



Title	一般タウバー型定理ノ環論的証明
Author(s)	深宮, 政範
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 244, p. 1400-1406
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75010
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1078. 一般タウバー型定理ノ環論的証明

深 宮 政 範(阪大)

Gelfand, normed ring / 考へ = ヨツテ, 位相可換群ノ上デ Bochner, Stone-von Neumann, Plancherel 等ノ定理 $\times$ 群ト Character トノ双對定理等ガ Gelfand, Raikov, Krein, 河田敬義氏等 = ヨツテ新シク論じマレ, 証明サレテ居ル。特ニ Gelfand-Raikov ノ位相可換群ノ上ノ L_1 / normed ring ヲ新ハ、群ノ Character ガコノ normed ring / maximal ideal ト對應スルコトヲ証明シ、之ガ ring / 考ヲ用フル場合基礎ニナツテ居ル。

Gelfand の別 = 絶対収斂フーリエ級数で表ハサレル
 連続函数 $f(x)$ が到ルトコロ 0 ナラナケレバ $\frac{1}{f(x)}$ モ亦
 絶対収斂フーリエ級数で表ハサレルコトヲ *maximal*
ideal ヲ用ヒテアツサリ証明シ、夫レ、Wiener - Lévy
 ノ擴張ニ導キ出シタ。

茲デハ位相可換群 G ノ上ノ Lebesgue-integrable
 ナ函数ノ環ノ代数的ナ性質カラ、上ノ絶対収斂フーリエ級
 数ノ定理ヲ援用セズニ、直接ニ Wiener ノ一般タウバ
 ー型定理ヲ証明シ、ソレニ關シテニ、ニノ注意ヲ述ベタ
 イ。

位相可換群 G トシテハ *locally bicomact*,
separable (或ハモット一般デモ良イ) 位デ良イ。ソノ
 上デ Haar 不変測度ガ適當ナ假定ヲ満足シテ居レバ良イ。
 然シ茲デハ簡單ノタメ、 G ヲ実数全体 $-\infty < x < \infty$ ノ群トシ、
 Lebesgue 測度ヲ用ヒル。

$G = \{-\infty < x < \infty\}$ 上デ Lebesgue integral

$$\|K\| = \int_{-\infty}^{\infty} |K(x)| dx < \infty$$

ナ函数 K ノ全体ヲ L_1 トシ、 L_1 デ“積”ヲ

$$K \circ G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi) G(\xi) d\xi$$

デ定義シテ、 L_1 ヲ ring ト考ヘル。(和、常數トノ積ハ普通
 ノ通り) $L_1 = unit$ ヲ附加シタ ring ヲ L トスル。

R 元 $f(\alpha, K)$ で表はす. α は complex number,
 $K = K(x)$ $u(-\infty < u < \infty)$ へ一対一に対応スル. 且
 $\forall$

$$(\alpha, K) \equiv \alpha + \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{iux} dx \pmod{M}$$

若し $M = L$, ならば $(\alpha, K) \equiv \alpha \pmod{L}$, 特 $K \equiv 0^*$
 $\pmod{L}$

証明. 略

Lemma 3. (Gelfand-Raikov) R は $(*)$ -条件ヲ
 満足シ, semi-simple デアル.

証明. $f = (\alpha, K) \in L$ ならば $f^* = (\bar{\alpha}, \tilde{K}) \in L$, 但し
 $\tilde{K} = \overline{K(-x)}$;

$$\begin{aligned} \text{且ツ } f^*(M) &= \bar{\alpha} + \int_{-\infty}^{\infty} \overline{K(-x)} e^{iux} dx \\ &= \overline{\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{iux} dx} = \overline{f(M)} \quad (M \neq L) \end{aligned}$$

$$f^*(L) = \bar{\alpha} = \overline{f(L)}$$

従ッテ f^* は凡ユル maximal ideal = 対シ $f^*(M) = \overline{f(M)}$
 ヲ満足スル. 従ッテ $(*)$ -条件ヲ満足スル.

R が semi-simple ナルコトハ之レマデ全然使ハレ
 ナカッタ. 然シユノ性願ハ一番大切ナリデアル. 夫レモ Gel-

(*) 此ノコトハ可算 = 述ベレハ Riemann-Lebesgue 定理
 (Fourier transform ハ ∞ デ 0 = ナル) = ナリマス.

Gelfand-Raikov が既ニ証明シテ居ルカラ茲デハ略スル。

Lemma 4. semi-simple デ, (*)-条件ヲ満足スル normed ring R ハ N -ring デアル。即チ R 1 任意 closed ideal I ハ夫レハ含ム凡ユル maximal ideal, 共通部分ト一致スル。(従ッテ L ハ N -ring!)

証明. R 1 凡ユル maximal ideal, 作ル bicom-
pact Hausdorff 空間ヲ M , M 1 上 1 凡ユル複素数
値連続函数 1 ノルム環ヲ $C(M)$ トスル。 $C(M)$ 1 ノルムハ

$$\|f\| = \sup_{M \in M} |f(M)|.$$

然ルトキハ (*)-条件ト semi-simple トカラ R ハ
 $C(M)$ へ 1 代数的 isomorphism が存在スル上此 1 iso-
morphism ハ又位相的 isomorphism ナル。[Gelfand,
Recueil Math., 51-1, 参照]

依ッテ定理ハ $R = C(S)$ = 對シテ証明スレバヨイ。 S ハ
任意 1 bicom-compact Hausdorff 空間。此 1 場合 $C(S)$
ハ N -ring デアルコトハ既ニ知らレテキル [Gelfand,
N. R. II.]

Lemma 5. R ハ N -ring トスル。 $x \in R$ ハアル
maximal ideal M_0 = 對シテ

$$x(M) \neq 0 \quad (\text{for all } M \neq M_0), \quad x(M_0) = 0$$

デアレバ

$$R(x) = M_0.$$

$R(x)$ は x を含む最小の closed ideal (x を生成する principal ideal) を表はす.

$x(M) \neq 0$ ($M \neq M_0$) する Wiener の条件* は $R(x) = M_0$ する x は必要且十分の事になります.

証明. N -ring だから

$$R(x) = \bigcap_{R(x) \subset M} M = M_0. \quad (\text{証明了})$$

m が metric compact, $x \in C(m)$, closed ideal は (closed) principal ideal である (Silov) 事が別で云へる. 夫を Lemma 4 を用いて示す系として云へるやうです.

又 $x(M_0) = 0$, $x(M_1) = 0$ であるが N -ring だから $R(x) = M_0 \cap M_1 \neq M_0$ (maximal だから) 従って $R(x) \neq M_0$.

Lemma 6. L は N -ring である.

Lemma 7. $f(x)$ が有界可測 ($-\infty < x < \infty$) の函数として

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi) f(\xi) d\xi = A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi) d\xi$$

が成立つ如き $K(x) \in L_1$, 全体 L_1 の closed ideal 7

* 此場合 $R(x)$ は *primar ideal* = 主イデアル.

成ス。

証明. Wiener, Fourier integral and certain of its application, Chap. II, Lemma 6₂-6₆ 参照。

Wiener, 一般タフバ-型定理

$$(1) \lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(X-\xi) f(\xi) d\xi = A \int_{-\infty}^{\infty} K(X) dX$$

ナルトキ, 凡テ $G \in L_1$ に対シテ

$$(2) \lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(X-\xi) f(\xi) d\xi = A \int_{-\infty}^{\infty} G(X) dX$$

が成ルタメノ必要充分条件ハ

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} K(X) e^{i\mu X} dX \neq 0 \text{ for } -\infty < \mu < \infty$$

証明. (2)ノ成立スル G ノ全体ハ L_1 closed ideal $I (\subset L_1)$ ヲ作ル (Lemma 7.), 条件(1)ハ $K \in I$, 且ツ条件(3)ガアレバ L_1 以外ノ L_1 maximal ideal M ニ對シテ $K(M) \neq 0$, ($K(L_1) = 0$) (Lemma 2), 従ッテ $I \supset L(K) (= R(X)) = L_1$. 従ッテ $I = L_1$ ナルコトガ L_1 ガ N -ring ナルコト (Lemma 6), ト Lemma 5カラ合ル. Lemma 5ニヨッテ (3)ガ必要條件デアルストモ合ル。

Wiener, Fourier integral-----, Chap. II, Theorem 5ハ同様ニ Lemma 5ヲ用ヒテ得ラル。

Theorem 6, Theorem 7 へ Lemma 4 (N-ring デ
アルエト Lemma 5 デハ 成リタイ) を用ヒテ同ジ方法デ
容易ニ 導キ出セマス。

L , 1 closure, 定理 (Theorem 8, 9, 10) へ Lemma
4, 5 11 マニト云ヘルデセウ。