



Title	Wimannノ定理ニツイテ
Author(s)	有馬, 喜八郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 244, p. 1406-1414
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75011
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1079. Weimann, 1 定理ニツイテ

有馬 喜八郎(阪大)

(I) 整函数 $f(z)$ を考へル。

原点を中心とし半径 r なる円を C_r と表はし $\text{Max}_{C_r} |f(z)| = M(r)$, $\text{Min}_{C_r} |f(z)| = m(r)$ とス。

r_n を適當にとルとき $(r_1 < r_2 < r_3 \cdots < r_n < \cdots \rightarrow \infty)$

$$n \rightarrow \infty \lim_{n \rightarrow \infty} m(r_n) = \infty$$

とルとき $f(z)$ は W. property を有すと定義ス。

然ルとき Weimann, 1 定理ハ

"Order $\lambda < \frac{1}{2}$ ナルトキ $f(z)$ ハ W property ヲ有ス"
トナル。

Milloux⁽¹⁾ ハ $f(z)$ ガ 零点, γ 實數負軸上, $\gamma = \text{有シ}$
$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{\sqrt{r}} = 0 \text{ ナルトキ } W. \text{ property } \text{ヲ有ナルコト}$$

ヲ証明シタ。

コレハ Wiman の定理ノ擴張ナルコトハ明ラカデ
ス order が $\frac{1}{2}$ 以上ニツキ, コノ結果ノ拡張ヲ考ヘヨウト
思ヒマス。

証明ニハ Carleman - Milloux⁽²⁾ ノ定理ヲ用ヒ
マスガコノ定理ニツイテノ説明ハ省略致シマス。

(II) 以下ニ於テ order λ ハコトハリナキ限り何等ノ制
限ナキモノトス。

(1) $f(z)$ ガ有界帯 ($\infty = \text{延ビル領域デソコデ } |f(z)| \text{ ハ}$
有界) ヲ有セザルタメノ充分條件ヲ考ヘル。

$f(z)$ ガ有界帯ヲ有スルモノトシ、ソノ一ツヲ D トシ $D =$
テ $|f(z)| < 1$ トシテモ一般性ヲ失ハナイ。

原点ヨリ D へノ最短距離ヲ ρ , ソノ点ヲ $z = -\rho$ トシテモ
 z 平面ヲ廻轉スルコトニヨリ一般性ヲ失ハズ。

C_R ($R > \rho$ トス) 内ト D ノ外部トノ共通部分ヲ D_R ト
シ D_R ハ $|z| < R$ ナル境界デ、 $|z| = R$ デオトナル D_R 内デ

(1) Acta math. 1933.

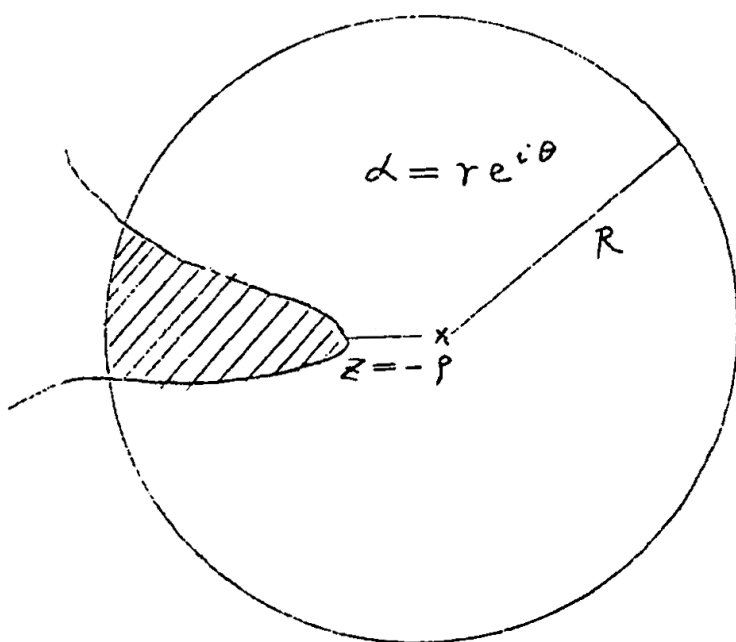
(2) Nevanlinna 著 Eindentige analytische Funktionen

調和函数ヲ $h_R(z)$ トス。

D_R 内ノ任意ノ点 z ヲトリ固定シテ考ヘル。然ルトキ

$$\log |f(z)| \leq \log M(R)(1 - h_R(z))$$

以下 $h_R(z)$ ヲ評価スル計算ヲナス。



$$\text{先ツ } z' = \frac{R(z+p)}{R^2 + zp} \text{ ヲ}$$

$$\text{ル変換ヲトセバ } z = -p$$

$$\text{ハ原点ニ変リ } \alpha = re^{i\theta}$$

$$\text{ハ } R = \frac{R(re^{i\theta} + p)}{R^2 + re^{i\theta}p} \text{ トナル}$$

$$h_R(z) \text{ カ } h(z') = \\ \text{トナツトスレバ } h_R(z) \\ = h(R) \text{ Carleman's}$$

- Milloux ノ 定理ニヨリ

$$h(R) \geq \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \frac{1-|R|}{1+|R|}$$

$$\therefore 1 - h_R(z) \leq 1 - \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \frac{1-|R|}{1+|R|} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{1-|R|}{1+|R|} \right)$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{1-|R|}{1+|R|} \text{ トナセバ}$$

$$\cos \beta = \frac{1-|R|}{1+|R|} \quad \therefore \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{|R|}{1+|R|}}$$

$$|R| = \frac{R\sqrt{p^2 + 2rp\cos\theta + r^2}}{\sqrt{R^4 + 2R^2pr\cos\theta + p^2r^2}} \quad \text{ヨリ } R \text{ ヲ充分大キクトレバ}$$

$|R|$ は充分小 $\theta + \pi$ なる数

$$\frac{\beta}{2} \doteq \sqrt{\frac{|R|}{1+|R|}} \doteq \frac{\sqrt[4]{p^2+2rp\cos\theta+r^2}}{\sqrt{R}}$$

$$\therefore 1-h_R(z) \leq \frac{2}{\pi} \beta \leq \frac{4}{\pi} \frac{\sqrt[4]{p^2+2rp\cos\theta+r^2}}{\sqrt{R}} (1+\varepsilon(R))$$

$$\varepsilon(R) \text{ は } R \rightarrow \infty \text{ として } \rightarrow 0$$

$$\therefore \log|f(z)| \leq \frac{4}{\pi} \frac{\log M(R)}{\sqrt{R}} (1+\varepsilon(R)) \sqrt[4]{p^2+2rp\cos\theta+r^2}$$

$$\therefore \frac{\log|f(z)|}{\sqrt[4]{p^2+2rp\cos\theta+r^2}} \leq \frac{4}{\pi} \frac{\log M(R)}{\sqrt{R}} (1+\varepsilon(R)) \dots\dots (1)$$

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \frac{\log M(R)}{\sqrt{R}} = M \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\log M(R)}{\sqrt{R}} = m \text{ となる。}$$

(但し m は有限ナルモノと假定ス)

(1) より

$$\frac{\log|f(z)|}{\sqrt[4]{p^2+2rp\cos\theta+r^2}} \leq \frac{4}{\pi} m \dots\dots\dots (2)$$

$$z = r_n e^{i\theta_n} \text{ 7 } |f(z)| = M(r_n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M(r_n)}{\sqrt{r_n}} = M$$

ナル如クトツテ違フバ

$$(2) \text{ より } M \leq \frac{4}{\pi} m \dots\dots\dots (3)$$

今 $m=0$ となラバ (2) より $|f(z)| \leq 1$ となる z は D 外ノ任意ノ点ナル故不合理。

故ニ (3) となる

(1) m が有限で $M > \frac{4}{\pi} m$ } (A) かつ $f(z)$ は有界帯
 かつ (2) $m = 0$

を有せず。

(ii) (A) かつ 仮設 1 モトニ議論ヲ進メル。

K を任意ノ正数トスルとき $|f(z)| < K$ かつ z ノ集合ハ
 上述ノコトヨリ閉曲線ニテ囲マレタ無数ノ領域ヨリナル集
 合 D トナル。

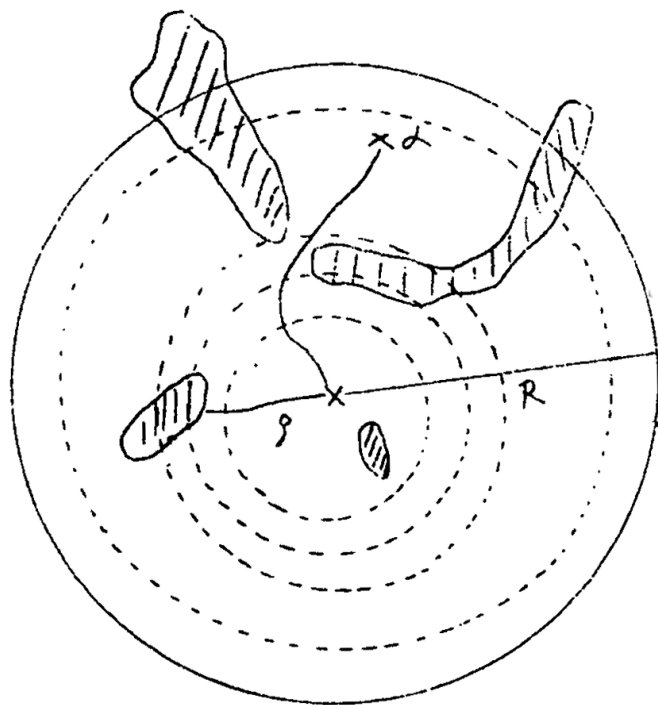
D ノ余集合ヲ C トス。

然ルとき如何程デモ大キイ適當ナル r ヲトレバ C_r が D
 ト交ハラシモノが存在スルコトヲ証明ス。

$K = 1$ トシテ一般性ヲ失ハズ。

$C_r (r > \rho)$ ナルスベテが D ト交ハルモノトス。 C 内ノ
 任意ノ点 $\alpha = re^{i\theta}$ ヲトル。

R ヲ充分大キクトレバ D 内ニハ有界帯ハ存在セザル故メ
 ト原点トテ C_R 内ト C ノ共通部分ニテ (若シ D ノ内ニ原点ヲ



含ムモノガアレバコレヲ除
 キ) 結ブコトヲ得。

然ルとき (i) ノトキト全ク
 同様ニシテ (i) ノ式ヲ得。

故ニ (A) ノ条件 1 モトニテ
 ハ

如何程デモ大キイ r が存在
 シテ C_r ハ D ト交ハラザル

ε が存在ス。

(1) (ロ) より次ノ定理ヲ得。

定理 (I) (A) ノ条件ヲ満足スル $f(z)$ ハ W property
ヲ有ス。

ordre $\lambda < \frac{1}{2}$ スハ $\lambda = \frac{1}{2}$ ナル極小型ノ函数ニテハ

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\log M(R)}{\sqrt{R}} = 0 \text{ ナル故 } m = 0 \text{ トナリ}$$

系 1. $\lambda < \frac{1}{2}$ スハ $\lambda = \frac{1}{2}$ ノ極小型ノ函数ハ W property
ヲ有ス。

(注意) $\lambda = \frac{1}{2}$ ノ中間型ノ函数中ニハ W property ヲ有
セザル ε が存在ス。

例へハ $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ ハ $\lambda = \frac{1}{2}$ ノ中間型ヲ実数正軸上ニテ有界
トナリ W property ヲ有セズ。

次ニ $\lambda > \frac{1}{2}$ スハ $\lambda = \frac{1}{2}$ ノ極大型ニテ $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\log M(R)}{\sqrt{R}} = \infty$
ナル故 m が有限ナラバ $M = \infty > \frac{4}{\pi} m$ トナル故

系 2. $\lambda > \frac{1}{2}$ スハ $\lambda = \frac{1}{2}$ ノ極大型ニテ $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\log M(R)}{\sqrt{R}}$ が有
限ナラバ W property ヲ有ス。

(III) (A) ノ假定ノモトニ (II) (ロ) ノ D ノ内ノ一ツノ領
域 D_n ニ原点ヨリノ最大最小距離ヲ $\bar{r}_n, \underline{r}_n$ トス ($\bar{r}_n > \underline{r}_n \rightarrow$
 ∞)

$\frac{\bar{r}_n}{\underline{r}_n} < K$ (有界) ガスベテ $n = 1, 2, \dots$ ニテ成立スルナラバ

$$\text{明ラカニ } \log \bar{r}_n - \log \underline{r}_n \leq 2 \log 2 M(\bar{r}_n) + O(1)$$

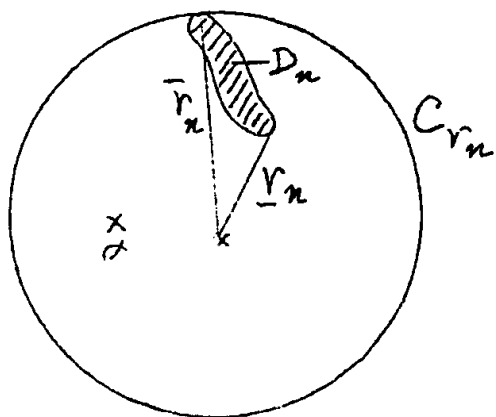
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{r}_n}{r_n} = \infty$ トシ $\lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{\bar{r}_{n_k}}{r_{n_k}} = \infty$ ナル系列ヲ考ヘル。

ソコデ r_{n_k} ヲ充分大ナリ且ツ $\frac{\bar{r}_{n_k}}{r_{n_k}}$ モ充分大ナル如キモノヲトル。 D_n ノ境界上デ 1 , C_{r_n} 上デ 0 トナリ $C_{r_{n_k}}$ 内デ且ツ D_{n_k} 外ニアル領域デ調和ニナル函数ヲ $h_{r_{n_k}}(z)$ トスレバ

$$\log |f(z)| \leq \log M(\bar{r}_n) [1 - h_{r_{n_k}}(z)]$$

ノ最短距離点ヲ必要ナラバ z 平面ヲ廻轉シ $z = -r_n$ トス。

(II) (I)ニ於テ $\rho = r_{n_k}$, $R = \bar{r}_{n_k}$ トオケバ (但シ $z = re^{i\theta}$)



$$1 - h_{r_{n_k}}(z) \leq \frac{2}{\pi} \beta$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{|R|}{1+|R|}}$$

$$|R| = \frac{\bar{r}_n \sqrt{r_{n_k}^2 + 2 r_{n_k} r \cos \theta + r^2}}{\sqrt{\bar{r}_{n_k}^4 + 2 \bar{r}_n^2 r_{n_k} r \cos \theta + r_{n_k}^2 r^2}}$$

z ヲ $|f(z)| > e$ ニシテ $|z| < \bar{r}_{n_k} + \epsilon$ 如ク任意ニトリ固定シテ考ヘル。コレハ $\bar{r}_{n_k}$ ガ充分大ナレバ可能ナリ。

$\frac{\bar{r}_{n_k}}{r_{n_k}}$ ガ充分大ニトレバ $|R|$ ハ充分小トナリ。

$$\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{|R|}{1+|R|}} = \sqrt{\frac{r_{n_k}}{\bar{r}_{n_k}}} (1 + \epsilon(\bar{r}_{n_k}))$$

$$\epsilon(\bar{r}_{n_k}) \text{ ハ } \bar{r}_{n_k} \rightarrow \infty \text{ トキ } \rightarrow 0$$

$\log |f(z)| > e$ ナル故以上ヲマテ

$$1 \leq \frac{4}{\pi} \log M(\bar{r}_{n_k}) \sqrt{\frac{\bar{r}_{n_k}}{\underline{r}_{n_k}}} (1 + \varepsilon(\bar{r}_{n_k}))$$

$$\therefore \log \bar{r}_{n_k} - \log \underline{r}_{n_k} \leq 2 \log_2 M(\bar{r}_{n_k}) + O(1) \dots (4)$$

依ッテ定理(II), (A)ノ條件ノモト $\underline{r}_n$ が充分大ナレバ,
常ニ

$$\log \bar{r}_n - \log \underline{r}_n \leq 2 \log_2 M(\bar{r}_n) + O(1)$$

今 $\lambda < \frac{1}{2}$ ノトキヲ考ヘル。

ε ノ任意ニ與ヘラレタ正數トス。 $\bar{r}_n$ が充分大ナレバ

$$\frac{\log_2 M(\bar{r}_n)}{\log \bar{r}_n} < \lambda + \varepsilon$$

(4) ヲリ

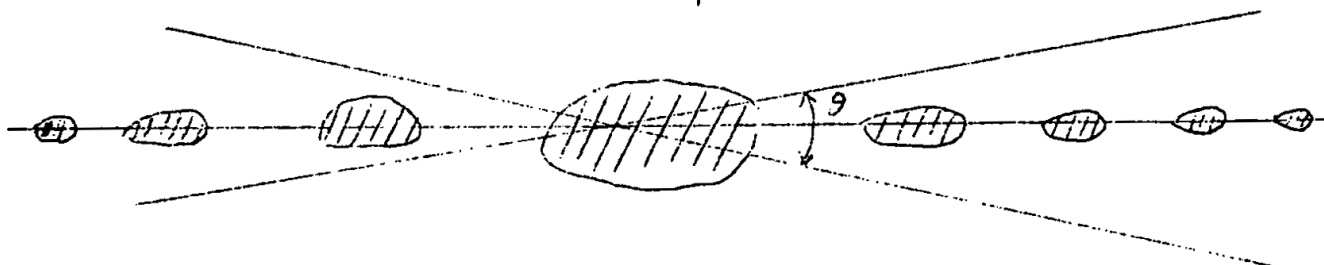
$$[1 - 2(\lambda + \varepsilon)] \frac{\log \bar{r}_n}{\log \underline{r}_n} \leq 1 + \frac{O(1)}{\log \underline{r}_n}$$

$$\text{故ニ} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \bar{r}_n}{\log \underline{r}_n} \leq \frac{1}{1 - 2\lambda}$$

系. $\lambda < \frac{1}{2}$ ノトキ

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \bar{r}_n}{\log \underline{r}_n} \leq \frac{1}{1 - 2\lambda}$$

(注意) $Z \sin Z$ ハ W . property ヲ有スルケレドモ上
ノ條件ニテハ判別不可能ナル $|Z \sin Z| < K$ ナル領域ヲ



作レバ図ノ如ク原点ニ對稱ニ並ビ、原点ニテ實軸ヲ二等分線
トスル如何程小サイ角ヲ作ルモ充分大ナル距離ニアル領域ハ
スベテユノ角内ニアリ。 C_r がユノ領域ト交ハレバ常ニ二回
交ハル。ユノ性質ニ着目スレバコノ場合ヲ含ム判別條件が得
ラレマスガ内部的ニ性質ヲ假定スルノデ良イ結果ヲ得マセン。
モット一般ニ簡單ニ條件が欲シイト思ヒマス。

以上ニテ間違ヒヲ犯シテ居ルカモ知レマセン、又御氣付
ノ點ガアリマシタラ御教示願ヒマス。

—— 以 上 ——