ積リノ ∇ - K - T ノ定理ノ証明ハ
「*original* ノ改悪」デアリテ所重大ナ誤リガアリ
マシタ。

(本談話ノ如クスレバヨイ譯デアアリマスガ)

惜テソレハ何所ガ思カッタカト云ヒマス *simple*
即チ *convex, non-trivial, two-sided*
ideal ヲ含マナイ *semi-ordered ring* R with
unit e ガ *Archimedean* ト云フ所ノ証明デア
リマス。

(1) 本紙第 227 号河田氏談話ヲ参照セラレタイ。

$$(*) \text{ order-limit } \frac{1}{n} e = 0$$

デナイトシテ矛盾ヲ出ス、=

$$(**) e > nb \quad (n=1, 2, \dots), b > 0$$

カラ不台理ヲ導イタノデアリマシタガ、 R が *lattice* 卜
赤ダツカッテキタイノダカラ $(*)$ ヲ否定シテモバズシモ

$(**)$ が出タイカラデス。