



Title	Markoff 過程ヲ定メル微分方程式
Author(s)	伊藤, 清
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 244, p. 1352-1400
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/75009">https://doi.org/10.18910/75009</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

# 1077. markoff 過程ヲ定ムル微分方程式

伊藤 清(内閣統計局)

## ハシガキ

(I) 有限個ノ可能ナ場合  $a_1, a_2, \dots, a_m$  ヲ有シ, 自然数ヲ徑数トスル *simple markoff process*  $x_1, x_2, \dots$  = 関シテ 多クノ遷移確率ヲ考ヘルユトが出来ル。例ヘバ  $x_k = a_i$  ナル條件ノ下ニ於ケル  $x_{k+1} = a_j$  ノ確率、或ハ  $x_1 = a_{i_1}, x_2 = a_{i_2}, \dots, x_n = a_{i_n}$  ナル條件ノ下ニ於ケル  $x_{n+1} = a_{i_{n+1}}$  トナル確率等々。シカシ乍ラソレ等ハ結局  $x_k = a_i$  ノ時ノ  $x_{k+1} = a_j$  ナル確率  $p_{ij}^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, i, j = 1, 2, \dots, m$ ) = 帰着セラレル。コレハ Kolmogoroff ノ本<sup>(\*)</sup> = モ書イテアル。以後コレヲ基本的ナ遷移確率ト呼バウ。

更ニ可能ナ場合ガ有限デナクモ、例ヘバ実数ヲ以テ標識ツケラレル時ニハ、同じコトガイヘルノハ云フマデモナイ。

併シナガラ係數ガ自然數デナクテ 實數ノ場合即チ *continuous parameter* = 依存スル *markoff process* = 於テ、上ノユトハ如何ニナルカトイフコトハソレ程簡單デハナイ。<sup>(\*)2</sup>

更ニ一般ニ可能ナ場合ガ実數ニヨリ標識付ケラレ、且ツ *continuous parameter* = 依存スル *simple markoff*

process = 於テ、上ノ  $p_{ij}^{(k)}$  = 相當スルモノヲ考ヘ、逆 =  
之レヲ與ヘテ、モトノ Markoff process ヲ定メルトイフ  
コトハ、Kolmogoroff<sup>(\*)3)</sup> = コツテ体系的ナ研究ガ創メ  
ラレ、ソレハ結局遷移確率函数 = 關スル differential  
equation 或ハ integro-differential equation  
ノ研究 = 帰着セシメラレタ。

W. Feller<sup>(\*)4)</sup> ガコレヲノ方程式ガ唯一ツノ解ヲ有シ、  
而モソノ解ガ遷移確率函数ノ性質ヲモツテキルコトヲカナリ  
強イ條件ノ下ニ証明シテキル。

併シナガラ確率過程ノ研究 = 對シテ Doob<sup>(5)</sup> ガトツタ  
マウナ嚴格ナ態度ヲ持スルトスレバ、コノ Fellerノ研究モ  
些カ不充分ナ點ガアルマウ = 思ハレル。例ヘバソノ §3 = 於  
テ連続ナ確率過程ノ遷移確率函数ヲ定メル微分方程式ガ解カ  
レテキルガ、ソノ解ヲ以テ“連続”函数空間 = 確率ヲ導入ス  
ルコトノ可能性ノ証明ガ不足シテ居ルマウ = 思ハレル。

本稿ノ目的ハ I. 問題ノ Formulierung ヲ明確ニスル  
コト。 II. 連続ナ確率過程ノ存在証明ヲ Doobノマウナ意味  
ガ嚴密ニスルコトデアル。

II. 注意 —  $x$ ヲ実確率変數トスル時、 $x$ ニ關スル命題  
ハ結局“ $x \in E$ ” ( $E$ ハ  $R^1$ ノ部分集合)ナル形ヲ表ハサレ  
ル。

故ニ  $x^{-1}(E)$ ガ  $P$ -可測デアレバ“ $x \in E$ ”ナル命題  
ヲ考ヘルコトガ意味ガアル。又  $x \sim x'$  即チ  $P(x \neq x') = 0$

デアル場合  $\wedge (x \in E) \vee (x' \in E) \vee$  symmetric difference の  $P$ -measure は 0 デアルカラ "  $x \in E$  " ナル命題ハ " 許サレル " (\*6) 概念構成デアル。

次  $x, y$  ナルニツノ実確率変数ガアル時、 $x$  ト  $y$  トニ関スル命題ハ結局 "  $x$  ト  $y$  トノ結合変数  $(x, y)$  ガ  $R^2$  ノ或ル部分集合ニ入ル " トイフ風ニアラハサレル。例ヘバ "  $x < y$  " ハ "  $(x, y) \in F \{(\lambda, \mu); \lambda < \mu\}$  " ニテ表ハサレル。故ニソノ  $R^2$  ノ部分集合ガ Borel 集合デアレバ、モトノ命題ハ明カニ考察可能デアル。

更ニ可附番個ノ変数ニ関係シタ命題ニツイテモ同様デアル。然ルニ非可附番個ノ変数ニ関係シタ命題トナルト事情ガ少々変ツテ来ル。蓋シ非可附番個ノ確率変数ノ結合ハ一般ニハ " 許サレナイ概念 " デアルカラデアル。(\*7)

例ヘバ連続的ナ parameter  $t$  ニ依存スル実確率変数  $x_t$  ガアルトキ、"  $x_t$  ガ  $t$  ニ関シテ連続デアル "、"  $x_t$  ノ上限ガ  $M$  デアル " 等トイフ命題ガ考ヘ得ルタメニハ  $x_t$  ノ結合変数ヲ定義シナケレバナラナイ。コノニ問題ガアル。(勿論  $x_t$  ガ  $t = t_0$  ニ於テ確率収斂ノ topology ニ関シテ連続デアルトイフノデアレバソレハ  $\lim_{t \rightarrow t_0} P(|x_t - x_{t_0}| > \epsilon) = 0$  ニテアラハサレ、ツマリ  $|x_t - x_{t_0}| > \epsilon$  トイフ事ニ  $x_t, x_{t_0}$  ノニツノ確率変数ニ関スル命題ガ問題ニナルノデアルカラ、上述ノ免例ナ事ハ起ラナイ)。

而ラバ  $x_t$  ガ  $t$  ニ関シテ連続デアルトイフヤウナ命題ハ

考へラレナイト云フニ、サウデハナイ。

定義  $x_t$  が  $t \in (a, b)$  に関シテ連続デアアルトハ、  
 $(a, b)$  上ノ連続函数族ヲ値域トスル確率変数  $y$  が存在シテ、  
、  $t$  ニ於ケル値  $y_t$  が

$$p(x_t = y_t) = 1$$

ヲ満足スルコトデアアル。

註1. 上ノ如キ  $y$  ハ  $x_t$  一対シテ一義的ニ定マレルノデ、

コノ  $y$  ヲ  $x_t$  ノ結合ト呼ビ ( $x_t; a \leq t \leq b$ ) 又ハ單  
ニ  $x_{a,b}$  一ヲアラハス。又  $\alpha, \beta$  ヲ  $(a, b)$  内ノ實数ト  
スルトキ、  $y$  ヲ區間  $(\alpha, \beta)$  上ノミデ考ヘルト  $(\alpha, \beta)$   
上ノ連続函数族ヲ値域トスル確率変数が得ラレル。之  
ヲ  $x_{\alpha, \beta}$  一ヲ表ハス。

註2. ( $y_t; a \leq t \leq b$ ) ハ  $y$  一ニ等シイ。コレハ當然ナ  
コトデアアルガ、コノ事ガ「 $y$  が  $x_{a,b}$  デアル」トイッテヨ  
イ所以デアアル：

註3.  $x_t$  が " $t$  ノ各ノ値デ確率收斂ノ topology 一  
関シテ連続デアアル" トイフ事ト " $x_t$  が上ノ定義ノ意  
味デ連続デアアル" トイフコトトハ一致シナイ。前者ノ  
場合ニハ " $x_t$  ハ固定不連続点ヲモタナイ" トイヒ、  
後者ノ場合ニハ " $x_t$  ハ可動不連続点ヲモタナイ" ト  
イッテ區別スルノハ P. Levy (\*8) ノヤリ方デアアル。(勿  
論 Levy ノ述ベテ居ルノハ differential process  
ニツイテデアアルガ)。

故  $= \{y_i\}$  が可動不連続点が多い時  $= \wedge (y_t; a \leq t \leq b)$   
 が上記の意味 = トレバ 次  $= \|y_t\|$  が有限数  $M$  より  
 小である" トイフ命題ヲ考へルユトが出来ル。

## I. Differentiation

§1. Markoff process / Differentiation  
 の定義。

$\{y_t\}$  が (simple) Markoff process トシ、" $y_{t_0}$   
 が定マツヤ" トイフ条件ノ下ニ於ケル  $y_t - y_{t_0}$ 、確率法則<sup>(1)</sup>  
 ヲ  $F_{t_0, t}$  トスル。  $F_{t_0, t}$  ノ胡ラカ  $= y_t / P_{y_t}$ -可測  $(P)$ <sup>(2)</sup> —  
 茲  $= P$  ノ Levy ノ法則距離ヲ表ハス — ナル函数デアル。

定義 1.1<sup>(3)</sup>

$$(1) F_{t_0, t} * \left[ \frac{1}{t - t_0} \right] \quad ([a] \text{ノ } a, \text{ 整数部分 " * t " ノ左面} \\ \text{ノ convolution ヲ表ハス})$$

が " $t \rightarrow t_0 + 0$ " ノ時、法則距離  $P$  = 関シテ確率収斂スル特  
 ヲ、極限変数 (確率分布ヲ値トスル確率変数) ヲ " $\{y_t\}$  /  
 $t_0 =$  於ケル微係数" トイヒ、 $D_{t_0} \{y_t\}$  又ハ  $D y_{t_0} =$  ヲ  
 表ハス。

系 1.1.  $D y_{t_0}$  ノ無限 = 分解可能ノ確率分布デアル。<sup>(4)</sup>

証明.  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \rightarrow t_0$  ノ点列ヲ適當ニ選ン  
 テ

$$(3) F_{t_0, t_n} * \left[ \frac{1}{t_n - t_0} \right] \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が確率1ヲ以テ収斂スルヤウニ出来ル。

$F_{t_0, t_n} * \left[ \frac{1}{t_n - t_0} \right]$  が収斂スル場合ニハ、ソノ極限法則ハ

Khintchineノ所謂"limit law"デアルカラ、無限ニ分解可能デアル。

故ニ  $Dy_{t_0}$  ハ確率1ヲ以テ、無限ニ分解可能ト確率法則デアル。

コトニ得テ  $Dy_{t_0}$  ハ  $t_0$  及ビ  $y_{t_0}$  ノ函数ヲ、之レヲ  $L(t_0, y_{t_0})$  ト書クコトニスルト、コノ  $L(t_0, y_{t_0})$  が"ハシガヤ"ノ所ヲ述ベテ"基本的ト遷移確率"ニ相當スル。

猶テ  $L(t, y)$  ヲ與ヘテ

$$(4) \quad Dy_t = L(t, y_t)$$

ヲ解クコトガ Kolmogoroffノ問題、Formulierungデアル。

§2. 後ニ利用スルカラ、 $Dy_{t_0}$  ニ關スル比較定理ヲ証明シテ置カウ。

定理2.1.  $\{y_t\}, \{z_t\}$  が次ノ條件ヲ滿ス simple Markoff process トスル。

(1)  $y_{t_0} = z_{t_0}$

(2)  $E(y_t - z_t / y_{t_0}) = O(t - t_0)$

(3)  $\sigma(y_t - z_t / y_{t_0}) = (\sqrt{t - t_0})$  (O: Landauノ記号)

(注 -  $E(x/y)$  ハ  $y$  が定マツタ時、 $x$ ノ條件附平均値ヲ表

ハシ.  $\sigma(x/y)$  ハ同シ條件ノ下ニ於ケル $x$ ノ標準偏差ヲ示ス。又  $0$  ハ  $t_0$  及ビ  $y_{t_0}$  ニ關係シテモヨイ。

然ラバ  $Dz_{t_0}$  ガ存在スルトキニハ  $Dy_{t_0}$  モ亦存在シ、且ツ

$$Dy_{t_0} = Dz_{t_0}$$

証明.  $\varepsilon, \eta$  = 對シテ  $\delta(\varepsilon, \eta)$  ヲ充分小サクトレバ  
 $|t - t_0| < \delta(\varepsilon, \eta) + \nu$  限り

$$(4) \rho \left( E_{z_t - z_{t_0}}^{* \left[ \frac{1}{t - t_0} \right]}, Dz_{t_0} \right) < \varepsilon \quad (5) \left[ \begin{array}{l} F_{x/y} \text{ ハ } y \text{ ガ定マツ} \\ \text{タトイフ條件ノ下ニ} \\ \text{於ケル } x \text{ ノ確率法} \\ \text{則デアル。} \end{array} \right]$$

$$(5) |E(y_t - z_t / y_{t_0})| < \varepsilon (t - t_0)$$

$$(6) [\sigma(y_t - z_t / y_{t_0})]^2 < \varepsilon (t - t_0)$$

ノ成立スル確率ハ  $1 - \eta$  ヨリ大デアル。

横テ  $y_{t_0} = z_{t_0}$  デアルカラ

$$(7) y_t - y_{t_0} = (z_t - z_{t_0}) + (y_t - z_t)$$

今別ニ  $2n$  次元空間  $R^{2n}$  ヲ考ヘ、 $n$  ノ点ヲ  $(\zeta_1, \xi_1, \zeta_2, \xi_2, \dots, \zeta_n, \xi_n)$  ニテアツハス。コレニ確率ヲ次ノ如ク入ルル。

$$(8) P'(d\zeta_1, d\xi_1, d\zeta_2, d\xi_2, \dots, d\zeta_n, d\xi_n) = \prod_{i=1}^n F(d\zeta_i, d\xi_i)$$

茲ニ  $F$  ハ條件附確率法則:

$$(9) F_{(z_t - z_{t_0}, y_t - z_t) / z_{t_0}}$$

ヲ表ハス。

$$(10) (\zeta_1, \xi_1, \dots, \zeta_n, \xi_n) \rightarrow \zeta_i \text{ (又ハ } \xi_i)$$

ナル對應ヲ考ヘルト之ハ確率ノ場  $(R^{2n}, P')$  ノ上ノ確率  
 変數ヲアツテ、之ヲ再ビ  $\zeta_i$  (又ハ  $\xi_i$ ) ニテ表ハスコトス  
 ル。更ニ

(11)  $\eta_i = \zeta_i + \xi_i$ ,  $\eta = \sum \eta_i$ ,  $\zeta = \sum \zeta_i$ ,  $\xi = \sum \xi_i$   
 ト定義スルト  $\{\eta_i\}$  ハ互ニ独立ノ確率変數ノ組デアール。  
 $\{\zeta_i\}$ ,  $\{\xi_i\}$  ニ亦同様。又  $\zeta_i$ ,  $\xi_i$ ,  $\eta_i$  ノ確率法則ハ夫々

$$F_{z_t - z_{t_0} / y_{t_0}} \quad (\text{即チ } F_{z_t - z_{t_0} / z_{t_0}}),$$

$$F_{y_t - z_t / y_{t_0}}, \quad F_{y_t - y_{t_0} / y_{t_0}}$$

ニ等シイ。故ニ  $n$  ヲ  $\left[ \frac{1}{t-t_0} \right]$  ニ等シクシテ

$$(12) \quad F_{z_t - z_{t_0} / z_{t_0}}^* \left[ \frac{1}{t-t_0} \right] = F'_\zeta, \quad F_{y_t - y_{t_0} / y_{t_0}}^* \left[ \frac{1}{t-t_0} \right] = F'_\eta$$

茲ニ  $F'_\zeta$ ,  $F'_\eta$  ノ  $\zeta$ ,  $\eta$  ノ確率法則ヲアラハス。故ニ (4) =  $\exists$   
 リ

$$(13) \quad \rho(F'_\zeta, DZ_{t_0}) < \varepsilon$$

又  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  ノ独立デアールカラ

$$(14) \quad (\sigma(\xi))^2 = \sum_{i=1}^n (\sigma(\xi_i))^2 < \left[ \frac{1}{t-t_0} \right] (t-t_0) \varepsilon < \varepsilon$$

$$(15) \quad |E(\xi)| \leq \sum_{i=1}^n |E(\xi_i)| < \left[ \frac{1}{t-t_0} \right] (t-t_0) \varepsilon < \varepsilon$$

故ニ

$$E(\xi^2) = (E(\xi))^2 + (\sigma(\xi))^2 < \varepsilon + \varepsilon^2 < 2\varepsilon$$

( $\varepsilon < 1$ )

$$P(|\xi| > \varepsilon^{\frac{1}{4}}) < 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

即ち  $P(|\eta - \zeta| > \varepsilon^{\frac{1}{4}}) < 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}$

即ち  $d(\eta, \zeta) < \varepsilon^{\frac{1}{4}} + 2\varepsilon^{\frac{1}{2}} < 3\varepsilon^{\frac{1}{4}}$  (6)

P. Levy<sup>(17)</sup> = ヲレバ

(16)  $P(F'_\eta, F'_\zeta) < 3\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{1}{4}}$

(13) ト (16) トカラ

(17)  $P(F'_\eta, DZ_{t_0}) < \varepsilon + 3\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{1}{4}} < (3\sqrt{2} + 1)\varepsilon^{\frac{1}{4}}$

(12) ト (17) トカラ

(18)  $P\left(F_{\frac{y_t - y_{t_0}}{y_{t_0}}}^* \left[ \frac{1}{t - t_0} \right], DZ_{t_0}\right) < (3\sqrt{2} + 1)\varepsilon^{\frac{1}{4}}$

即ち (18) 式ハ任意ノ  $\varepsilon, \eta =$  對シテ  $|t - t_0| < \delta(\varepsilon, \eta)$  トル限リ  $1 - \eta$  ヲリモ大キイ確率ヲ以テ成立スル。即ち

$$Dy_{t_0} = DZ_{t_0}$$

定理 2.2.  $\{y_t\}, \{z_t\}$  が次ノ條件ヲ満ス simple Markoff process トスル。

(19)  $y_{t_0} = z_{t_0}$

(20)  $d(y_t, z_t) = 0$  ( $t = t_0$ ) (0ハ  $t_0, y_{t_0} =$  閉係シテヨイ)

而ラバ  $DZ_{t_0}$  が存在スルトキニハ、 $Dy_{t_0}$  亦存在シ、且

ツ

$$Dy_{t_0} = DZ_{t_0}$$

注意  $d(y_t, z_t) = \inf_{\alpha > 0} \{P(|y_t - z_t| > \alpha) + \alpha\}$

証明. (20) の假定がアルカラ、 $\delta(\varepsilon, \eta)$  が充分小  
 ナクトレバ  $|t - t_0| < \delta(\varepsilon, \eta)$  ナレ限リ

$$P\{|y_t - z_t| > \varepsilon(t - t_0)\} < \varepsilon(t - t_0)$$

前定理ノ証明ト同シ記号ヲ用フレバ

$$P(|\xi_i| > \varepsilon(t - t_0)) < \varepsilon(t - t_0) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$P(|\xi| > \varepsilon\left[\frac{1}{t - t_0}\right](t - t_0))$$

$$< \sum_{i=1}^n P(|\xi_i| > \varepsilon(t - t_0)) \quad (n = \left[\frac{1}{t - t_0}\right])$$

$$< n \varepsilon(t - t_0) = \varepsilon(t - t_0) \left[\frac{1}{t - t_0}\right]$$

$$\therefore P(|\xi| > 2\varepsilon) < 2\varepsilon$$

故ニ以下前定理ノ証明ト同様ニシテ、本定理ノ結論ヲ得ル。

### §3. Examples.

**例 1**  $\{x_t\}$  が (temporally) homogeneous  
 differential process ナレバ

$$DX_t = F_{x_t - x_0} \text{ (independent of } (t, x_t))$$

**例 2**  $\{x_t\}$  が differential process ナレバ  
 二時点  $t, s$  間ノ変動  $x_s - x_t$  ノ特性函数  $\varphi_{t,s}(z)$  が次  
 ノ形ノ式ニヨリテ表ハサレル、ハ摩、起ル。

$$\log \varphi_{t,s}(z) = \int_s^t \psi_\tau(z) d\tau$$

$$\text{茲ニ } \psi_\tau(z) = im_\tau z - \frac{\sigma_\tau^2}{2} z^2 + \left( \int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} \right) \left( e^{izu} - 1 - \frac{izu}{1+u^2} \right) n_\tau(du)$$

$\psi_\tau(z)$  が  $z$  ノ定メヲトキ、 $t_i$  間ニテ連続ナ、 $z=0$  1 或

ル近傍で同程度連続トスル。而ラバ

$$\log \varphi_{D, x_t}(z) = \psi_t(z) \quad (\text{independent of } x_t)$$

茲 =  $\varphi_{D, x_t}(z)$  ハ確率法則  $D, x_t$  ノ特性函数デアイル。

逆 =  $\psi_t(z)$  ノ與ヘテ differential process ノ作ル  
コトモ出来イル。

**例3**  $\{x_t\}$  が brownian motion トスル。即チ  
 $\{x_t\}$  ハ moving discontinuity  $\tau \in \tau + 1$  temporally  
homogeneous differential process 非、 $x_t - x_0$  が  
normal distribution = 従フトスル。シカラバ **例1**  
= ヨリ

$$(1) D, x_t = \text{normal distribution}$$

以後簡單ノタメニ平均値が  $a$ , 標準偏差が  $b$ , ガウス分  
布ヲ  $G(a, b) = \tau$  アラハス。normal distribution  
ハ  $G(0, 1)$  デ表ハスワケデアイル。今

$$(2) y_t = (x_t - x_0)^2$$

= ヨツテ定メラレイル  $\{y_t\}$  ノ考ヘルト

$$(3) y_t = (x_{t_0} - x_0)^2 + (x_t - x_{t_0})^2 + 2(x_{t_0} - x_0)(x_t - x_{t_0})$$

+イル故、 $y_t$  ハ simple markoff process +イルコト  
ガ分ル。

$$(4) y_t = y_{t_0} + (x_t - x_{t_0})^2 + 2(x_{t_0} - x_0)(x_t - x_{t_0}) \\ = \{y_{t_0} + (t - t_0) + 2(x_{t_0} - x_0)(x_t - x_{t_0})\} \\ + \{(x_t - x_{t_0})^2 - (t - t_0)\}$$

最初,  $\{ \}$  内ヲ  $Z_t = \tau$  表ハセバ

$$(5) \quad Y_{t_0} = Z_{t_0}$$

$$(6) \quad E\{Y_t - Z_t\} = E\{(x_t - x_{t_0})^2 - (t - t_0)\} \\ = (t - t_0) - (t - t_0) = 0$$

$$(7) \quad (\sigma\{Y_t - Z_t\})^2 = E\{(Y_t - Z_t)^2\} \\ = E\{(x_t - x_{t_0})^2\} - (t - t_0)^2$$

$$E\{(x_t - x_{t_0})^4\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^4}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2(t-t_0)}\right\} d\xi \\ = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^4}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\right\} d\lambda\right) (t-t_0)^2 \\ = 3(t-t_0)^2$$

故 =

$$(8) \quad (\sigma\{Y_t - Z_t\})^2 = 2(t-t_0)^2 = 0(t-t_0)$$

一方  $Z_t$  の定義 = 3.1

$$F_{Z_t - Z_{t_0} | x_{t_0} - x_0} = G(t - t_0, 2|x_{t_0} - x_0|\sqrt{t - t_0})$$

右辺に  $|x_{t_0} - x_0| = 1$  の関係を入れる

$$F_{Z_t - Z_{t_0} | (x_{t_0} - x_0)^2} = G(t - t_0, 2|x_{t_0} - x_0|\sqrt{t - t_0})$$

$$\text{即ち } F_{Z_t - Z_{t_0} | Z_{t_0}} = G(t - t_0, 2|x_{t_0} - x_0|\sqrt{t - t_0})$$

$$\therefore DZ_{t_0} = G(1, 2\sqrt{Z_{t_0}})$$

定理 2.1 を用いて上式及び (5) (6) (8) から

$$\therefore DY_{t_0} = G(1, 2\sqrt{Z_{t_0}})$$

## II. Integration

### §4. Definite Integral

$x_t$  は  $x_0 = 0$  からの brownian motion トスル。<sup>(8)</sup>

$b_t$  は  $x_{0t}$  (即ち  $(x_t; 0 \leq t \leq 1)$ )<sup>(9)</sup> の函数ヲ可動不連続点ガナイトスル。

今  $\Delta$  ヲ  $(2n+1)$  個ノ実数ノ組  $t_0, t_1, \dots, t_n, \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}$  ヲ次ノ條件ヲ満スルモノトスル。

$$(1) \quad 0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = 1$$

$$(2) \quad 0 \leq \tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1} \leq 1$$

$$(3) \quad \tau_i \leq t_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

$$d(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - \tau_{i-1})$$

ト定義スル。而ラバ勿論、明ラカニ

$$(4) \quad t_i - t_{i-1} \leq d(\Delta) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

今  $d(\Delta) < \delta$  トキ

$$(5) \quad y_\Delta = \sum_{i=1}^n b_{\tau_{i-1}} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$$

ヲ分点係  $(t_0, t_1, \dots, t_n)$  上ノ  $\delta$ -sum ト呼ブコトニスル。

定理4.1  $y_\Delta$  は  $d(\Delta) \rightarrow 0$  トキ、確率収斂スル。

証明。今  $t_1, t_2, \dots, t_n$  ノ細分ヲ  $S_1, S_2, \dots, S_m$

トシ  $\{\sigma_i\}$  ヲ

(6)  $\sigma_{i-1} = \tau_{k-1}$  if  $(S_{i-1}, S_i) \subset (t_{k-1}, t_k)$   
 = ヲツテ定義スレバ

$$(7) \sum_{i=1}^m b_{\sigma_{i-1}} (x_{S_i} - x_{S_{i-1}})$$

$\varepsilon$  亦  $\delta$ -sum テアツテ、然モ  $y_\Delta =$  等シイ。コレヲ分点系  $S_1, S_2, \dots, S_m$  上ノ  $y_\Delta$  ノ細分表示ト呼ブコト=スル。

今=ツ、 $\delta$ -sum  $y_\Delta$  ト  $y_{\Delta'}$  トガアルトキ、 $\Delta$  ノ分点系ト  $\Delta'$  ノ分点系トノ和集合ヲ分点系トスル細分表示ヲ考へルコト=ヨリ  $y_\Delta$  ト  $y_{\Delta'}$  トヲ同一分点系上ノ  $\delta$ -sum テ表ハスコトが出来ル。

即チ

$$(8) y_\Delta = \sum_{i=1}^n b_{\tau_{i-1}} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$$

$$(9) y_{\Delta'} = \sum_{i=1}^n b_{\tau'_{i-1}} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$$

$$(10) y_\Delta - y_{\Delta'} = \sum (b_{\tau_{i-1}} - b_{\tau'_{i-1}}) (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$$

$b_t$  ノ可動不連続点ガナイカラ、 $\varepsilon, \eta =$  数  $\forall \delta(\varepsilon, \eta)$  ヲ充分小ナクトレバ

$$(11) P \left( \bigwedge_{|t-s| < \delta(\varepsilon, \eta)} (|b_t - b_s| < \varepsilon) \right) > 1 - \eta$$

今  $d(\Delta), d(\Delta')$  ヲ共  $= \delta(\varepsilon, \eta)$  ヲリ小ナクトリ、 $C_i (i=1, 2, \dots, n)$  ヲ

$$(12) |b_{\tau_{i-1}} - b_{\tau'_{i-1}}| < \varepsilon \text{ ナラバ } C_i = b_{\tau_{i-1}} - b_{\tau'_{i-1}}$$

$$|b_{c_{i-1}} - b_{c'_{i-1}}| \geq \varepsilon \quad \text{ならば} \quad C_i = 0$$

ト定義スル、 $\therefore (11) = \exists \eta$

$$(13) \quad P\left(y_\Delta - y_{\Delta'} \neq \sum_i C_i (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})\right) < \eta$$

且ツ  $C_i$  の明ラカ  $= x_{c_{i-1}}$  の函数デアラ、故ニ  $C_i$  ト  $x_{t_i} - x_{t_{i-1}}$  トハ独立デアラ、

又

$$\begin{aligned} (14) \quad & E\left\{\left(\sum_i C_i (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})\right)^2\right\} \\ &= \sum_i E\left\{C_i^2 (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2\right\} + 2 \sum_{i < j} E\left\{C_i C_j (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})(x_{t_j} - x_{t_{j-1}})\right\} \\ &= \sum_i E\langle C_i^2 \rangle E\left\{(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2\right\} \\ &\quad + 2 \sum_{i < j} E\left\{C_i C_j (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})\right\} \underbrace{E\left\{x_{t_j} - x_{t_{j-1}}\right\}}_{=0} \quad (10) \\ &\leq \sum_i \varepsilon^2 (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

故ニ

$$(15) \quad P\left\{\left|\sum_i C_i (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})\right| > \sqrt{\varepsilon}\right\} < \varepsilon$$

(13) ト (15) トカラ

$$P\left\{|y_\Delta - y_{\Delta'}| > \sqrt{\varepsilon}\right\} < \varepsilon + \eta \quad \boxed{q.e.d.}$$

(註) 上ノ端点ハ 0, 1 = 限ラズ  $t, S$  デモヨイ。

定義 4.1 定理 4.1 デソノ存在ガ証明セラレタ  $y_\Delta$  ノ  
極限值ヲ  $\int_0^1 b(x) dx =$  表ハシ、 $b_t, x_t$  = 関スル積分  
ト呼ブコト = スル。  $\int_t^S b(x) dx$  = 同様 = 理解スル。

## §5. 積分に関する諸定理

本節を通じた  $\{x_t\}$  は brownian motion を被積分  
 函数 ( $b_t, C_t$  等) の  $x_{0,t}$  の函数であり且つ可動不連続点を  $\times$   
 十イモノト假定スル。

前節に定義シタ積分ハ、普通ノ積分ト同様ニ次ノ諸定理  
 を満足スル。

定理5.1 
$$\int_t^S dx_c = x_S - x_t$$

定理5.2 
$$\int_t^S (\lambda b_c + \mu C_c) dx_c = \lambda \int_t^S b_c dx_c + \mu \int_t^S C_c dx_c$$

定理5.3.  $t < S < u$  時ニハ

$$\int_t^S b_c dx_c + \int_S^u b_c dx_c = \int_t^u b_c dx_c$$

定理5.4  $y = \int_t^S b_c dx_c =$  於テ

(1)  $E(b_c^2) \leq M(\tau)$

ナル連続函数  $M(\tau)$  がアレル

(2)  $E(y^2) \leq \int_t^S M(\tau) d\tau$

定理5.5 確率過程ノ列  $\{b_c^{(n)}\}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) が  
 strong topology ノ意味ヲ  $\{b_c\}$  = 確率収斂スル。

即チ

$$P\left\{\sup_{S \leq \tau \leq t} |b_c^{(n)} - b_c| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty \text{ 時})$$

ナラバ  $\int_t^s b_c^{(n)} dX_c \wedge \int_t^s b_c dX_c = \text{確率収斂スル。}$

定理 5.1, 5.2, 5.3 の明ヲカ。定理 5.4 及ビ定理 5.5 ヲ  
証明スルヲナシ = 先ヅ補助定理ヲ証明スル。

Lemma 5.1.  $X, X_1, X_2, \dots$  ヲ実確率変数トスル。

(4)  $X_1, X_2, \dots$  ハ  $X$  確率 1 ヲ以テ収斂スル。

(5)  $X_1, X_2, \dots \geq 0$

(6)  $E(X_n) \leq e_n \quad (n=1, 2, \dots)$

(7)  $e_n \rightarrow e$

ナラバ

(8)  $E(X) \leq e$

証明  $\inf(X_n, X_{n+1}, \dots) = Y_n$

トスレバ

(9)  $0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \rightarrow X$

(10)  $0 \leq E(Y_n) \leq E(X_n) \leq e_n \quad (n=1, 2, \dots)$

(9) = ヨリ  $\{Y_n\}$  ハ單調列デアラカヲ

$$E(X) = E(\lim Y_n) = \lim E(Y_n)$$

一方 (10) = ヨリ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(Y_n) \leq \overline{\lim} e_n = \lim e_n = e$$

故ニ  $E(X) \leq e$

定理 5.4 の証明

$d(\Delta_n) \rightarrow 0$  ナル  $\{\Delta_n\}$  ヲ適當ニトツテ, 確率 1 ヲ

以テ

$$(11) \quad y = \int_t^s b_\tau d\mathcal{X}_\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\Delta_n} b_{\tau_{i-1}} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$$

が成立スルヲ示シテ来ル。(11)

故 =

$$y^2 = \left( \int_t^s b_\tau d\mathcal{X}_\tau \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{\Delta_n} b_{\tau_{i-1}} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \right)^2$$

$\sum_{\Delta_n} b_{\tau_{i-1}} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \Rightarrow y_n = \tau$  表ハセバ

$$E(y_n^2) = \sum_i E(b_{\tau_{i-1}}^2) E((x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2)$$

$$+ 2 \sum_{i < j} E(b_{\tau_{i-1}} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) b_{\tau_{j-1}}) \underbrace{E(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})}_{=0} \quad (11)$$

$$\therefore E(y_n^2) \leq \sum_{\Delta_n} M(\tau_{i-1}) (t_i - t_{i-1})$$

右辺ハ  $n \rightarrow \infty$  / 時  $\int_t^s M(\tau) d\tau = \text{近づく}$ 。故 = Lemma

$$5.1 = \exists \quad E(y^2) \leq \int_t^s M(\tau) d\tau$$

定理 5.5 / 証明

$\varepsilon, \eta = \text{對シテ } n \text{ヲ充分大キクトレバ、確率收斂ノ假定} = \exists$

リ

$$(12) \quad P\left\{ \sup_{t \leq \tau \leq s} |b_\tau^{(n)} - b_\tau| \geq \varepsilon \right\} < \eta$$

權テ  $C_\varepsilon$  ヲ次ノ如ク定義スル。

$$b_\tau^{(n)} - b_\tau > \varepsilon \quad \text{トシテ} \quad C_\varepsilon = \varepsilon$$

$$-\varepsilon \leq b_c^{(n)} - b_c \leq \varepsilon \quad \text{+ラバ} \quad C_c = b_c^{(n)} - b_c$$

$$b_c^{(n)} - b_c < -\varepsilon \quad \text{+ラバ} \quad C_c = -\varepsilon$$

然ラバ  $C_c$  は  $x_c$  の函数ナ、確率過程  $\{C_c\}$  の可動不連続点ヲ  $\varepsilon$  より +1。従ツテ  $\int_t^s C_c dx_c$  ヲ考へルコトが出来ル。

(12) = ヲレバ

$$(13) \quad P\left\{\int_t^s C_c dx_c \neq \int_t^s (b_c^{(n)} - b_c) dx_c\right\} < \eta$$

$$\text{且ツ} \quad |C_c| \leq \varepsilon \quad \therefore E(C_c^2) \leq \varepsilon^2$$

$$\therefore E\left\{\left(\int_t^s C_c dx_c\right)^2\right\} \leq \varepsilon^2 (s-t)$$

$$(14) \quad P\left\{\left|\int_t^s C_c dx_c\right| > \sqrt{\varepsilon}\right\} \leq \varepsilon (s-t)$$

(13), (14) = ヲリ

$$P\left\{\left|\int_t^s b_c^{(n)} dx_c - \int_t^s b_c dx_c\right| > \sqrt{\varepsilon}\right\} \leq \varepsilon (s-t) + \eta$$

故ニ  $\int_t^s b_c^{(n)} dx_c$  は  $\int_t^s b_c dx_c$  へ確率収斂スル。

## §6. Indefinite integral

$\{b_c\}$   $\{x_c\}$  は §4 = 於テ述べタ通りトスル。

定理 6.1  $\left\{\int_0^t b_c dx_c\right\}$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) の可動不連続点ヲ

$\varepsilon$  より +1。

即チ“(0,1) 上、連続函数”ヲ値トスル確率函数  $\gamma$  が存

在シテ任意ノ  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) = 對シテ

$$P\left\{\int_0^t b_c dx_c = y_t\right\} = 1 \quad \left(\begin{array}{l} y_t \text{ハ } y \text{ノ } t = \text{對スル} \\ \text{値ヲ示ス実確率変數} \end{array}\right)$$

ヲ満足スル。 (カナル  $y$  が equivalence ヲ除イテ一義的ニ定マルユトハ "序(II)" ノ所ヲ述べタ。)

定義 6.1. 定理 6.1 = 於ケル  $y$  ヲ  $b_c$ ,  $x_c$  = 関スル不定積分トイフ。

定理 6.1 ノ 証明

$$(1) \quad y_\Delta(t) = \sum_{i=1}^{k-1} b_{c_{i-1}} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) + b_{c_{k-1}} (x_t - x_{t_{k-1}})$$

if  $t \in (t_{k-1}, t_k)$

ナル  $\{y_\Delta(t)\}$  ハ明ラカニ可動不連続点ガナイ。

故ニ  $y_\Delta(t)$  連続函数ヲ値トスル確率変數——コレヲ再ビ  $y_\Delta$  = テ記ス。——ノ  $t$  = 於ケル値ト考ヘルコトが出来ル。而ラバ  $y_\Delta = (y_\Delta(t); 0 \leq t \leq 1)$  ガ  $d(\Delta) \rightarrow 0$  ノトキ、strong topology = 関シテ確率収斂スルコトヲ証明スレバヨイ。

而ラバ  $\{y_{\Delta_n}\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ガ strong topology = 関シテ、確率 1 ヲ以テ収斂スルヤウニ  $\{\Delta_n\}$  ヲ選ブコトが出来ル。コノ極限ヲ  $y$  トスレバ  $y$  ハ確率 1 ヲ以テ、連続函数列  $\{y_{\Delta_n}\}$  ノ一様収斂ノ極限值デアリテ、即チ確率 1 ヲ以テ連続函数デアル。

先ツ Lemma ヲ証明スル。

### Lemma 6.1

$x_1, x_2, \dots, x_n$  が互に独立な実確率変数で  $y_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) は  $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  と独立な実確率変数とする。

(2)  $E(x_i) = 0, E(y_i^2) < \infty, (i=1, 2, \dots, n)$  ならば

$$(3) P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_k x_k| \geq l \right\} \\ \leq \frac{E \{ y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_n x_n \}^2}{l^2}$$

此、Lemma の Kolmogoroff の不等式 ( $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 1$ , 場合) の擴張であって、この証明は全く同様であるから省略スル。

儲てモト二モドリ、 $S_1, S_2, \dots$  を  $(0, 1)$  の上へ到る所稠密なる点列とし、 $\Delta', \Delta$  の分点  $= S_1, S_2, \dots, S_m$  を附加シテ得ラレル分点ヲ再ビ  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$  表ハセバ

$$(4) y_{\Delta}(t_k) = \sum_{i=1}^k b_{t_{i-1}} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$$

$$(5) y_{\Delta'}(t_k) = \sum_{i=1}^k b_{t'_{i-1}} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$$

$d(\Delta), d(\Delta') < \delta(\varepsilon, \eta)$  とならば  $\delta(\varepsilon, \eta)$  の  $\varepsilon$  (11) 式ノ所ヲ述べタ  $\delta$  而ラバ (4) (5) ノ左辺ハ

何れ  $\varepsilon \delta(\varepsilon, \eta) - \text{sum } \tau + \nu$ .

$$(6) \quad y_{\Delta}(t_k) - y'_{\Delta}(t_k) = \sum_{i=1}^k (b_{t_{i-1}} - b'_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$$

$C_i$  は §4 (12) 式 = 於ける如く定義スル

$$(7) \quad P \left\{ \bigcup_{k=1}^n \left( y_{\Delta}(t_k) - y'_{\Delta}(t_k) \neq \sum_{i=1}^k C_i (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \right) \right\} < \eta$$

概テ

$$(8) \quad E \left\{ \left( \sum_{i=1}^n C_i (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \right)^2 \right\} < \varepsilon^2$$

Lemma 6.1 テ  $y_i, \Delta_i = C_i, x_i, \Delta_i = (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$ ,

$L, \Delta_i = \sqrt{\varepsilon}$  テト

$$(9) \quad P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k C_i (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \right| \geq \sqrt{\varepsilon} \right\} \leq \varepsilon$$

(7) (9) ヲリ

$$(10) \quad P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |y_{\Delta}(t_k) - y'_{\Delta}(t_k)| \geq \sqrt{\varepsilon} \right\} \leq \varepsilon + \eta$$

即チ勿論

$$(11) \quad P \left\{ \max_{1 \leq i \leq m} |y_{\Delta}(s_i) - y'_{\Delta}(s_i)| \geq \sqrt{\varepsilon} \right\} \leq \varepsilon + \eta$$

左辺、 $P \{ \quad \}$ 、中ハ  $m$  ト共 = 増大シテ

$$\left( \sup_{k=1}^{\infty} |y_{\Delta}(s_k) - y'_{\Delta}(s_k)| \geq \sqrt{\varepsilon} \right)$$

= 近ヅク。  $y_{\Delta}(c), y'_{\Delta}(c) \in \text{共} = c$ 、連続函数ヲ  $\{s_i\}$  が

$(0, 1)$  上テ到ル所稠密ナル故

$$\sup_{k=1}^{\infty} |y_{\Delta}(s_k) - y'_{\Delta}(s_k)| = \sup_{0 \leq \tau \leq 1} |y_{\Delta}(\tau) - y'_{\Delta}(\tau)|$$

$$\therefore P \left\{ \sup_{0 \leq \tau \leq 1} |y_{\Delta}(\tau) - y'_{\Delta}(\tau)| \geq \sqrt{\varepsilon} \right\} \leq \varepsilon + \eta \quad \text{q. e. d.}$$

### § 7. 不定積分ノ例

例 1.  $\int_0^t x_c dx_c = \frac{1}{2} x_t^2 - \frac{1}{2} t$

例 2.  $\int_0^t x_c^2 dx_c = \frac{1}{3} x_t^3 - \int_0^t x_c d\tau$

例 3.  $\int_0^t a(x_c) dx_c = \int_0^{x_t} a(\lambda) d\lambda - \int_0^t \frac{a'(x_c)}{2} dt$

但シ  $a'(\lambda)$  ハ  $\lambda$  ノ連続函数トスル。

例 1, 例 2, 例 3 ノ特別ノ場合故、例 3 ノミヲ証明スル。

先ツ  $b(\varepsilon)$  ヲ

$$(1) \quad b(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} a(\lambda)$$

ニヨッテ定義スル。

$\{x_c\}$  ハ可動不連続点ガ +1 process デアルカラ、(1) デ有界デアル確率ガ 1 デアル。(ハシガキ (II) 参照) 故ニ  $\eta$  ニ対シテ  $M$  ヲ充分大キクトレバ

$$(2) \quad P \left\{ \sup_{0 \leq \tau \leq 1} |x_c| < M \right\} > 1 - \eta$$

次  $a'(\xi)$  は連続ナル故  $|\xi| \leq M$  デハ一様連続  $\delta \forall \varepsilon$   
 = 對シテ充分小サクトレバ

$$(3) \quad |\xi' - \xi| < \delta \text{ ナル限リ } |a'(\xi') - a'(\xi)| < \varepsilon$$

又  $x_t$  が連続ナル確率が1ナルカラ  $\forall \gamma \exists \delta$  = 對シテ充分小サクトレバ

$$(4) \quad P\left(\bigcap_{0 \leq t, s \leq 1} (|x_t - x_s| < \delta)\right) > 1 - \eta$$

$$\Omega' = \left(\bigcap_{0 \leq t, s \leq 1} (|x_t - x_s| < \delta)\right) \cdot \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |x_t| < M\right)$$

トスレバ (2) (4) カラ

$$(4') \quad P(\Omega') > 1 - 2\eta$$

猶テ  $a'(\lambda)$  が連続ナル故  $b(\xi)$  は二次ノ微係數ヲテ連続ナル。

故 =

$$(5) \quad b(\xi') - b(\xi)$$

$$= b'(\xi)(\xi' - \xi) + \frac{b''(\xi)}{2}(\xi' - \xi)^2 + \frac{b''(\xi + \theta(\xi' - \xi)) - b''(\xi)}{2}(\xi' - \xi)^2$$

$$= a(\xi)(\xi' - \xi) + \frac{a'(\xi)}{2}(\xi' - \xi)^2 + \frac{a'(\xi + \theta(\xi' - \xi)) - a'(\xi)}{2}(\xi' - \xi)^2$$

茲 =  $0 \leq \theta \leq 1$  テアル。

故 = (6)  $b(x_s) - b(x_t)$

$$= a(x_t)(x_s - x_t) + \frac{a'(x_t)}{2}(x_s - x_t)^2 + \frac{a'(x_t + \theta(x_s - x_t)) - a'(x_t)}{2}(x_s - x_t)^2$$

$\Omega'$ , 上デハ  $|t-s| < \gamma + \nu$  限リ

$$|x_t + \theta(x_s - x_t)| \leq \max(|x_t|, |x_s|) < M$$

$$\text{又 } |x_t + \theta(x_s - x_t) - x_t| \leq |x_s - x_t| < \delta$$

従ツテ (5) = ヨリ

$$(7) \quad |a'(x_t + \theta(x_s - x_t)) - a'(x_t)| \leq \varepsilon$$

備テ、(7) が成立シタ場合ニハ

$$(8) \quad C_{t,s} \equiv \frac{1}{2} a'(x_t + \theta(x_s - x_t)) - a'(x_t)$$

ト定義シ、然ラザレバ

$$(9) \quad C_{t,s} \equiv 0$$

ト定義スル。又  $a'(\xi)$  ハ  $\xi$  ノ連続函数ナル故  $|\xi| \leq M$  テ  $a'(\xi)$

ハ有界。

$$\sup_{|\xi| \leq M} |a'(\xi)| = R \text{ トスル。備テ } e_t \text{ ヲ}$$

$$(10) \quad |a'(x_t)| \leq R \text{ ナラバ } e_t = a'(x_t)$$

然ラザレバ  $e_t = 0$

ト定義スル。  $\Omega'$  ノ上デハ (8) 及ビ  $e_t = a'(x_t)$  が成立スル

カラ (6) = ヨリ  $\Omega'$  ノ上デハ  $|t-s| < \gamma + \nu$  限リ

$$(10) \quad b(x_s) - b(x_t)$$

$$\begin{aligned} &= a(x_t)(x_s - x_t) + \frac{a'(x_t)}{2}(s-t) + C_{t,s}(x_s - x_t)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} e_t((x_s - x_t)^2 - (s-t)) \end{aligned}$$

今  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$  ナル点  $t_0, t_1, \dots, t_n$

ヲトリ

$$|t_i - t_{i-1}| \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

ヲ何レモ  $\gamma$  ヲリ小サクトレバ,  $\Omega'$ , 上デハ

$$(11) \quad b(x_t) - b(x_0)$$

$$= \sum_{i=1}^n (b(x_{t_i}) - b(x_{t_{i-1}}))$$

$$= \sum_{i=1}^n a(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) + \sum_{i=1}^n \frac{a'(x_{t_{i-1}})}{2} (t_i - t_{i-1})$$

$$+ \sum_{i=1}^n C_{t_{i-1}, t_i} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2$$

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} e_{t_{i-1}} \left( (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}) \right)$$

$|t_i - t_{i-1}|$  ヲ何レモ充分小サク (例ハバ  $\beta$  ヲリ小サク) トレ

ル

$$(12) \quad P \left\{ \left| \sum_{i=1}^n a(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) - \int_0^t a(x_c) dx_c \right| > \varepsilon \right\} < \eta$$

$$(13) \quad P \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \frac{a'(x_{t_{i-1}})}{2} (t_i - t_{i-1}) - \int_0^t \frac{a'(x_c)}{2} dt \right| > \varepsilon \right\} < \eta$$

$$E \left( \left| \sum_{i=1}^n C_{t_{i-1}, t_i} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2 \right| \right)$$

$$\leq E \left( \sum_{i=1}^n \varepsilon (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2 \right) \leq \varepsilon^2 \cdot t \leq \varepsilon^2$$

$$(14) \quad P \left\{ \left| \sum_{i=1}^n C_{t_{i-1}, t_i} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \right| > \sqrt{\varepsilon} \right\} < \varepsilon$$

又  $|t_i - t_{i-1}| \Rightarrow \forall \epsilon \in \frac{\epsilon}{R^2} \exists \eta$  小サクトレハ

$$E \left\{ \left( \sum_{i=1}^n \frac{e_{t_{i-1}}}{2} \left( (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}) \right) \right)^2 \right\} \leq \sum_{i=1}^n \frac{R^2}{4} (2(t_i - t_{i-1}))^2$$

$$\leq \frac{R^2}{4} \cdot \frac{\epsilon}{R^2} \cdot 2 \cdot \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \leq \frac{\epsilon}{2} \cdot t \leq \frac{\epsilon}{2}$$

$$(15) \quad P \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \frac{e_{t_{i-1}}}{2} \left( (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}) \right) \right| > \sqrt[4]{\epsilon} \right\} \leq \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}$$

(4') (11) (12) (13) (14) (15) =  $\exists \eta$

$$P \left\{ \left| \int_0^{x_t} a(\lambda) d\lambda - \int_0^t a(x_c) dx_c - \int_0^t \frac{a'(x_c)}{2} d\tau \right| > 2\epsilon + \sqrt{\epsilon} + \sqrt[4]{\epsilon} \right\}$$

$$< 2\eta + 2\eta + \epsilon + \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}$$

$\epsilon, \eta$  任意デアレカテ  $t$  / 各値 = 對シテ

$$\int_0^{x_t} a(\lambda) d\lambda = \int_0^t a(x_c) dx_c + \int_0^t \frac{a'(x_c)}{2} d\tau$$

即チ

$$(16) \quad \int_0^t a(x_c) dx_c = \int_0^{x_t} a(\lambda) d\lambda - \int_0^t \frac{a'(x_c)}{2} d\tau$$

ガ確率 / 以テ成立スル。  $t$  ヲ動カシテ考ヘルトキ (16) / 両  
 辺ハ共 = 可動不連続点ナキ確率過程デアレカラ、(16)ハスベテ  
 $t$  = 對シテ成立スルト考ヘテモヨイ。

例4.  $a(\tau), b(\tau)$  ガ連続函数デアリ、 $x_c$  1/2 brownian motion トスル時

$$y_t = \int_0^t a(\tau) d\tau + \int_0^t b(\tau) dx_\tau$$

ハ differential process ナリ、 $y_s - y_t \sim G\left(\int_t^s a(\tau) d\tau, \sqrt{\int_t^s (b(\tau))^2 d\tau}\right)$

ニ依リ。茲ニ  $G(\alpha, \beta)$  ハ  $\alpha$  ナリ平均値トシ、 $\beta$  ナリ標準偏差トスル Gauss 分布ヲ表ハス。

証明。 differential process ナルコトハ明ラカ。

$\{\Delta_n\}$  ナリ適當ニトレバ

$$y_s - y_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_t^s a(\tau) d\tau + \sum_{\Delta_n} b(\tau_{i-1})(x_{\tau_i} - x_{\tau_{i-1}}) \right\}$$

右辺ノ  $\lim$  ノ次ノ  $\{ \}$  内ノ Gauss 分布ニ依リ

$$\text{ノ、平均値} = \int_t^s a(\tau) d\tau$$

$$\text{ノ、標準偏差} = \sqrt{\sum_{\Delta_n} (b(\tau_{i-1}))^2 (t_i - t_{i-1})} \rightarrow \sqrt{\int_t^s (b(\tau))^2 d\tau}$$

Q. E. D.

### §8. 不定積分ノ絶対値ニ関スルツノ不等式

定理 8.1.  $\{x_t\}$   $\{b_t\}$  ハ §4 ナリ定義シテ通リトスル。

且ツ  $E(b_t^2)$  ナリ  $t$  ニ関シテ連続トスル。

而ラバ

$$(1) \quad P\left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t b_\tau dx_\tau \right| \geq l \right\} \leq \frac{\int_0^1 E(b_\tau^2) d\tau}{l^2}$$

(註) コノ定理ハ Lemma 6.1 ニ依リ、和ノ代リニ積分ヲ

以テ置キ換ヘタモノトスル。

証明 定理 6.1 の証明ニ於ケル (1) 式ヲ與ヘタ  $y_{\Delta}(t)$  ヲ考ヘル。  $d(\Delta_n) \rightarrow 0$  ナル  $\{\Delta_n\}$  ヲ適當ニトレバ  $y_{\Delta_n}(t)$  (コレヲ單ニ  $y_n(t)$  ト記ス) ガ  $\int_0^t b_{\tau} d\omega_{\tau} =$  一様ニ收斂スル確率ガ 1 ナルヲ示シテ出來ル。

今  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  ヲ  $(0, 1)$  上テ到ル所稠密ナ点列トスル。今  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  ヲ  $\Delta_m$  ノ分点ニ加ヘテ得ラレル分点系  $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n = 1$  上テ  $y_m$  ノ組分表示ヲ行フト

$$y_m(s_j) = \sum_{i=1}^j b_{\sigma_{i-1}} (x_{s_i} - x_{s_{i-1}})$$

ナル表現ガ得ラレル。

$$\begin{aligned} E \left\{ \left( \sum_{i=1}^n b_{\sigma_{i-1}} (x_{s_i} - x_{s_{i-1}}) \right)^2 \right\} &\leq \sum_{i=1}^n E(b_{\sigma_{i-1}}^2) (s_i - s_{i-1}) \\ &= \sum_{\Delta_m} E(b_{\tau_{i-1}}^2) (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Lemma 6.1 ヲ用ヒテ

$$P \left\{ \max_{1 \leq j \leq n} |y_m(s_j)| \geq l \right\} \leq \frac{1}{l^2} \sum_{\Delta_m} E(b_{\tau_{i-1}}^2) (t_i - t_{i-1})$$

依ツテ勿論

$$P \left\{ \max_{1 \leq i \leq k} |y_m(\alpha_k)| \geq l \right\} \leq \frac{1}{l^2} \sum_{\Delta_m} E(b_{\tau_{i-1}}^2) (t_i - t_{i-1})$$

$k \rightarrow \infty$  トスレバ  $(y_m(\tau))$  ガ可動不連続点ヲ持タナイ事ニ

注意シテ)

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |y_m(t)| \geq l\right\} \leq \frac{1}{l^2} \sum_{\Delta_m} E(b_{t_{i-1}}^2) (t_i - t_{i-1})$$

$m \rightarrow \infty$  トスレバ

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t b_c dx_c \right| \geq l\right\} \leq \frac{1}{l^2} \int_0^1 E(b_c^2) dt$$

### III. 微分方程式ト積分方程式

#### § 9. 本章デハ、微分方程式

$$(1) \quad dy_t = G(a(t, y_t), b(t, y_t))$$

ヲ

$$(2) \quad y_0 = C$$

ナル初期條件ノ下ニ解クコトヲ目的トスル 茲ニ  $G(\phi, \beta)$  ノ平均値  $\mu$ 、標準偏差  $\beta$  ノ Gauss 分布ヲ表ハス。

先ヅ定理ヲ掲ゲル。

定理 8.1.  $0 \leq t \leq 1$ ,  $-\infty < y < \infty$  ナルトキ  $a(t, y)$ ,  $b(t, y)$  が何レモ  $t, y$  関シテ連続ナリ。且ツ

$$(3) \quad |a(t, y) - a(t, y')| \leq A |y - y'|$$

$$|b(t, y) - b(t, y')| \leq B |y - y'|$$

ヲ満スルナリ帯數  $A, B$  が存在スルトスル。然ラバ  $x_c$  ヲ brownian motion トスルトキ

$$(4) \quad y_t = C + \int_0^t a(\tau, y_\tau) d\tau + \int_0^t b(\tau, y_\tau) dx_\tau$$

ハーツ而シテ唯一ツノ解ヲ有シ、ソノ解ハ(1)ヲ満足スル。

### §10. 上ノ積分方程式ノ解ノ存在証明(逐次近似法!)

Lemma 10.1.  $\{a_t\}$  が可動不連続点ヲキ stochastic process ン  $E(a_t^2) \leq M(t)$  ナル連続函数  $M(t)$  が存在スルトスル。

而ラバ

$$(1) \quad E \left\{ \left( \int_t^s a_\tau d\tau \right)^2 \right\} \leq (s-t) \int_t^s M(\tau) d\tau$$

証明

$$(2) \quad \left( \int_t^s a_\tau d\tau \right)^2 \leq (s-t) \int_t^s a_\tau^2 d\tau$$

$$E \left\{ \left( \int_t^s a_\tau d\tau \right)^2 \right\} \leq (s-t) E \left\{ \int_t^s a_\tau^2 d\tau \right\} \leq (s-t) \int_t^s M(\tau) d\tau$$

最後、不等式ハ Lemma 5.1 ヲ用ヒテ証明スルコトが出来ル。

横ヲモト=戻リ、 $y_t^{(k)}$  ( $k=1, 2, \dots$ ) ヲ順々=次ノ關係式ヲ定義スル。

$$(3) \quad y_t^{(0)} = C$$

$$(4) \quad y_t^{(k)} = C + \int_0^t a(\tau, y_\tau^{(k-1)}) d\tau + \int_0^t b(\tau, y_\tau^{(k-1)}) dx_\tau$$

( $k=1, 2, \dots$ )

先ツ  $y_t^{(k)}$  ( $k=1, 2, \dots$ ) が任意ノ定マツタ  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ )

= 對シテ 平均收斂<sup>(13)</sup>ノルコトヲ証明スル。

$$(5) \quad y_t^{(1)} - y_t^{(0)} = \int_0^t a(\tau, c) d\tau + \int_0^t b(\tau, c) dx_c$$

$a(\tau, c)$ ,  $b(\tau, c)$  ハ  $c$  ノ連続函数デアルカラ、 $\forall$  絶對値ノ開區間  $0 \leq \tau \leq 1$  = 於テアル有限値  $M$  = テ上カラ抑ヘルコトガ出来ル。

即チ

$$(6) \quad |a(\tau, c)| \leq M \quad |b(\tau, c)| \leq M \quad (0 \leq \tau \leq 1)$$

故 = Lemma 10.1 = ヲリ、上ノ始メノ式カラ

$$(7) \quad E \left\{ \left( \int_0^t a(\tau, c) d\tau \right)^2 \right\} \leq t \int_0^t M^2 d\tau \leq M^2 t^2 \leq M^2 t$$

$$(0 \leq t \leq 1)$$

又定理 5.47 用ヒテ、(6)ノ後ノ式カラ

$$(8) \quad E \left\{ \left( \int_0^t b(\tau, c) dx_c \right)^2 \right\} \leq \int_0^t M^2 d\tau = M^2 \cdot t$$

(5), (7), (8) ヲリ

$$(9) \quad E \left\{ (x + y)^2 \right\} \leq \left( \sqrt{E(x^2)} + \sqrt{E(y^2)} \right)^2 \quad (14)$$

ヲ用ヒテ

$$(10) \quad E \left\{ \left( y_t^{(1)} - y_t^{(0)} \right)^2 \right\} \leq 4M^2 \cdot t$$

概テ一般ニ

$$(7) \quad E \left\{ \left( \int_0^t (a(\tau, y_c^{(n)}) - a(\tau, y_c^{(n-1)})) d\tau \right)^2 \right\}$$

$$\leq 4M^2 R^{2(n-1)} \frac{t^{n+1}}{\underline{n+1}} A^2$$

$$(8') \quad E \left\{ \left( \int_0^t a(\tau, y_\tau^{(n)}) - a(\tau, y_\tau^{(n-1)}) \right) d\tau \right\}^2$$

$$\leq 4M^2 R^{2(n-1)} \frac{t^{n+1}}{\underline{n+1}} B^2$$

$$(10') \quad E \left\{ \left( y_t^{(n+1)} - y_t^{(n)} \right)^2 \right\} \leq 4M^2 R^{2n} \frac{t^{n+1}}{\underline{n+1}} \quad (\text{但し } R \equiv A+B)$$

が成立スルコトヲ証明シヨウ。

$$a(\tau, y_\tau^{(-1)}) = 0, \quad b(\tau, y_\tau^{(-1)}) = 0 \quad \text{ト定メルハ (7') (8')}$$

(10')、(7)、(8)、(10) = ヲリ  $n=0$ 、時ニ成立スル。一般ノ場合、証明ハ帰納法ニヨル。

即チ  $n-1$  = 対シテ (7') (8') (10') が成立スルト。シ、§9

(3) 式 = ヲリ

$$|a(\tau, y_\tau^{(n)}) - a(\tau, y_\tau^{(n-1)})| \leq A |y_\tau^{(n)} - y_\tau^{(n-1)}|$$

$$E \left\{ \left( a(\tau, y_\tau^{(n)}) - a(\tau, y_\tau^{(n-1)}) \right)^2 \right\} \leq A^2 E \left\{ \left( y_\tau^{(n)} - y_\tau^{(n-1)} \right)^2 \right\}$$

$$\leq 4M^2 R^{2(n-1)} \frac{t^n}{\underline{n}} A^2$$

Lemma 10.1 = ヲリ ( $0 \leq t \leq 1$  ト注意スルバ)

$$E \left\{ \left( \int_0^t \left( a(\tau, y_\tau^{(n)}) - a(\tau, y_\tau^{(n-1)}) \right) d\tau \right)^2 \right\}$$

$$\leq \int_0^t 4M^2 R^{2(n-1)} \frac{\tau^n}{\underline{n}} A^2 d\tau = 4M^2 R^{2(n-1)} \frac{t^{n+1}}{\underline{n+1}} A^2$$

即ち (7') が  $n$  1 場合 = 成立スルコトが示サレタ。同様ノ方法ヲ (8') = 亦成立スルコトが示サレル。コノ際 Lemma 10.1ノ代リ = 定理 5.4 が用ヒラレル。(7') (8') 及ビ次ノ (9) カラ不等式 (9)ヲ用ヒテ (10')ヲ導クコトが出来ル。

$$\begin{aligned}
 (*) \quad & y_t^{(n+1)} - y_t^{(n)} \\
 &= \int_0^t (a(\tau, y_\tau^{(n)}) - a(\tau, y_\tau^{(n-1)})) d\tau + \int_0^t (b(\tau, y_\tau^{(n)}) - b(\tau, y_\tau^{(n-1)})) d\tau_x
 \end{aligned}$$

サテ (10') = ヲリ

$$\rho_m(y_t^{(n+1)}, y_t^{(n)}) \leq \sqrt{4M^2 R^{2n} \frac{t^{n+1}}{n+1}} \quad (\rho_m(x, y) \equiv \sqrt{E((x-y)^2)}) \quad (15)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{4M^2 R^{2n} \frac{t^{n+1}}{n+1}} < \infty$  ナル故ニ変数列:

$$(11) \quad y_t^{(n)} = y_t^{(0)} + (y_t^{(1)} - y_t^{(0)}) + \dots + (y_t^{(n)} - y_t^{(n-1)})$$

( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

ハ平均収斂スル。ソノ極限值ヲ  $y_t$  トスレバ  $E(y_t^2) < \infty$  ナラツテ、 $y_t$ ノ平均値、標準偏差ハイザレモ有限確定値ヲトル。

次ニ  $\{y_t\}$  が可動不連続点ヲ持タナイ process ナルコトヲ証明スル。 $\{y_t^{(n)}\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ )ハ定理 6.1 = ヲリ何レモ可動不連続点ヲモタナイカラ stochastic process 1 列  $\{y_t^{(n)}\}$  が strong topology = 閉シテ確率収斂スルコトヲ証明スレバヨイ。(定理 6.1ノ証明ノ所ガ同様ナコトヲ

述べたキルカラ参照セラレタイ)

先ツ(8') = 於テ  $t=1$  トオキ、定理 8.17 用フレバ

$$(12) \quad P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t (b(c, y_c^{(n)}) - b(c, y_c^{(n-1)})) dx_c \right| > \left(\frac{1}{2^n}\right) \right\} \\ \leq 4M^2 R^{2(n-1)} \frac{1}{|n+1|} B^2 \cdot 2^{2n} \quad (n=1, 2, \dots)$$

(12) 式、右辺ヲ頂トスル級數ハ收斂スルカラ、Borel-Cantelliノ定理 = ヲリ、次ノコトガ確率 1 ヲ以テ成立スル。

∴ 充分大キイ  $n =$  對シテハ

$$(13) \quad \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t (b(c, y_c^{(n)}) - b(c, y_c^{(n-1)})) dx_c \right| \leq \frac{1}{2^n}$$

故 = 正數  $\eta =$  對シテ、 $n_0(\eta)$  ヲ充分大キクトレバ、確率  $\eta$ 、例外ヲ除イテ

(14) ∴  $n \geq n_0(\eta)$  ナル限リ (3) ガ成立スル

又  $a(c, y_c^{(n_0)}) - a(c, y_c^{(n_0-1)})$  ハ可動不連続点ヲ持タナイカラ充分大キイ  $K(\eta) =$  對シテハ、確率  $\eta$ 、例外ヲ除イテ

$$(15) \quad |a(c, y_c^{(n_0)}) - a(c, y_c^{(n_0-1)})| \leq K \quad (0 \leq t \leq 1)$$

(14) ト (15) トガ同時 = 成立スル場合ヲ  $\Omega' =$  テアヲハスト

$$(16) \quad P(\Omega') > 1 - 2\eta$$

(\*) 式 = 於テ  $n = n_0$  トオキ、(14)、(15) ヲ用ヒテ、 $\Omega'$  ノ上ヲハ

$$(17) \quad |y_t^{(n_0+1)} - y_t^{(n_0)}| \leq Kt + \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

が成立スル"コトが合ル。

次 = (米)式 = 於テ  $n = n_0 + 1$  トオキ (14)式, (17)式, 及

(3)式ヲ用ヒテ

$$\begin{aligned} |y_t^{(n_0+2)} - y_t^{(n_0+1)}| &\leq \int_0^t A |y_t^{(n_0+1)} - y_t^{(n_0)}| dt + \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0+1} \\ &\leq AK \frac{t^2}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} (tA) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0+1} \end{aligned}$$

同様ノ論法ヲ繰返シテ

$$\begin{aligned} |y_t^{(n_0+m)} - y_t^{(n_0+m-1)}| &\leq A^{m-1} K \frac{t^m}{m} + \sum_{r=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0+r} \frac{(tA)^{m-1-r}}{m-1-r} \\ &= A^{m-1} \cdot K \cdot \frac{t^m}{m} + \sum_{r=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0+m-1-r} \frac{(tA)^r}{r} \\ &= A^{m-1} K \frac{t^m}{m} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0+m-1} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(2+A)^r}{r} \\ &\leq A^{m-1} K \frac{1}{m} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0+m-1} e^A \quad (m=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

然ルニ, コノ最後ノ式ヲ項トスル級数ハ收斂スルカラ。

$\sum_{m=1}^{\infty} (y_t^{(n_0+m)} - y_t^{(n_0+m-1)})$  ハ  $\Omega'$  , 上ヲハ  $t \Rightarrow$  開シテ一樣ニ收斂スル。

故ニ  $\{y_t^{(n)}\}$  ナル確率過程, 列ハ strong topology 中ニ開シテ確率收斂スル。故ニ  $\forall$  limit タル  $\{y_t\}$  ハ可

動不連続点ヲモタナシ。

又定義 = ヨリ  $y_t^{(n)}$  ハ  $x_0, t$  1 函数ヲアル。故 =  $y_t \in$   
亦而リ。故 =  $a(t, y_t)$  及  $b(t, y_t) \in$  亦然リ。

又 §9 (3) 式 = ヨレハ  $y_t$  が可動不連続点ヲモタナシコ  
トカラ、 $a(t, y_t)$ 、 $b(t, y_t) \in$  亦可動不連続点ヲモタ  
ナシコトが合ル。更 =  $\{y_t^{(n)}\}$  が  $\{y_t\} = \text{strong topology}$   
 $\log y =$  同シテ 確率収斂スルコトカラ  $\int_0^t a(\tau, y_c^{(n)}) d\tau$   
が  $\int_0^t a(\tau, y_c) d\tau =$  確率収斂スルコトモ合ルシ、又定理  
5.5 = ヨリ  $\int_0^t b(\tau, y_c^{(n)}) dx_c$  が  $\int_0^t b(\tau, y_c) dx_c =$  確率  
収斂スルコトが合ル。故 = (4) 式 = ヨリ、 $y_c$  ハ §9、積分方  
程式(4)ヲ満足スル。

### §11. 9節、積分方程式、解、唯一性、証明

1°.  $|a(\tau, y)|, |b(\tau, y)|$  が  $0 \leq \tau \leq 1, -\infty < y < \infty$   
ヲ一様 = 有界ヲアル時 (ソノ上限ヲ  $M$  トスル)  
解が一通リ ( $y_t', y_t''$ ) アルトスル。

$$(1) \quad y_t' - y_t'' \\ = \int_0^t (a(\tau, y_c') - a(\tau, y_c'')) d\tau + \int_0^t (b(\tau, y_c') - b(\tau, y_c'')) dx_c \\ E\left\{\left(\int_0^t (a(\tau, y_c') - a(\tau, y_c'')) d\tau\right)^2\right\} \leq \left(\int_0^t M d\tau\right)^2 = M^2 \cdot t^2 < \infty$$

定理 5.4 = ヲリ

$$E\left\{\left(\int_0^t (b(c, y'_c) - b(c, y''_c)) dx_c\right)^2\right\} \leq \int_0^t M^2 dc = M^2 t < \infty$$

上ノ = 式ト (1) トカテ  $E\{(x+y)^2\} \leq (\sqrt{E(x^2)} + \sqrt{E(y^2)})^2 = \text{ヨ}$   
リ

$$(2) E\{(y'_t - y''_t)^2\} \leq (Mt + M\sqrt{t})^2 \leq 4M^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

猶テ  $E\{(y'_t - y''_t)^2\} \leq K(t)$  ナラバ (3) 及ビ Lemma 10.1  
及ビ 定理 5.4 = ヲリ

$$E\left\{\left(\int_0^t (a(c, y'_c) - a(c, y''_c)) dc\right)^2\right\} \leq t \int_0^t A^2 K(t) dt \leq A^2 \int_0^t K(t) dt$$

$$E\left\{\left(\int_0^t (b(c, y'_c) - b(c, y''_c)) dx_c\right)^2\right\} \leq \int_0^t B^2 K(t) dt \leq B^2 \int_0^t K(t) dt$$

コノ = 式ト (1) トカテ

$$(3) E\{(y'_t - y''_t)^2\} \leq (A+B)^2 \int_0^t K(t) dt$$

(2) ト (3) トカテ

$$(4) E\{(y'_t - y''_t)^2\} \leq (A+B)^2 (4M^2 \cdot t)$$

$$\text{再ビ (4) ト (3) トカテ } E\{(y'_t - y''_t)^2\} \leq (A+B)^4 (4M^2 \cdot \frac{t^2}{2})$$

コレヲ 繰返シテ

$$(5) E\{(y'_t - y''_t)^2\} \leq 4M^2 \frac{((A+B)^2 \cdot t)^n}{\lfloor n \rfloor} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\text{故ニ } E\{(y'_t - y''_t)^2\} = 0$$

$$\text{故ニ } P(y'_t = y''_t) = 1$$

2° 一般の場合。  $|a(t, c)|, |b(t, c)|$  は  $t$  の連続函数 +  $c$  故  $0 \leq t \leq 1$  於て有限値  $\alpha = \tau$  抑へられル。

$$(6) \quad |a(t, y)| \leq |a(t, c)| + |a(t, c) - a(t, y)| \\ \leq \alpha + A|y - c|$$

$$(7) \quad |b(t, y)| \leq \alpha + B|y - c|$$

今  $\Omega_K$  を

$$(8) \quad \Omega_K = \left( \sup_{0 \leq t \leq 1} |y'_t - c| < K \right) \left( \sup_{0 \leq t \leq 1} |y''_t - c| < K \right)$$

= ヨツテ定義スレバ、  $\Omega_K$  は  $K$  が増大シ

$$(9) \quad P(\Omega_K) \rightarrow 1 \quad (K \rightarrow \infty)$$

且ツ  $\Omega_K$  上デハ

$$(10) \quad |a(t, y_t)|, |b(t, y_t)| \leq 2\alpha + (A+B)K \\ (0 \leq t \leq 1)$$

コノ右辺ヲ  $M$  ト置ク。サテ  $b_M(t, y)$  を次ノ如ク定義スル。

$$b(t, y) > M \quad \text{ナラバ} \quad b_M(t, y) = M$$

$$-M \leq b(t, y) \leq M \quad \text{ナラバ} \quad b_M(t, y) = b(t, y)$$

$$b(t, y) < -M \quad \text{ナラバ} \quad b_M(t, y) = -M$$

今問題ノ解が二通りアルトシ、之ヲ  $y'_t, y''_t$  トスルト

$$(12) \quad P(y'_t \neq y''_t) > 0$$

コレが矛盾ニ導カレルコトヲ証明スレバ、解ノ唯一性が示サレタコトニナル。

$$(13) \quad P(\Omega_K \cdot (y'_t \neq y''_t)) \geq P(y'_t \neq y''_t) - (1 - P(\Omega_K))$$

(9) (12) (13) = ヨリ充分大キイ  $K = \text{對シテハ}$

$$(14) P(\Omega_K (y'_t \neq y''_t)) > 0$$

備テ  $\Omega_K$  / 上テハ

$$b_M(t, y_t) = b(t, y_t), a_M(t, y_t) = a(t, y_t)$$

$$(0 \leq t \leq 1)$$

故 =  $y'_t \in y''_t \in \text{共} = \Omega_K$  / 上テハ

$$(15) y_t = C + \int_0^t a_M(\tau, y_\tau) d\tau + \int_0^t b_M(\tau, y_\tau) dx_\tau$$

ヲ満足スル。

定義 = ヨリ明ラカ =  $a_M(t, y), b_M(t, y)$  ハ §9 = 掲  
ゲテ条件 (3) ヲ満足シ、且ツ何レモ絶対値 = 於テ  $M$  ヨリ小サ  
イ。故 = "10" = ヨリ (15) ノ解ハ唯一ツデ之レヲ  $y_t^{(M)}$  トス  
レバ、 $\Omega_K$  / 上テハ確率 0 ヲ除イテ

$$y_t^{(M)} = y'_t = y''_t$$

即チ  $P\{(y'_t = y''_t) \cdot \Omega_K\} = 0$ 。之ハ (14) ト矛盾スル。

§12. 9節ノ積分方程式ノ解ハ Markoff process  
ナルコトノ証明

$$(11) Z_s = \eta + \int_t^s a(\tau, Z_\tau) d\tau + \int_t^s b(\tau, Z_\tau) dx_\tau$$

ノ解ヲ  $Z_s = f(t, s, \eta, \tilde{x}_{t,s})$

= 表ハス。

$$\tilde{x}_{ts} = (x_c - x_t; t \leq \tau \leq s)$$

$f$  が定マラナイマウナ場合ヲ  $\tilde{N}_{ts}(\eta) = \text{テアラハス}$ 。  
 コレハ  $\tilde{x}_{ts}$  = 関スル条件ヲ表ハサレル。今  $y_s$  ヲ前節ヲ得  
 タ解トシ

$$(2) \quad y'_s = y_s \quad (0 \leq s \leq t)$$

$$y'_s = f(t, s, y_t, \tilde{x}_{ts}) \quad (s > t)$$

猶テ  $f(t, s, y_t, \tilde{x}_{ts})$  が定マラナイノハ

(3)  $y_t$  が定マラナイカ。

$$(4) \quad \bigcup_{\eta} (y_t = \eta) (\tilde{x}_{ts} \in \tilde{N}_{ts}(\eta))$$

ノ何レカデアアルガ、(3)ノ確率ハ明ラカ = 0。 (4)ノ確率ハ

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} F_{y_t}(d\eta) P(\tilde{N}_{ts}(y) | y_t = \eta)$$

( $F_y$  ハ  $y$  ノ確率法則)

然ルニ  $\tilde{x}_{ts}$  ト  $y_t$  トハ独立デアアル。(  $y_t$  ハ  $x_{0,t}$  ノ函数デア  
 アルカラ)

$$\text{故} = P(\tilde{N}_{ts} | y_t = \eta) = P(\tilde{N}_{ts}) = 0$$

故ニ (5) 式ニ 0 デ、従ッテ (4) ノ確率ニ 0 デアル。

猶テ  $S \leq t$  ナラバ

$$(6) \quad y'_s = y_s = c + \int_0^s a(\tau, y_\tau) d\tau + \int_0^s b(\tau, y_\tau) dx_\tau$$

$$= c + \int_0^s a(\tau, y'_\tau) d\tau + \int_0^s b(\tau, y'_\tau) dx_\tau$$

若シ  $S > t$  ならば

$$(7) \quad y'_S = f(t, S, y_t, \tilde{x}_{tS})$$

$$= y_t + \int_t^S a(\tau, y'_\tau) d\tau + \int_t^S b(\tau, y'_\tau) dx_\tau$$

(f, 逆算!)

(b) = 於テ  $S = t$  卜  $\pi$  1 4 式ヲ (7) = 代入シテ

$$(8) \quad y'_S = C + \int_0^S a(\tau, y'_\tau) d\tau + \int_0^S b(\tau, y'_\tau) dx_\tau$$

故 =  $\{y'_S\}$  八 § 9, 積分方程式ノ解  $\{y_S\}$  = 一致スル。

故 =  $S \geq t$  ならば  $y'_S = f(t, S, y_t, \tilde{x}_{tS})$

$$\begin{aligned} F_{y'_S/x_{0t} = \xi_{0t}} &= F_{f(t, S, y_t(\xi_{0t}), \tilde{x}_{tS})/x_{0t} = \xi_{0t}} \\ &= F_{f(t, S, y_t(\xi_{0t}), \tilde{x}_{tS})} \end{aligned}$$

(最後ノ等式ハ  $f(t, S, y_t(\xi_{0t}), \tilde{x}_{tS})$  が  $\tilde{x}_{tS}$  ノ函数デ、

従ツテ  $x_{0t}$  ト独立デアラカラデアアル。

故 =  $F_{y_t/x_{0t} = \xi_{0t}}$  ハ  $y_t(\xi_{0t}) = /$  ニ關係スル。  $y_{0t}$  ハ  $x_{0t}$  ノ函数ナル故  $F_{y_t/y_{0t} = y_{0t}}$  亦  $y_t = /$  ニ關係スル。

q. e. d.

§13. 9節ノ積分方程式ノ解が微分方程式(1)ヲ満足スルコトノ証明

$$(1) \quad y'_t = C + \int_0^t a(\tau, y'_\tau) d\tau + \int_0^t b(\tau, y'_\tau) dx_\tau$$

解  $y_t$  ( $t \geq t_0$ ) , 分布ヲ  $y_{t_0} = \eta$  , 下ニ於テ考ヘタル  
 元ノハ、前節ノ始メ述ベタ所ニヨリ、

$$(2) \quad y_t = \eta + \int_{t_0}^t a(\tau, y_\tau) d\tau + \int_{t_0}^t b(\tau, y_\tau) dx_\tau \quad (t \geq t_0)$$

解ノ分布ヲ無條件ノ下ニ於テ考ヘルニ、ト一致スル。

$$\text{故テ } y_t - y_{t_0} = y_t - \eta$$

$$= \int_{t_0}^t a(\tau, y_\tau) d\tau + \int_{t_0}^t b(\tau, y_\tau) dx_\tau$$

$$= \int_{t_0}^t a(\tau, y_{t_0}) d\tau + \int_{t_0}^t b(\tau, y_{t_0}) dx_\tau$$

$$+ \int_{t_0}^t (a(\tau, y_\tau) - a(\tau, y_{t_0})) d\tau$$

$$+ \int_{t_0}^t (b(\tau, y_\tau) - b(\tau, y_{t_0})) dx_\tau$$

故ニ

$$(2') \quad y_t - y_{t_0} = \int_{t_0}^t a(\tau, y_{t_0}) d\tau + \int_{t_0}^t b(\tau, y_{t_0}) dx_\tau$$

$$+ \int_{t_0}^t (a(\tau, y_\tau) - a(\tau, y_{t_0})) d\tau + \sum_{\Delta} (b(\tau_{i-1}, y_{\tau_{i-1}}) - b(\tau_{i-1}, y_{t_0})) (x_{\tau_i} - x_{\tau_{i-1}})$$

$$+ \left\{ \int_{t_0}^t b(\tau, y_{t_0}) dx_\tau - \sum_{\Delta} (b(\tau_{i-1}, y_{\tau_{i-1}}) - b(\tau_{i-1}, y_{t_0})) (x_{\tau_i} - x_{\tau_{i-1}}) \right\}$$

茲ニ  $\sum_{\Delta}^t$  ハ § 6 (1) 式ノ  $y_{\Delta}(t)$  , 如ク定義シタモノナラシ。今

最後ノ  $\{ \}$  内ヲ  $Y_t =$  テ表ハシ、 $\Delta$ ヲ充分細カクトレバ

$$(3) P\{|Y_t| \geq \varepsilon(t-t_0)\} < \varepsilon(t-t_0)$$

備テ (1), 解ハ "§ 10" ハ逐次近似法ニヨリ得ラレルベキナルカラ | $a(t, \eta)$ | | $b(t, \eta)$ |,  $S_0 \leq t \leq 1$ ニ於ケル最大値ヲ  $M$  トスレバ

$$E\{(Y_t - \eta)^2\} \leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{4M^2 R^{2n} \frac{(t-t_0)^{n+1}}{|n+1|}} \right)^2$$

(茲ニ  $R \equiv A+B$ )

$$\leq K(t-t_0) \left( K \equiv \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{4M^2 R^{2n} \frac{1}{|n+1|}} \right)^2 < \infty \right)$$

即チ  $E\{(Y_t - Y_{t_0})^2\} \leq K(t-t_0)$

故ニ  $E\{(a(t, Y_t) - a(t, Y_{t_0}))^2\}$

$$\leq A^2 E\{(Y_t - Y_{t_0})^2\} \leq A^2 K(t-t_0)$$

故ニ

$$(4) E\left\{ \left( \int_{t_0}^t (a(t, Y_t) - a(t, Y_{t_0})) dt \right)^2 \right\}$$

$$\leq (t-t_0) \int_{t_0}^t K A^2 (t-t_0) dt = \frac{A^2 K}{2} (t-t_0)^3 = o(t-t_0)$$

又

$$(5) E\left\{ \int_{t_0}^t (a(t, Y_t) - a(t, Y_{t_0})) dt \right\}$$

$$< \sqrt{E\left\{ \left( \int_{t_0}^t (a(t, Y_t) - a(t, Y_{t_0})) dt \right)^2 \right\}} \leq \sqrt{\frac{A^2 K}{2} (t-t_0)^3} = o(t-t_0)$$

(4), (5) ㄝ 11

$$(5') \sigma \left\{ \int_{t_0}^t (a(\tau, y_\tau) - a(\tau, y_{t_0})) d\tau \right\} = o(\sqrt{t-t_0})$$

$$\text{次} = E \{ (y_t - y_{t_0})^2 \} \leq K(t-t_0) \text{ カラ}$$

$$E \{ (b(t, y_{t_0}) - b(t, y_{t_0}))^2 \} \leq B^2 K(t-t_0)$$

故 =  $b(t, y_t) - b(t, y_{t_0})$ , 平均値  $\xi$  存在スル。

$$\begin{aligned} (6) \quad E \left\{ \sum_{\Delta}^t (b(\tau_{i-1}, y_{\tau_{i-1}}) - b(\tau_{i-1}, y_{t_0})) (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \right\} \\ = \sum_{\Delta}^t E ( \quad \quad \quad ) E (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \\ = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \quad E \left\{ \left( \sum_{\Delta}^t \right)^2 \right\} &= \sum_{\Delta}^t B^2 K(\tau_i - t_0)(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \int_{t_0}^t B^2 K(\tau - t_0) d\tau \quad \left( \begin{array}{l} t_0 \leq \tau_i \leq t_{i-1} \leq t_i \\ = \text{注意シテ} \end{array} \right) \\ &= \frac{B^2 K}{2} (t-t_0)^2 = o(t-t_0) \end{aligned}$$

(6) (7) ㄝ 11

$$(7') \sigma \left\{ \sum_{\Delta}^t \right\} = o(\sqrt{t-t_0})$$

(2') (3) (4) (5') (6) (7') = ㄝ 11  $D y_{t_0}$  ハ

$$(8) \quad Z_t = y_{t_0} + \int_{t_0}^t a(\tau, y_{t_0}) d\tau + \int_{t_0}^t a(\tau, y_{t_0}) dx_\tau$$

,  $t_0 =$  於ケル微係數  $DZ_{t_0} =$  等シイ。然ルニ

$$F_{Z_t - Z_{t_0}} = G\left(\int_{t_0}^t a(\tau, y_{t_0}) d\tau, \sqrt{\int_{t_0}^t (b(\tau, y_{t_0}))^2 d\tau}\right)$$

$$\text{故} = F_{Z_t - Z_{t_0}}^* \left[ \frac{1}{t-t_0} \right] = G\left(\left[\frac{1}{t-t_0}\right] \int_{t_0}^t a(\tau, y_{t_0}) d\tau, \sqrt{\left[\frac{1}{t-t_0}\right] \int_{t_0}^t b(\tau, y_{t_0})^2 d\tau}\right)$$

$$\text{故} \rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \left[ \frac{1}{t-t_0} \right] \int_{t_0}^t a(\tau, y_{t_0}) d\tau$$

$$= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t a(\tau, y_{t_0}) d\tau = a(t_0, y_{t_0})$$

同様 =

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left[ \frac{1}{t-t_0} \right] \int_{t_0}^t b(\tau, y_{t_0}) d\tau = (b(t_0, y_{t_0}))^2$$

$$\therefore D y_{t_0} = D Z_{t_0} = G(a(t_0, y_{t_0}), b(t_0, y_{t_0}))$$

q. e. d.

### 脚註

(\*1) A. Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. P. 12

(\*2) M. Fréchet: Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités, 第一卷. P. 215

(\*3) A. Kolmogoroff: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Math Ann. 104. P. 415)

(\*4) W. Feller: Zur Theorie der stochastischen

Prozesse. (Existenz- und Eindeutigkeitsätze)  
(Math. Ann. 113. P. 113)

(\*5) J. L. Doob: Stochastic processes depending  
on a continuous parameter, Trans. Am. Math.  
Soc. 42 (1937), Stochastic processes with  
an integral-valued parameter, *ibid* 44  
(1938)

(\*6) 談話 1033 (本誌 234号) §2

(\*7) " " ( " " ) §4

(\*8) P. Lévy: Théorie de l'addition des variables  
aléatoires, 第七章参照.

(1) 本誌 234号談話 1033 参照

(2) 本誌 234号談話 1033 同 235号談話 1043 参照

(3) コノ定義ハ本誌談話 1033 = 於テ筆者ノ與ヘタモ、ト幾  
分異ナル。

シカシ、コノ述ベタ注意ハ勿論コノデモ受當トスル。

(4) 詳シクイヘバ系 1.1 ハ "確率ノ以テ" 成立スルガ本誌  
談話ヲ述ベタ如ク、コノ "確率ノ以テ" トイフ言葉ハ  
特別必要ノナク限リ省略スル。

(5)  $\mathbb{P}_{x/y}$  ハ  $y$  が定マツタトキ  $x$  従フ確率法則ヲ示ス。

(6.9) Théorie de l'addition des variables aléa-  
toires, p. 51.

$$d(x, y) = \inf_{\eta > 0} \{ P \{ |x - y| > \eta \} + \eta \}$$

(8) §3 例3 参照.

(9) 本稿ハシガキ(II) 参照.

(10)  $|C_i| \leq \varepsilon + \nu$  故  $E(C_i^2)$  ハ存在シ.  $C_i$  ト  $x_{t_i} - x_{t_{i-1}}$  トガ  
独立ナル故

$$E\{C_i^2 (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2\} = E\{C_i^2\} E\{(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2\}$$

又  $C_i C_j (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$  ハ  $x_{0, t_{j-1}}$  ノ 函數ヲ  $i < j$  ナル故

$x_{t_j} - x_{t_{j-1}}$  ト独立.

且  $\nu |C_i C_j (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})| \leq \varepsilon^2 |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}| + \nu$  故  $E\{C_i C_j (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})\}$  ハ存在スル.

$$\begin{aligned} \text{故} &= E\{C_i C_j (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})(x_{t_j} - x_{t_{j-1}})\} \\ &= E\{C_i C_j (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})\} E\{x_{t_j} - x_{t_{j-1}}\} \end{aligned}$$

(11) P. Lévy 前掲書 p.55 及  $\Leftrightarrow$  p.56

$$(12) E(|b_{\tau_{i-1}}(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) b_{\tau_{j-1}}|)$$

$$\leq \sqrt{E\{b_{\tau_{i-1}}^2 (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2\} E(b_{\tau_{j-1}}^2)}$$

$$= \sqrt{E(b_{\tau_{i-1}}^2) E\{(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2\} E(b_{\tau_{j-1}}^2)} \quad (b_{\tau_{i-1}} \text{ ハ } x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \text{ ト独立ナル故})$$

$$\leq \sqrt{M(\tau_{i-1}) M(\tau_{j-1}) (t_i - t_{i-1})}$$

故  $b_{\tau_{i-1}}(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) b_{\tau_{j-1}}$  ハ integrable  $\Rightarrow$   $\nu$ .

(13) P. Lévy 前掲書. p.52. 3° La convergence en moyenne 参照.

$\alpha = 2$  ノ 場合ヲ 考ヘル. 即チ  $E(x^2) < \infty$  ナル實確

率変数、集合、 $p_m(x, y) = \sqrt{E[(x-y)^2]}$  + 距離 =  
関シテ完備 + 距離空間ヲ構成スル。コノ距離 = 関シテ  
ノ収斂ヲ平均収斂トイフノデアル。

(14) コノ不等式ノ脚註(13)ニ於ケル距離函数  $p_m$  が三角形公  
理ヲ満スコトヲ意味スル。

(15) 脚註(13)参照。