



Title	或種ノ束ノ間ノ結準同型束ニツイテ
Author(s)	岩村, 聯
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 243, p. 1322-1333
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75006
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1094. 或種ノ束ノ間ノ結準同型束ニツイテ

岩 村 聯 (東京)

§1. 補助定理 $f, g, \dots$ ノ元トスル束 $\mathcal{L}$ ノ部分
集合 K ガ條件.

$$(K) \begin{cases} \text{スベテノ } f \in \mathcal{L} = \text{對シテ, } f \geq h \in K \text{ ナル最大ノ} \\ h \text{ ガ存在シ, ソレヲ } f^\circ \text{ トスルトキ} \\ (f \vee g)^\circ = f^\circ \vee g^\circ \end{cases}$$

ヲ満足スレバ, K ハ $\mathcal{L}$ = 準同型ト束 (K , 半順序ハ $\mathcal{L}$,
半順序ト一致スル) ヲナス. 尚ホ, $(f \vee g)^\circ = f^\circ \vee g^\circ + \nu$

性質ヲ有スル對應。ヲ結準同型ト言フコトニシマス。

証明 K ノ一般元ハ f° ナル形ヲ表ハサレマス。今 $K =$
於ケル operation $\vee, \wedge$ 7

$$f^\circ \vee g^\circ = f^\circ \vee g^\circ, \quad f^\circ \wedge g^\circ = (f^\circ \wedge g^\circ)^\circ$$

ト定メルト, $f^\circ \vee g^\circ \in K \Rightarrow f^\circ \wedge g^\circ$ トナリ, 明カニ $\vee, \wedge$
ガ $K =$ 於ケル結ビ及ビ交リトナッテキマス。○ガ L カ
ラ K へノ準同型ヲ與ヘルコトヲ示セバヨイ。所ガ $(K) =$
ヨッテ, ○ガ結準同型デアールコトガワカッテキマスカラ, 証
明スルコトハ。

$$(f \wedge g)^\circ = f^\circ \wedge g^\circ$$

ナテ f° ノ定義カラ

$$f \geq f^\circ; \quad f \geq g \rightarrow f^\circ \geq g^\circ; \quad f^\circ = f^{\circ\circ}$$

從ツテ $f^\circ \wedge g^\circ \geq (f \wedge g)^\circ$ トナッテ

$$(f \wedge g)^\circ \geq (f^\circ \wedge g^\circ)^\circ \geq (f \wedge g)^{\circ\circ} = (f \wedge g)^\circ$$

$$\text{故ニ} \quad (f \wedge g)^\circ = (f^\circ \wedge g^\circ)^\circ = f^\circ \wedge g^\circ$$

— 証明終リ —

從ツテ L ガ distributive デアッタリ modular
デアッタリスレバ K ニ同様ノ性質ヲ持ツワケマス。

次ニ L, L' 7 束 $(\vee, \wedge, \leq)$ トシ, ソレヲノ元ヲ $a, b,$
-----, $x, y,$ -----; トシマス。 L 全体ヲ L' ノ中ニ寫ス
單調増大函數ノ全体ヲ L'^L ヲ $f, g,$ ----- トシ, $x \in L =$ 於
ケル f ノ値ヲ fx トシマス: $x \leq y \rightarrow fx \leq fy$. 今 f, g
 $\in L'^L =$ 對シ

$$f \leq g \Leftrightarrow [x \in L \rightarrow fx \leq gx]$$

= ヨツテ半順序 $\leq$ を定メルト, L'^L ハ束トナツテ

$$(f \vee g)x = fx \vee gx, (f \wedge g)x = fx \wedge gx$$

L'^L が modular, distributive, $\uparrow$ continuous
(即チ $f \uparrow f_0$ ナラバ $f \wedge g \uparrow f_0 \wedge g$) スハ $\downarrow$ continuous デ
アレタメノ完全條件ハ L' が夫々此ノ性質ヲ有スルコトデア
ル。コレハ殆ンド明カデスカラ一々証明ハシマセン。

今 $\mathcal{L} = L'^L$ トシテ, 補助定理ノ條件 (K) が成立スル
マウナ K ヲ取レバ, 上ニ述ベタユトニヨツテ, L' が dis-
tributive スハ modular ナラバ K が distributive
スハ modular トナルコトケデス。^(註) 又, L' が完全束ナラバ
K が完全束デアルコトモ容易ニワカリマス。此ノ場合 L 及
ビ L' ニアル條件ヲ與ヘレバ, K トシテ, L オラ L' ノ中
ヘノ結準同型ノ全体ヲ取ルコトが出来ルトイフコトガコノ談話
ノ要旨デス。

§ 2. コノ § デハ descending chain condition

(D. C. ト略記) ヲ満足スル分配束 L カラ任意ノ束 L' ノ中ヘ
ノ結準同型ノ全体ヲ $\mathcal{K}$ トシ $\mathcal{L} = L'^L$ トスルトキ, コノ $\mathcal{K}$ が
補助定理ノ條件 (K) ヲ満足スルコトヲ証明シマス。コレガ
証明サレレバ D. C. ヲ満足スル分配束カラ, 分配束 L' ノ
中ヘノ結準同型ノ全体ガ分配束トナルコトガワカルコトニ
ナリマス。

(註) 一般ニ $L' = \mathcal{L}$ ニ於ケル束恒等式ハスベテ $\mathcal{K}$ デ成立スル。

L へ上記ノヤウナ束トシ, $\cup$ ノ空デナイ有限部分集合ヲ
 $A, B, \dots$ ト記シ, $\bigvee_{x \in A} x = \bigvee_{x \in A} x$ ナル $b \in A$ ノ無駄トイヒ,

$a = \bigvee_{x \in A} x$ ナルトキ A ヲ a ノ (結) 分解トイフコトニシマス.

a ノ分解ガ必ず a ヲ含ムトキ, a ヲ結既約或ハ単ニ既約ト言ヒ, a ノ分解 A ガ無駄ヲ含マズ, 且ツ $\cup$ ノ元ガスベテ既約デアルトキ, A ヲ a ノ既約 (結) 分解トイフコトニシマス.

A, B ガ夫々 a, b ノ分解デアルトキ $A \cup B$ (A, B ノ和集合) ハ $a \vee b$ ノ分解トナリマス.

$x \in A$ ガ a ノ既約分解, B ガ b ノ分解デアルトキ,
 $a \leq b$ ナラバ, スベテノ $x \in A$ ニ對シテ $x \leq y \in B$ ナル y ガ存在シマス.

ソレハ, $X = (x \wedge y; y \in B)$ トスルニ $x \leq a \leq b$ ナスカラ

$$\bigvee_{z \in X} z = \bigvee_{y \in B} (x \wedge y) = x \wedge \left(\bigvee_{y \in B} y \right) = x \wedge b = x$$

トナツテ, X ハ x ノ分解トナリマス. x ハ既約デスカラ
 $x \in X$, 即チ $x = x \wedge y$, $y \in B$ ナル y ガ存在スルコトニナルヲケマス.

今任意ノ $f \in L^0$ ニ對シテ f^0 ヲ

$$f^0 a = \bigvee_{x \in A} f x \quad (A \text{ ハ } a \text{ ノ既約分解})$$

ニヨツテ定義シマス。スベテノ $a \in L$ = 對シテ a ノ既約分解ハ一意的ニ存在シマス。(Birkhoff: Lattice theory, Theorem 5.12 参照。既約元ノ定義が少し違ヒマスが結局此処デ下シタ定義ト同ジモノナリマス。但レユノ Theorem, 双對) カラ, f° ハ f = 對シテ一意的ニ定マリマス。上ニ述ベタコトカラ, $a \leq b \rightarrow f^\circ a \leq f^\circ b$ トナリマスカラ $f^\circ \in L'^L$

コノ f° ガ, $f \geq h \in K$ + レ h ノ最大 + ε ノデアレコトヲ次ノヌウニシテ知レコトが出来マス。

a, b ノ既約分解ヲ夫々 A, B トシ $a \vee b$ ノ既約分解ヲ C トシマス。 $A \cup B$ ハ $a \vee b$ ノ分解デスカラ, スベテノ $x \in C$ = 對シテ, $x \leq y \in A \cup B$ + レ y ガ存在シマス。

從ツテ

$$f^\circ(a \vee b) = \bigvee_{x \in C} f x \leq \bigvee_{x \in A \cup B} f x = \left(\bigvee_{x \in A} f x \right) \vee \left(\bigvee_{x \in B} f x \right) = f^\circ a \vee f^\circ b$$

即チ $f^\circ(a \vee b) \leq f^\circ a \vee f^\circ b$. 一方 $f^\circ \in L'^L$ デスカラ

$$f^\circ(a \vee b) \geq f^\circ a \vee f^\circ b$$

$$\text{故ニ} \quad f^\circ(a \vee b) = f^\circ a \vee f^\circ b$$

トナツテ $f^\circ \in K$ トナリマス。

次ニ $f \geq h \in K$ トシ, A ヲ a ノ既約分解トスレバ

$$f^\circ a = \bigvee_{x \in A} f x \geq \bigvee_{x \in A} h x = h \left(\bigvee_{x \in A} x \right) = h a$$

即チ $f^\circ \geq h$.

以上で f^0 は, $f \geq h \in K$ かつ h の最大元である
 コトがわかりました。残りの $(f \vee g)^0 = f^0 \vee g^0$ の証明が
 すが $A \neq \emptyset$ の既約分解トスルト

$$\begin{aligned} (f \vee g)^0 a &= \bigvee_{x \in A} (f \vee g)x = \bigvee_{x \in A} (fx \vee gx) \\ &= \left(\bigvee_{x \in A} fx \right) \vee \left(\bigvee_{x \in A} gx \right) = f^0 a \vee g^0 a \end{aligned}$$

で, コレが成立します。

以上で $\mathcal{C}$ の目標に達せられました。次, $\mathcal{S}$ で $\mathcal{L}$
 へ一般の分配束トシテ, $\mathcal{L}'$ を $\downarrow$ continuous トシタ場合
 を目標トします。

§3. 束 $\mathcal{L}$ の空デナイ部分集合 D が $\bigvee_{x \in D} x$ の存在スル
 (ソレが D の元であるコトを要シナイ) 元ノニサイテ, $y \in \mathcal{L}$
 ノトキ,

$$i) \bigvee_{x \in D} x \geq y \text{ ならば } D \wedge y = (x \wedge y; x \in D)$$

$$ii) \text{ 其ノ他ノトキハ } D \wedge y = \{y\}$$

ニヨツテ $D \wedge y$ ノ定メマス。

例ハ $\mathcal{L}$ ノ空デナイ部分集合ノ空デナイ集合デ, スベテ
 $D \in \mathcal{A}$ トスベテノ $y \in \mathcal{L}$ ニ對シテ,

$$1) \bigvee_{x \in D} x \text{ が存在スル。}$$

$$2) D \wedge y \in \mathcal{A}$$

$$3) \quad y = \bigvee_{u \in D \wedge y} u$$

がアルヤウナミノトシマス。

あハミベテノ $\{y\}$ ($y \in L$)ヲ含ミマスガ、コノ *trivial* ナミ以外ニ如何ナルミノガ ϕ ニ含マレ得ルカハ L ノ性質ニヨリマス。

例1. L ガ分配束ナラズベテノ $\{x, y\}$ 型ノ部分集合ヲ以テ ϕ ヲ作ルコトが出来ル。

例2. L ガ完全束デアッテ $\uparrow$ continuous (即チ $x \uparrow x_0$ ナラバ $x \wedge y \uparrow x_0 \wedge y$) ナラバ、 L ノ空デナイ部分集合ヲ全順序ニツイタミノ全体ヲ ϕ トシテヨイ。

例3. 上例ニ更ニ L ガ分配束デアッレトイフ條件ガアレバ、 L ノ空デナイ部分集合全体ヲ ϕ トスルコトが出来マス。

此ノ他、條件附ノ完全性 (即チ有界ノ部分集合ニ對シテ必ず結ビヤ交ハリが存在スル) トカ、可附番的ニ完全デアッル (即チ可附番部分集合ニ對シテハ結ビヤ交ハリが存在スル) トイフヤウナ條件ヲ例2ノ完全性ノ代リニ入レルト大々異ル ϕ ガ作ラレマス。

$$\text{最後ニ、} D \in \phi \rightarrow f\left(\bigvee_{x \in D} x\right) = \bigvee_{x \in D} f x \text{ ナルコトヲ「} f \text{ハ}$$

ϕ ニツイテ結ビヲ保存スル」トイフコトニシマス。

§4. 定理. L' が完全束で, $\downarrow$ continuous (即ち $x \downarrow x_0$ ならば $x \vee y \downarrow x_0 \vee y$) ならば, $\mathcal{O} = \text{ツイテ結ビヲ保存スル } f \in \mathcal{L} = L'^L$! 全体 $\mathcal{K}$ トスルトキ, $\mathcal{K}$ ハ補助定理ノ条件 (K) ヲ満足シ, 従ッテ $\mathcal{L} = \text{準同型ト束ヲナス}$.

証明. $f \in L'^L$, $D \in \mathcal{O}$ トシマス $D \wedge y$ ノ定義カラ

$$fy \geq \bigvee_{u \in D \wedge y} fu$$

デアルコトハ明カデスガ, 更ニ

$$y \leq z \rightarrow \bigvee_{u \in D \wedge y} fu \leq \bigvee_{v \in D \wedge z} fv$$

デアルコトが知レマス。

$$\left[\begin{array}{l} z \leq \bigvee_{x \in D} x \text{ トキハ } y \leq \bigvee_{x \in D} x \text{ デ} \\ \bigvee_{u \in D \wedge y} fu = \bigvee_{x \in D} f(x \wedge y) \leq \bigvee_{x \in D} f(x \wedge z) = \bigvee_{u \in D \wedge z} fu. \\ y \leq \bigvee_{x \in D} x, \text{ 然レバ } \bigvee_{x \in D} x \text{ トキハ} \\ \bigvee_{u \in D \wedge y} fu \leq fy \leq fz = \bigvee_{v \in D \wedge z} fv. \\ y \not\leq \bigvee_{x \in D} x, \text{ トキハ } \bigvee_{x \in D} x \text{ デ} \\ \bigvee_{u \in D \wedge y} fu = fy \leq fz = \bigvee_{v \in D \wedge z} fv. \end{array} \right]$$

$\forall D \in \mathcal{K} \quad Df \text{ ヲ } (Df)y = \bigvee_{u \in D \wedge y} fu = \text{ヨッテ定メルト}$
 $f \geq Df \in \mathcal{L} = L'^L$ トナルヲデスガ, 更ニ

$$\begin{aligned}
 (D(f^{\vee}g))y &= \bigvee_{u \in D \wedge y} (f^{\vee}g)u = \bigvee_{u \in D \wedge y} (fu^{\vee}gu) \\
 &= (\bigvee_u fu)^{\vee} (\bigvee_u gu) = (Df)y^{\vee} (Dg)y
 \end{aligned}$$

トナリマスカラ, D が additive operator トナリマスカラ:

$$D(f^{\vee}g) = Df^{\vee}Dg.$$

コレカラ直チ =

$$f \geq g \rightarrow Df \geq Dg.$$

ス, $h \in K$ トスル, 即チ h が $\mathcal{B}$ = ツイテ結ビテ保存スルトシマスト, $D \wedge y \in \mathcal{B}$ デスカラ

$$h(\bigvee_{u \in D \wedge y} u) = \bigvee_{u \in D \wedge y} hu.$$

$$\text{従ッテ } hy = (Dh)y.$$

$$\text{即チ } h \in K \rightarrow h = Dh,$$

$$\text{従ッテ } f \geq h \in K \rightarrow Df \geq h.$$

今 $\mathcal{B}$ / 元全体ヲ整列シテ $D_0, D_1, \dots, D_\xi, \dots; \xi < \varphi$ トシマス. 任意ノ順序数 η ハ $\eta = \varphi \zeta + \xi$, $\xi < \varphi + 1$ 形ニ書カレテ, ξ ハ一意的ニ定マリマスカラ, コノ ξ = 対シテ $D_\eta = D_\xi$ ト定メマス. 従ッテ任意ノ順序数 η ト任意ノ $D \in \mathcal{B}$ = 対シテ, $D = D_\eta$, $\bar{\eta} \leq \eta + 1$ η が存在スルコト = ナリマス.

サテ, 超限帰納法 = ヨッテ f_η ヲ

$$0) \quad f_0 = f$$

$$\eta+1) \quad f_{\eta+1} = D_{\eta} f_{\eta}$$

$$\lambda) \quad f_{\lambda} = \bigwedge_{\eta < \lambda} f_{\eta} \quad (\lambda \text{ は極限数})$$

ト定メマス。従ツテ

$$f = f_0 \geq f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_{\eta} \geq f_{\eta+1} \geq \dots$$

ソシテ、超限帰納法ヲ容易ニ次ノコトガ分リマス。

$$f \geq h \in K \text{ 十テ、任意ノ } \eta \text{ ニ對シテ } f_{\eta} \geq h.$$

次ニ任意ノ η ニ對シテ $(f \vee g)_{\eta} = f_{\eta} \vee g_{\eta}$ ナルコト
が超限帰納法ヲ証明サレマス。

$$0) \quad (f \vee g)_0 = f_0 \vee g_0 \text{ 八 trivial}$$

$$\eta+1) \quad (f \vee g)_{\eta} = f_{\eta} \vee g_{\eta} \text{ 十テバ、}$$

$$\begin{aligned} (f \vee g)_{\eta+1} &= D_{\eta} (f \vee g)_{\eta} = D_{\eta} (f_{\eta} \vee g_{\eta}) \\ &= D_{\eta} f_{\eta} \vee D_{\eta} g_{\eta} = f_{\eta+1} \vee g_{\eta+1} \end{aligned}$$

λ スヰテ、 $\eta < \lambda$ ニ對シテ $(f \vee g)_{\eta} = f_{\eta} \vee g_{\eta}$ ナラツタ
トシマス。

L' が $\downarrow$ continuous ナスカラ、 $L = L'^L$ 亦 $\downarrow$ con-
tinuous. ソシテ $f_{\eta} \downarrow f_{\lambda}$, $g_{\eta} \downarrow g_{\lambda}$ ナスカラ $f_{\eta} \vee g_{\eta} \downarrow f_{\lambda} \vee g_{\lambda}$
($\downarrow$ continuity カラ此ノ結論ガ出ルコトハ、例ヘバ

Birkhoff: Lattice theory p. 30. 別ニ参照スル
程ノ事ニアリマセンガ)。ソコデ $(f \vee g)_{\eta} \downarrow f_{\lambda} \vee g_{\lambda}$, 所ガ
 $(f \vee g)_{\eta} \downarrow (f \vee g)_{\lambda}$ ナスカラ $(f \vee g)_{\lambda} = f_{\lambda} \vee g_{\lambda}$.

従ツテスヰテノ η ニ對シテ

$$(f \vee g)_\eta = f_\eta \vee g_\eta.$$

サテ $f_0 \geq f_1 \geq \dots \geq f_\eta \geq f_{\eta+1} \geq \dots$ 1列、中 $\eta > 1$ 成立スル箇所ハ $L^{\mathbb{N}}$ ノ濃度ヨリ多クハアリマセンカラ、或ル $\bar{\eta} = \eta$ イテハ

$$(*) \quad \bar{\eta} \leq \eta \quad \text{トナバ} \quad f_\eta = f_{\bar{\eta}}$$

トナリマス。任意ノ $D \in \mathcal{S}$ ニ對シテ、 $D = D_\eta$ 、 $\bar{\eta} \leq \eta$ ナル η ヲ取ツテ見レバ、 $(*)$ カラ直チニ

$$D f_{\bar{\eta}} = f_{\bar{\eta}}$$

カ得ラレマス。 $y = \bigvee_{x \in D} x$ ノスト、 $D \wedge y = D$ デスカラ、上式カラ次ノ式カ得ラレマス。

$$\bigvee_{x \in D} f_{\bar{\eta}} x = (D f_{\bar{\eta}}) y = f_{\bar{\eta}} y = f_{\bar{\eta}} \left(\bigvee_{x \in D} x \right)$$

$D (\in \mathcal{S})$ ハ任意デシタカラ、上ノ式ニヨツテ、 $f_{\bar{\eta}} \in K$ 前ニ述ベヌシタ様ニ、 $f \geq h \in K$ ナラ $f_{\bar{\eta}} \geq h$ ナデスカラ、 $f_{\bar{\eta}}$ ハコノヌクナ h ノ中デ最大トモノトナリマス。

ソコデ $f_{\bar{\eta}}$ ヲ f° ト記シマス。

$(*)$ ノ譯ナ $\bar{\eta}$ ガーツ與ヘラレレバ、任意ノ $\bar{\eta}' \geq \bar{\eta} =$ 對シテ $f_{\bar{\eta}'} = f_{\bar{\eta}} = f^\circ$ デスカラ、今 $f, g, f \vee g =$ 對シテ 大ニ $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{\eta}_3$ ガ $(*)$ ヲ成立サセルトスルトキ、各々ノ $\bar{\eta}_i$ ヲ $\bar{\eta} = \bar{\eta}_1 + \bar{\eta}_2 + \bar{\eta}_3$ デ置キ換ヘテモヨロシイ、即チ

$$(f \vee g)^\circ = (f \vee g)_{\bar{\eta}} = f_{\bar{\eta}} \vee g_{\bar{\eta}} = f^\circ \vee g^\circ$$

コレヲ條件 (K) が成立スルコトがワカタリケ
ス。

§5. 今 §4 の定理ヲ §3 の各例ニ適用シテ見
ス。

L' は $\downarrow$ continuous + 完全束トシテ。

例1. L が分配束ノトキ, ϕ は Γ 型ノ $\{x, y\}$ 型ノ L
ノ部分集合ノ集合トシテ, K は L から L' ノ中へノ結準同型
全体ヲ取ツタコトニナリマス。

例2. L が $\uparrow$ continuous + 完全束, ϕ は L ノ
空デナイ全順序部分集合ノ全体トシテ, K は L から L' ノ中へノ結準同型
像 $f \in L'$

「 $x \uparrow x_0$ ナラバ $fx \uparrow fx_0$ 」

ノ全体トナリマス。

例3. L が $\uparrow$ continuous + 分配完全束, ϕ は L ノ空デ
ナイ部分集合ノ全体トシテ, K は L から L' ノ中へノ結準同型
無限個ノ元ノ結ビヲモ保持スルモノノ全体トナリマス。

ソコデ例へバ L' が分配束デアルトスレバ, コレヲノ K が
何レモ分配束トナルコトハ §1 デ述べタ通りデス。