1076. 有限階ノベクトル束ニツイテ

栗田　稔（八高）

小山　正（名大）

Birkhoff ノ Lattice theory ノ本ノ巻末ノ unsolved problems ノ (6), スナハチ有限階ノべくとる束ノ型ヲスッカリキメルトイフ問題ヲ解決シテミタイト思ヒマス。同書以後ノべくとる束ノ理論ノ発展、特ニ Lorenzen-Clifford ノ定理等カラ見レバ今トナッテハ容易ナ問題トイフベキカモ知レマセンガ、トモカク書イテ見マス。答ハ、同書ノ120頁ニモ予想シテアリマスヤウニ直和ト辞書式ノ組合セデ順次實數群カラ組立テラレルコトデアリマス。

示シタイヘバ，先ヅ二ツノべくとる束 ∇_1, ∇_2 カラ直和トシテ一ツノべくとる束ガ得ラレル. コレヲ

$$\nabla_1 + \nabla_2$$

デ表ハス. マタ特ニ ∇_1 ガ線型順序ヲモツ場合ニハ (a_1, a_2) $(a_1 \in \nabla_1, a_2 \in \nabla_2)$ ナル組ノ間ノ順序ヲイハユル辞書式ニ $(a_1, a_2) > (b_1, b_2)$ トハ $a_1 > b_1$ デアルカ, 又ハ $a_1 = b_1$, $a_2 > b_2$ デアルコトトシテ矢張リ一ツノべくとる束ヲ得ル. コレヲ仮ニ

$$\nabla_1 \otimes \nabla_2$$

デアラハストシヨウ. マタ実数ノナスべくとる束ヲRデ表ハサウ. シカラバ任意ノ有限次元(階)ノべくとる束 ∇ ハソレヨリ低イ次元ノべくとる束 ∇_1, ∇_2 カラ直和トシテ

$$\nabla = \nabla_1 + \nabla_2$$

トシテ得ラレルカ, マタハヤハリ低イ次元ノ ∇_1 カラ

$$\nabla = R \otimes \nabla_1$$

トシテ得ラレル. コレデ順次ニ有限階べくとる束ノ型ガスッカリキマルワケデアル.

証明: ∇ ヲ有限次元べくとる束トスル. Lorenzen-Clifford ノ定理ニヨリ ∇ ハイクツカノ線型順序ノべくとる束 L_σ ノ直和ノ中ニ束算法モ含メテ同型ニ写像サレル. ∇ ガ有限次元ダカラコノ際有限個デ足リル. マタ L_σ モ有限次元デアルトシテヨイ.

$$\nabla \subseteq L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$

各L_iハ有限次元ノ線型べくとる束トシテ$R\otimes R\otimes \cdots \otimes R$ナル形ヲモツ。今$L_0 = R\times R\times \cdots \times R$ (l_i個) トスル。即チL_iハ$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{l_i})$ノ全体デアリ、コヽニ辞書式ニ順序ガツイテオル。

$x\in\nabla$, L_iー成分ヲ

$$x_i = (\alpha_{i1}(x), \alpha_{i2}(x), \cdots, \alpha_{il_i}(x))$$

デ表ハサウ。コヽニxガ∇ヲウゴクトキx_iハL_iノ全体ヲワタルトシテ一般性ヲ失ハナイ。

補題1. $i\neq j$トスル。而シテ

(§) $\alpha_{i1}(x)>0,\quad \alpha_{j1}(x)<0$

ナル事ガナイトスル(コレハ$-x$ヲ考ヘレバワカル様ニ<0, >0ガオコラナイトイフニ同等)。シカラバ

(※) $\alpha_{i1}(x)>0,\quad \alpha_{j1}(x)=0$

ナルコトモナイ。

証明: 假ニ(※)ナルxガアルトスル。x_jハL_j全体ヲウゴクカラ、$\alpha_{j1}(y)<0$ナル$y\in\nabla$ガアル。必要ナラバ適當ナ倍數αyヲ考ヘレバワカル如ク、コヽニ$|\alpha_{i1}(y)|<\alpha_{i1}(x)$ト假定シテカマハナイ。然ラバ

$$\alpha_{i1}(x+y)>0,\quad \alpha_{j1}(x+y)<0$$

トナッテ矛盾。

定義 i, jニ於テ(§)ナルxガ(従ッテ(※)ナルx

モ)存在シナイトキ番号 i ト j ハ関連スルトヨブコトニシヨウ。

コノ関係ハ同値律ヲミタス。

補題2. i ト j ガ関連スルトスル. 然ラバ $\alpha_{i1}(x)/\alpha_{j1}(x)$ ハ x ニ無関係ニ一定デアル(不定形 0/0 ノ場合ヲノゾク)

証明: $\alpha_{i1}(x)\alpha_{j1}(y)-\alpha_{i1}(y)\alpha_{j1}(x)>0$ デアルトスル。

而シテ $\alpha_{i1}(x)>0$ トスル. 然ラバ

$$z=(\alpha_{j1}(y)-\varepsilon)x-\alpha_{j1}(x)y$$

ニ於テ $\varepsilon>0$ ガ充分小ナラバ $\alpha_{i1}(z)>0$, $\alpha_{j1}(z)<0$ トナッテ矛盾

サテ

Case I. スベテ, $1, 2, \cdots\cdots, n$ ガ互ニ関連シテ井ル場合:

コノ場合スベテノ $\alpha_{i1}(x)$ ハ同時ニ $=0$ デアル. 今 $\alpha_{11}(x)$, シタガッテスベテノ $\alpha_{i1}(x)$ ガ 0 ナル x ノ全体ヲ ∇_1 トスル. ∇_1 ハ normal subspace ヲナシ, $\alpha_{11}(x)\neq 0$ ニ對シテハ

$$\alpha_{11}(x):\alpha_{21}(x):\cdots\cdots:\alpha_{n1}(x)$$

ガ一定ナルコトカラ ∇/∇_1 ハ実数群 R デアル. 而シテ $\alpha_{11}(x)>0$ ナラバ $x>0$. コレヨリ

$$\nabla=R\otimes\nabla_1$$

デアル。

<u>Case II</u>. 互ニ関連シナイ二番号ガアルトキ。

コノトキ, $1, 2, \cdots\cdots, r$ ガ互ニ関連シ, $r+1$, $r+2$, $\cdots\cdots$, n ガソレラニ関連シナイト假定スル。i ヲ $r+1$, $\cdots\cdots$, n ノドレカトスレバ

$$\alpha_{11}(x) > 0, \cdots\cdots, \alpha_{r1}(x) > 0, \quad \alpha_{i1}(x) \leqq 0$$

ナル x ガアル。ソノ一ツヲ $x^{(i)}$ トスル。$y = x^{(r+1)} \frown \cdots\cdots \frown x^{(n)}$ トオケバ

$$\alpha_{11}(x) > 0, \cdots\cdots, \alpha_{r1}(y) > 0,$$

$$\alpha_{r+1,1}(y) \leqq 0, \cdots\cdots, \alpha_{n1}(y) \leqq 0$$

デアル。更ニ $Z = y \smile 0$ トスレバ

$$\alpha_{11}(Z) > 0, \cdots\cdots, \alpha_{r1}(Z) > 0,$$

$$\alpha_{r+1,1}(Z) = \cdots\cdots = \alpha_{n1}(Z) = 0$$

デアル。類似ノ論法ニヨリ

$$\alpha_{11}(w) = \cdots\cdots = \alpha_{r1}(w) = 0,$$

$$\alpha_{r+1,1}(w) > 0, \cdots\cdots, \alpha_{n1}(w) > 0$$

ナル w ガアル。

然ラバ ∇ ノ任意ノ元 v ニ對シテ α ヲ充分大ニトレバ $v' = -\alpha Z \smile (v \frown \alpha Z)$ ハ v ト $L_1, \cdots\cdots, L_r$ 成分ガ同ジデ $L_{r+1}, \cdots\cdots, L_n$ 成分ガスベテ 0, $v'' = -\alpha w \smile (v \frown \alpha w)$ ハ丁度ソノ反對ノ關係ニナッテヰル。シカシテ $v = v' + v''$ デアル。

ヨッテ $L_{r+1}, \cdots\cdots, L_n$ 成分ガ 0 ナル元ノ全体ヲ ∇' ト

シ，$L_1, \cdots\cdots, L_r$ 成分ガソカルノヲ ∇'' トスレバ群トシテ $\nabla = \nabla' + \nabla''$ トナルガ，$v \geqq 0$ ナルタメニハ $v' \geqq 0$, $v'' \geqq 0$ ガ必要且ツ充分ナコト明カダカラ べくとる束ノ意味デ

$$\nabla = \nabla' + \nabla''$$

トナル。

—— 証明終 ——

ナホ，2次元（コレハ簡単）及ビ3次元ノ場合ハ正元ノナス cone ノ形ヲ幾何學的ニ分析スルコトニヨッテモ同ジ結果ガ得ラレル。同様ノ方法デ一般ノn次元モ行クカモ知レナイガ，大分面倒ニナッテヨクワカラナイ。

—— 以 上 ——

（西大 23 6 8）