



Title	Fréchet 束二就テ (III)
Author(s)	小笠原, 藤次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 245, p. 1430-1439
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75013
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1081. Fréchet 束 = 就テ (III)

小笠原 藤次郎(廣島大理大)

計量 $p(x)$ ノアルベクトル束カ計量ノ適當十変更ニヨリ
Fréchet 束ニナル場合, (S), (A) 空間ハノルムノ導入ニ
ヨツテ Banach 空間トナシ得トイコト他ノ判定法, (A) 空
間ヲ Bochner 束トシテノ特性ツケ等ニツイテ簡單ナニ三
ノ注意ヲ述ベル, ガ目的デアル.

§11. R_+ 型空間ト Fréchet 束

の完全ベクトル束 $\mathcal{E}$ の各要素 $x = \sum p(x)$ が定義される次の (1) - (4) を満足スベトキ R_3 型空間ト呼バレル。
(Kantorovitch, Recueil Math. 44(1937), 121-165. 第8節)

$$(1) \quad p(x) = 0, x = 0 \text{ トキ} = \text{限リ } p(x) = 0$$

$$(2) \quad |x| \leq |y| \text{ トキ } p(x) \leq p(y)$$

$$(3) \quad x_n \uparrow x \text{ トキ } p(x_n) \rightarrow p(x)$$

$$(4) \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots, \lim_n \lim_p p(x_{n+p} - x_n) = 0 \text{ トキ } \{x_n\} \text{ は } (0) \text{ - 有界}$$

補題1. R_3 型空間 $\mathcal{E}$ の K_6 型 "正則" ベクトル束 $\mathcal{E}$ 上 $x_n \rightarrow 0(0)$ ト $\lim_{m,n \rightarrow +\infty} p(|x_n| \cup |x_{n+1}| \cup \dots \cup |x_m|) = 0$ トハ同義デアッル。

(証) §1 ア述ベタ条件 (1°), (2°) (p. 1337) ノ成立ト $x_n \rightarrow 0(0)$ $\lim_{m,n} p(|x_n| \cup \dots \cup |x_m|) = 0$ トノ同義ヲ云ハベヨイ。後者ハ Kantorovitch.

前掲 149 頁定理 33 ノ証明カラ云ヘル。(1°) ハ彼ノ所論 149 頁定理 34 ノ証明法カラ (2°) ハ §1, 定理 1 (p. 1338) ノ証明ト同論法ヲ使ハベヨイ。

補題2. R_3 型空間 $\mathcal{E}$ の K_6 型 "正則" = ナル条件ハ, 常ニ次ノ (5) ヲ満足スベコトデアッル。

$$(5) \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots, \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lim_n p(\lambda x_n) = 0 \text{ トキ } \forall x_n \text{ が存在スル。}$$

(証) $\lambda_p \downarrow 0$ トル任意ノ正数列ニ對シ $\lambda_p x_p \rightarrow 0(0)$ ト $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lim_n p(\lambda x_n) = 0$ ノ同義ヲ云ヘバ充分デアッル。(5)

假定が成立スルトスル。 $\lambda_p \downarrow 0$ たる正数列ニ對シ、 $i_1 < i_2 < \dots$
 $\dots$ 7 $p(\lambda_{i_n} x_{i_n}) < \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ が成立スル極
 限ニ至ルト、 $p(\lambda_{i_n} x_{i_{n+1}} \cup \dots \cup \lambda_{i_{n+p}} x_{i_{n+p+1}}) < \frac{1}{2^{n+1}}$ ト
 成リテ、前補題ニヨリ $\lambda_{i_n} x_{i_{n+1}} \rightarrow 0(0)$, $\lambda_{i_n} \geq \lambda_p > \lambda_{i_{n+1}}$
 トスレバ、 $\lambda_{i_n} x_{i_n} \geq \lambda_p x_p$ 7 $\lambda_p x_p \rightarrow 0$ ($p \rightarrow +\infty$)
 逆ニ、 $\lambda_p \downarrow 0$ たる任意ノ正数列ニ對シ、 $\lambda_p x_p \rightarrow 0(0)$ が成
 立ツトシ、 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lim_n p(\lambda x_n) > \varepsilon > 0$ トスレバ、 $n_1 < n_2 < \dots$
 $\dots$ 7 $p(\lambda_{n_p} x_{n_p}) > \varepsilon$ タルセウニ至ルコトが出来ル。
 $n_p \leq n < n_{p+1}$ ニ對シ $\lambda'_n = \lambda_p$ ト置クト $\lambda'_n \downarrow 0$ 然ルニ
 $\lambda'_n x_n \rightarrow 0(0)$ ハ成立シテ矛盾。故ニ矛盾が起ル。

補題3. (1) - (3) 7 満足スルベクトル束が更ニ次ノ條件
 (6) 7 満足スルトキハ R_3 型空間デ且〃正則性〃 *improper*
axiom 7 満足スル。

(6) $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$, $\lim_n p(x_n) < +\infty$, トキ $\forall x_n$
 が存在スル。

(証) (6) カラ σ -完全ベクトル束ナルコト、及ビ (5) ノ成立が
 判ル。補題ノ最後ノ部分ハ殆ド自明。

補題4. R_3 型空間ガ $p = \infty$ 位相ヲ変更スルコトナ
 シニ、計量ノ変更ニヨリテ *Fréchet* 束ニ至ル條件ハ次ノ (7)
 デアル。

(7) $p(x_n) \rightarrow 0$, トキ $p(|x| \cup |x_n|) \rightarrow p(x)$ トナル。

尚コノトキ *Fréchet* 束ハ K_6 型〃正則〃ニ至ル。

(証) X 7 R_3 型空間トシ、 p 7 $p' = \infty$ 変更シテ *Fréchet*
 束ニ至ラセトスル。 $p(x_n) \rightarrow 0$ トスレバ $p'(x_n) \rightarrow 0$ ナル。

故 $= \{x_n\}$ は 0 = 相對一樣 (*) - 收斂スル。従ッテ $|x| \sim |x_n|$
 $\rightarrow |x|$ (*) トナルカラ (7) が成立スル。逆 = (7) が満足スル
 R_3 型空間ハ計量ノ変更 = ヨッテ Fréchet 束 = ナル (実ハ
 K_6 型 Fréchet 束) コトハ Kantorovitch, 前掲 § 8
 = 論ゼラレテナル。

(7) が満足スル R_3 型空間ヲ R_4 型空間トイフ。 R_4 型
 空間ハ計量ノ変更 = ヨリ K_6 型 “正則” Fréchet 束 = ナル。コ
 レガ K_6 型 “正則” = ナル條件ハ (5) デアル。

Kantorovitch ハ前掲所論ノ中デ (p. 153 定理 39)

$$(8) \quad h p(x) \leq p(2x) \leq H p(x) \quad 1 < h \leq H$$

ヲ満足スル R_4 型空間ニ於テ (*) - 有界ト計量 p = ヨル有界ト
 ノ同義ヲ述ベテナル。 (8) が満足スル計量ヲ R_4 型空間
 (彼ハ R_5 型空間トイフ) = 對シ次ノ補題が成立スル。

補題 5. (8) が満足スル計量 p テモ R_4 型空間カ K_6 型
 “正則” ノトキ, “正則” 性, improper axiom ヲ満足
 スル。

(証) (6), 成立ヲ証明スルベヨイ。 $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$
 ヲ (0) - 有界デナイトスルト, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lim_n p(\lambda x_n) > \varepsilon > 0$ +
 ル ε が存在スル。 $\lambda = \frac{1}{2^n}$ = 對シ $p(\frac{1}{2^n} x_p) > \varepsilon$ + ル x_p が
 存在スル。 $p(x_p) > h^n \varepsilon$ トナルカラ, $\lim_n p(x_n) = +\infty$
 トナル。

(5) 空間 (6) 空間ハ K_6 型 “正則” デアルガ, “正則” 性
 improper axiom ヲ満足シナイ。 $(0, 1)$ 上ノ, 絶対値
 $1/2$ 束ガ可積分 + 函数 $x(t)$ ハ $p(x) = \left[\int_0^1 |x(t)|^{\frac{1}{2}} dt \right]^2$ ト置

フトキ $p(2x) = 2p(x)$ トナル。コノ R_4 型空間ハ、"正則"性
 / *improper axiom* ヲ満足スルガ、ノルムヲ導入シテ
 Banach 空間トハナシ得ナイ例デアアル。彼ニヨリヲ示サレ
 タヌウ = L_T 空間 (p. 156 参照) $\in R_4$ 型空間デアアル。 L_T 空間
 トハ、 $T(u)$ ヲ $u \geq 0$ = 対シテ定義サレタ実函数デ

1. $T(u) \geq 0$, $u=0$ ノトキ = 限リ $T(0)=0$.
2. $T(u)$ ハ連続ナ増加函数, $(u_1 < u_2)$ ノトキ $T(u_1) < T(u_2)$
3. $T(2u) \leq K T(u)$.

ヲ満足スルトナル。抽象集合 A , 部分集合, Borel 族上ニ
 定義サレタ完全加法的測度函数 $m(E)$ ($m(A) < +\infty$) =
 関シ可測函数 (殆ト到ルニ有有限値ヲトル) ノ中 $\int_A T(|g(t)|) dm$
 $< +\infty$ ナル $g(t)$ 全体, 作ルベクトル束ニ於テ, $\rho_T(g) =$
 $\int_A T(|g(t)|) dm$ トシタモノデアアル。 $T(+\infty) = \lim_{u \rightarrow +\infty} T(u)$
 が有限ノトキハ, L_T ハ A 上ノ (S) 空間ト同義ニナルカラ K_6
 型"正則"デアアルガ, "正則"性 / *improper axiom* ヲ
 満足シナイ。 $T(+\infty) = +\infty$ ノトキハ L_T ハ"正則"性,
improper axiom ヲ満足スル。何レニシテモ ρ_T ノツケカヘ
 デ K_6 型"正則" Fréchet 束ニナル。

以上ハ Kantorovitch, 前掲, §8, §10 ノ所論ヲ形ヲ
 カヘテ述ビタニ通ヤナイ。

§12. L_T 空間概念ノ擴張

X ヲ單位 E 上ノ K_6 型"正則" Fréchet 束トシ, $\forall$

計量函数 $\rho(x)$ トスル。 e ヲ恒等的 $= 1$ ニスル様ニ X ヲ表現
 する空間 Ω 上ノ連続函数族ヲ表現スル。 Ω 上ノ非稠
 密集合ヲ除イテ有限値ヲトル連続函数 $g(z) = \text{対シ}$, $\S 11$ デ
 述べタ $T(u) = \text{對シ}$ $T(|g(z)|)$ ガ X ノアル要素ノ表現函数
 $=$ トルトキ, コノ要素ヲ $T(|g|)$ デ表ハス。 $T(|g|) \in X$ ナル
 g ノ全体ヲ X_T トスレバ

補題 1. X_T ハ完全ベクトル束ニシテ $\S 11.1$ (1), (2), (3),
 (7)ヲ満足スル。

(証) $T(|g_1(z)| \cup |g_2(z)|) \leq T(|g_1(z)|) \cup T(|g_2(z)|)$,
 $T(|2g(z)|) \leq K T(|g(z)|)$ カラ X_T ハ完全ベクトル束ヲ作り
 $\rho_T(g) = \rho(T(|g|))$ ト定ムルトキ $\rho_T(|g| \cup |g'|) \leq \rho_T(g) +$
 $\rho_T(g')$ コレカラ (1), (2), (3), (7)ノ成立ガ直チニ判ル。

(4)ノ成立ノ充分条件ハ色々ノ形ヲ與ヘラレルガ, コレ
 ズケヲ論ズルユトハ *trivial* ナ議論ニナルカラ省略スル。
 X ガ *Kantorovitch* 空間, *Bochner* 束或ハ之ヲ一般ニ
 シタ條件 (N)ヲ満足スルベクトル束デハ $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$
 $\{x_n\}$ ガ有界デナイトキ $\|x_n\|_p \rightarrow +\infty$ ナル $\|x\|_p$ ガアルカ
 ラ, コノトキ X_T ハ K_6 型 "正則" ベクトル束デ, (4), (5)ハ常
 ニ満足サレル。 *Kantorovitch*ガ論ジタノハ X ガ L 空間
 ノトキデアル。

13. (d) 空間ノ特性ツケ

ベクトル束ニ對シ, 次ノ條件 (#)ヲ設ケル。

(#) $x_i \wedge x_j = 0$, $(i \neq j)$ ナル $\{x_i\}$ ハ共ニ $\vee x_i$ ヲ含

ム。

補題1. 単位 e が σ -完全ベクトル束 π が恒等的
ノトラシメルヤウ, 主イデヤル=ヨル方法デ, γ ノ表現ブー
ル空間上ノ連続函数族ヲ表現スルトキ, γ ノ連続函数族カ非
稠密集合ヲ除イテ有限値ヲトルスベテノ連続函数カラナレタ
メノ条件ハ条件(井)デアル。従テコノトキベクトル束ハ e が
環単位トスル環素ヲ作ル。

(証) 殆ド自明。

(注意) 完全ベクトル束=於テ, (井)ノ代リニ, $x_\alpha \wedge x_\beta = 0$
($\alpha \neq \beta$)ナル $\{x_\alpha\}$ ト共ニ $\forall x_\alpha$ 全ムトイフ 条件ハ完全ベクト
ル束カ単位 e ヲモチ, e が恒等的ノナルヤウニ表現スルトキ,
表現函数カスベテノ, 非稠密集合ヲ除イテ有限値ヲトル連続
函数カラナルトイフ条件ト同義デアル。

補題2. 完全(或ハ σ -完全) Banach 束カ条件(井)ヲ満
足スルトキハ有限次元デアル。

(証) X が条件(井)ヲ満足スル σ -完全ベクトル束トス
ル。 $a_i \wedge a_j = 0$, ($i \neq j$) ナル $\{a_i\}$ が存在スルトキハ,
 $e = \vee a_i$ トオク。

主イデヤル $\alpha(e)$ ハ条件(井)ヲ満足スル σ -完全ベクト
ル束トナルカラ, 補題1ニヨリ $\alpha(e)$ ハ環束ヲ作ル。故ニ
 $\alpha(e)$ ノ各要素ハ e ニ内シテ有界トナル。コレカラ $\alpha(e)$ が
有限次元ナルコトガ容易ニ判ル。従ッテ有限個ノ a_i カケガ
 $a_i > 0$ トナル。故ニ X が単位ヲモット考ヘテ一般性ヲ失ハナ
イ。従テ X ハ有限次元トナル。

定理1. 条件 (井) を満足する Banach 束は有限次元である。

(証) X を条件 (井) を満足する Banach 束とする。

$a_i \wedge a_j = 0, a_i > 0$ となる $\{a_i\}$ が存在するときに、任意の実数列 $\{\lambda_i\}$ = 対し 假定 = より $\sum \lambda_i a_i$ は (0)-収斂する。かつ $\lambda_i \in I$ の全体 = 補題2 を使って $\{a_i\}$ は有限集合となる。故に $X = \wedge$ 単位が存在する。 X が有限次元でないときは、 $a_i \wedge a_j = 0, a_i > 0$ となる可数無限集合をとり出せることがこれより容易に判り矛盾が起る。

補題2 或は本定理が $(S), (b)$ -空間のノルムノ導入によって Banach 空間となし得たことが判る。⁽¹⁾ 之を定理の形を表はすと

補題3. (井) を満足する K_6 型 "正則" F -束は単位をもつ K_6 型 "正則" 束である。有限次元でないときは "正則" 性、improper axiom を満足しない。またコバクトル束がノルムノ導入によって Banach 空間となる条件は有限次元となることである。

(証) X を (井) を満足する K_6 型 "正則" F -束とする。 X = 単位が存在しないときは、 $e_\alpha \wedge e_\beta = 0$ 且つすべての e_α = 対し $0 \in e_\alpha = 0$ となる $x = 0$ となる $\{e_\alpha\}$ をとることが出来る。ある正数 ε = 対し $p(e_\alpha) > \varepsilon$ を満足する無限個

(1) (井) を満足するベクトル束は "正則" 性、improper axiom を満足しない。これを §4 補題2 (p. 1343) を使ってこの結論を出してもよい。

$e_n, n=1, 2, \dots$ が存在スル。 $a_n = \bigvee_{m \geq n} e_m$ ト置クト
 $a_n \downarrow 0$ トナルカラ $p(a_n) \downarrow 0$ トナリ矛盾が起ル。 故=
 X ハ単位 e フモツ。 X ガ K_6 型 "正則" =ナルコトハ §1,
 条件 (V) (p. 1338) フ満足スルコトヲ示セバヨイ。 (略) 或
 ハ次ノ様ニシテモイヘル。 $x \in X$ =對シ $p'(x) = p\left(\frac{|x|}{e+|x|}\right)$
 ト置クトキ $p' = \text{ヨリ } X \text{ ハ } K_6 \text{ 型 "正則" } F\text{-束} = \text{ナル。 } p \text{ ト } p'$
 トハ位相ヲ変ヘナイ。 (§1, 補題5 参照) コトカラ X ハ K_6
 型 "正則" トナル。 補題ノ残りノ部分ハ眼カデアラウ。

(A) 空間ハ Bochner 束 $\mathcal{F}$ (H) フ満足スル。 逆 =

定理2. (H) フ満足スル Bochner 束ハ有限次元 $\mathcal{F}$ アル
 カ計量ヲ適當ニトルト (A)-空間 =ナル。

(証) X フ (H) フ満足スル Bochner 束トスル。 補題3
 =ヨリ X ハ単位 e フモツ。 X ハ e フ環単位トスル環束トナレ
 カラ §9ノ所論カラ列空間 $\mathcal{F}$ アル。 従ッテ計量ノツケカヘデ
 (A)-空間 =ナル。

定理3. (H) フ満足スル K_6 型 "正則" F -束ハ、ソノ任
 意ノ正要素 $a > 0$ = 正值ヲ與ヘル正線形汎函数が存在スルト
 キニハ、有限次元 $\mathcal{F}$ アルカ或ハ計量ノツケカヘデ (A)-空間 =
 ナル。

(証) §5. 定理1. (p. 1345)ノ証明法ニヨリ証明サ
 レル。

定理4. 条件 (N) フ満足スルバクトル束ガ (H) フ満足
 スルトキ、有限次元カ或ハ計量ヲ適當ニトルト (A)-空間 =
 ナル。

(証) 定理3カラ。

§1カラ §12マデ計量ハ実数トシタガ, 計量函数ノ値ヲ K_0 型
“正則”ベクトル束ノ要素トシテモ以上ノ所論ノ中デ論ゼラレ
ル部分ガアル。

尚, §5, 定理1ハ次ノ様ニ書イタ方が判リヨカッタ。

(*) ヲ満足スル K_0 型“正則”F-束ノ 正規イデヤルノ完
全ブール代数ガ原子的要素ヲ含マナイトキ (孤立要素ガ存在
シナイトキ) *non-trivial* + (0)-連続線型汎函数ハ
存在シナイ。

コゝニ a ガ孤立要素トハ主イデヤル $\mathcal{O}(a)$ ガ正規イデ
ヤルノ完全ブール代数ノ原子的要素ノトキト定義スル。即チ
任意 $x \in \mathcal{O}(a)$ ガ $x = \lambda a$ ノ形ニカ、レルコトデアアル。